

参考答案

第一章 集合与常用逻辑用语(A卷)

1. A 解析: $0 \in \mathbf{N}, \frac{2}{7} \notin \mathbf{Z}, -3 \in \mathbf{Z}, \pi \notin \mathbf{Q}$. 故选 A.
2. D 解析: 由题意得, $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, 所以集合 B 中有 4 个元素. 故选 D.
3. B 解析: 由已知可得 $\complement_U M = \{3, 4\}$, 故 $(\complement_U M) \cap N = \{3\}$. 故选 B.
4. B 解析: 先将存在量词“ $\exists$ ”改为全称量词“ $\forall$ ”, 再否定结论. 故选 B.
5. D 解析: $\because x, y$ 是两个实数, x, y 中至少有一个数大于 1, $\therefore$ 令 $x = 1.1, y = 0.1, \therefore 1.1^2 + 0.1^2 < 2, \therefore “x, y$ 中至少有一个数大于 1” $\nRightarrow “x^2 + y^2 > 2”$. 若 $x^2 + y^2 > 2$, 则可取 $x = -2, y = -3, \therefore (-2)^2 + (-3)^2 = 13 > 2, \therefore “x^2 + y^2 > 2” \nRightarrow “x, y$ 中至少有一个数大于 1”. $\therefore “x, y$ 中至少有一个数大于 1” 是 “ $x^2 + y^2 > 2$ ” 成立的既不充分也不必要条件. 故选 D.
6. B 解析: 由已知得集合 $A = \{2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 因为 $A \subseteq C \subseteq B$, 所以集合 C 的个数为 $2^{5-2} = 8$.
7. B 解析: 因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$. ①若 $B = \emptyset$, 则 $a > 2a - 1$, 解得 $a < 1$; ②若 $B \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} a \geq 1, \\ 2a - 1 < -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \geq 1, \\ a > 3. \end{cases}$ 解得 $a > 3$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a < 1 \text{ 或 } a > 3\}$.
8. C 解析: 非空集合 A 的真子集中的元素至少比集合 A 中的元素少一个, 非空集合 A 的真子集的真子集 (A 的孙集) 中的元素至少比集合 A 的真子集中的元素少一个. 因为 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 含 5 个元素, 所以 A 的孙集含元素的个数可能是 0, 1, 2, 3. 当元素个数为 0 时, 此时孙集为 $\emptyset$, 共 1 个; 当元素个数为 1 时, 此时孙集有 $\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}$, 共 5 个; 当元素个数为 2 时, 此时孙集有 $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 9\}$, 共 10 个; 当元素个数为 3 时, 此时孙集有 $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 9\}, \{1, 7, 9\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 7, 9\}, \{5, 7, 9\}$, 共 10 个. 所以集合 A 的孙集的个数为 $1 + 5 + 10 + 10 = 26$.
9. BC 解析: 对于 A, “ $\in$ ” 是元素与集合间的表示符号, 此处应是 “ $\subseteq$ ”; 对于 B, 任何一个集合是它本身

的子集; 对于 C, 空集是任何一个集合的子集; 对于 D, 两集合元素不一样, 第一个是数集, 第二个是点集, 所以不相等.

10. ABC 解析: 由 $1 < 4x < 3$ 得 $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$, 因此不存在 $x \in \mathbf{N}$ 满足条件, 因此选项 A 中命题为假命题; 由 $5x - 1 = 0$ 得 $x = \frac{1}{5} \notin \mathbf{Z}$, 因此选项 B 中命题为假命题; 由 $x^2 - 1 = 0$ 得 $x = \pm 1$, 不具有任意性, 因此选项 C 中命题为假命题; $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$ 恒成立, 因此选项 D 中命题为真命题. 故选 ABC.
11. ABD 解析: 对于 A, 因为 $\complement_U A = \{x | x < -1 \text{ 或 } 2 < x \leq 4 \text{ 或 } x \geq 6\}$, 所以 A 正确; 对于 B, 因为 $\complement_U B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \{x | -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 5 \leq x < 6\}$, 所以 B 正确; 对于 C, 因为 $(\complement_U A) \cup B = \{x | x < -1 \text{ 或 } 1 \leq x < 5 \text{ 或 } x \geq 6\}$, 所以 C 不正确; 对于 D, 因为集合 B 的补集的补集就是集合 B , 所以 D 正确. 故选 ABD.
12. AD 解析: 对于 A, $x = 2$ 时, $x^2 - 2x = 0$ 一定成立, 反之不一定成立, 所以 “ $x^2 - 2x = 0$ ” 是 “ $x = 2$ ” 的必要不充分条件, 故 A 正确; 对于 B, $x > 2$ 且 $y > 3$ 时, $x + y > 5$ 一定成立, 反之不一定成立, 如 $x = 0, y = 6$, 所以 “ $x > 2$ 且 $y > 3$ ” 是 “ $x + y > 5$ ” 的充分不必要条件, 故 B 错误; 对于 C, 当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有解的充要条件是 $b^2 - 4ac \geq 0$, 故 C 错误; 对于 D, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 q 是 p 的必要不充分条件, 满足充分与必要条件的定义, 故 D 正确. 故选 AD.
13. -1 或 3 解析: $\because A = B, \therefore m^2 - 2m = 3$, 即 $m^2 - 2m - 3 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 3$.
14. $\{0, 1, 2\}$ 解析: 易得 $\complement_U B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 图中阴影部分表示的集合为 $A \cap (\complement_U B) = \{0, 1, 2\}$.
15. $\in \{1, -1, 0\}$ 解析: 因为 $P = \{x | x^2 = 9\} = \{3, -3\}$, 所以 $-3 \in P$. $Q = \{x | ax = 3\}$, 若 $Q \subseteq P$, 则当 $a = 0$ 时, $Q = \emptyset$, 满足题意; 当 $a \neq 0$ 时, $Q = \{x | ax = 3\} = \{\frac{3}{a}\}$, 则 $\frac{3}{a} = 3$ 或 $\frac{3}{a} = -3$, 解得 $a = 1$ 或 $a = -1$. 综上可知, 实数 a 的值组成的集合为 $\{1, -1, 0\}$.
16. $\{m | m < 2\}$ 解析: 由 $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x + 2 >$

$t+m$ 成立,得 $x+2$ 的最小值大于 $t+m$,因此 $3>t+m$. 又由 $\exists t \in \{t|1 \leq t \leq 2\}$,使得 $t+m < 3$ 成立,得 t 的最小值小于 $3-m$,即 $3-m > 1$,解得 $m < 2$. 因此,实数 m 的取值范围是 $\{m|m < 2\}$.

17. 解: (1)命题的否定为“ $\forall a \in \mathbf{R}$,一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 有实数根”.

$$\because \Delta = (-a)^2 - 4 \times (-1) = a^2 + 4 > 0,$$

$\therefore$ 方程有实数根. 故是真命题.

(2)命题的否定为“任意一个无理数,它的立方不是无理数”.

例如无理数 $\sqrt{2}$ 的立方是 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ 是无理数. 故是假命题.

(3)命题的否定为“ $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} \notin \mathbf{N}$ ”.

例如取 $m=0$,则 $\sqrt{m^2+1}=1 \in \mathbf{N}$. 故是假命题.

(4)命题的否定为“存在一个素数不是奇数”.

例如 2 是素数且不是奇数. 故是真命题.

18. 解: 集合 $A = \{x | (x-3)(x-a) = 0, a \in \mathbf{R}\} = \{3, a\}$, $B = \{x | (x-4)(x-1) = 0\} = \{1, 4\}$.

(1)当 $a=1$ 时, $A = \{1, 3\}$,

所以 $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{1, 3, 4\}$.

(2)因为 $C = A \cup B$, 集合 C 的子集有 8 个, 所以集合 C 中有 3 个元素.

而 $1 \in C, 3 \in C, 4 \in C$,

故实数 a 的取值集合为 $\{1, 3, 4\}$.

19. 解: (1) $\because 1 \in A, \therefore 1 - a + 3 = 0, \therefore a = 4$.

(2) $\because A \cap B = \{3\}, \therefore 3 \in A, 3 \in B$.

$$\therefore \begin{cases} 9 - 3a + 3 = 0, \\ 18 - 3b + b = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 4, \\ b = 9. \end{cases}$$

$$\therefore A = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\},$$

$$B = \{x | 2x^2 - 9x + 9 = 0\} = \left\{3, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$\therefore A \cup B = \left\{1, \frac{3}{2}, 3\right\}.$$

20. 解: (1) $\because B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\} = \{x | x \geq 3\}$,

$$\therefore \complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x < 3\}.$$

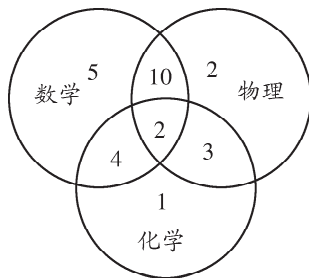
$$\therefore A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | x < 4\}.$$

(2)由 $A \cap C = A$, 知 $A \subseteq C$, 且 $C \neq \emptyset$,

$$\therefore \begin{cases} a + 3 \geq a - 1, \\ a + 3 \geq 4, \\ a - 1 \leq 2, \end{cases} \text{解得} 1 \leq a \leq 3.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\{a | 1 \leq a \leq 3\}$.

21. 解: 由题意可画 Venn 图如图所示.



由图可以看出,参加三个小组的学生共有 $1+2+2+3+4+5+10=27$ (人),

所以需要购买 27 张车票.

22. 解: (1)由 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$, 得 $-3 \leq a \leq 5$.

(2)求实数 a 的一个值,使它成为 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个充分不必要条件,就是在集合 $\{a | -3 \leq a \leq 5\}$ 中取一个值.

如取 $a=0$,此时必有 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$;

反之,由 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 未必得出 $a=0$,

故 $a=0$ 是 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个充分不必要条件.(答案不唯一).

第一章 集合与常用逻辑用语(B卷)

1. A 解析: $\complement_U A = \{-1, 3\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = \{-1\}$.

2. B 解析: 命题“对任意 $x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$ ”是一个全称量词命题,其否定是存在量词命题,即“存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$ ”. 故选 B.

3. A 解析: 根据题意,可得阴影部分所表示的集合为 $M \cap N$, $N = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*\}$ 中的元素为正奇数,而在 $-2 \leq x \leq 2$ 内的正奇数只有 1. 所以集合 $M \cap N = \{1\}$ 共有 1 个元素.

4. C 解析: 由集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{y | y = |x| - 1, x \in A\}$, 得 $B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $B \subseteq A$. 故选 C.

5. D 解析: 因为 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$. 又因为集合 $A = \{x | ax - 6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | 2 \leq x < 4\} = \{2, 3\}$, 当集合 A 为空集时, $a=0$, 符合题意; 当集合 A 不是空集时, $A = \{x | ax - 6 = 0\} = \left\{\frac{6}{a}\right\}$. 由 $\frac{6}{a} = 2$, $\frac{6}{a} = 3$, 分别可得 $a=3, a=2$, 所以实数 a 的所有取值构成的集合是 $\{0, 2, 3\}$. 故选 D.

6. A 解析: $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x^2 - a \leq 0$ 成立, 即 $a \geq x^2$ 恒成立, $\therefore a \geq 4$. 易知 $\{a | a \geq 5\}$ 是 $\{a | a \geq 4\}$ 的真子集, $\therefore “a \geq 5”$ 是“命题 $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x^2 - a \leq 0$ 为真命题”的充分不必要条件. 故选 A.

7. D 解析: 因为 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{4, 5\}$, $M = \{x | x =$

$a+b, a \in A, b \in B$, 所以 $M = \{4, 5, 6, 7\}$, 即集合 M 中有 4 个元素, 所以集合 M 的真子集个数为 $2^4 - 1 = 15$. 故选 D.

8. C 解析: $B = \{1, 4\}$, $x^2 - (a+3)x + 3a = 0$ 两根是 $x=3, x=a$, 当 $a=0, 1, 3, 4$ 时, 满足集合 $A \cup B$ 中所有元素之和为 8, 故选 C.

9. ABC 解析: A 中小于 18 的正奇数除给定集合中的元素外, 还有 3, 7, 11, 15, 故 A 错误; B 中除给定集合中的元素外, 还有 $-3, -7, -11, \dots$, 故 B 错误; C 中当 $t=0$ 时, $x=-3$, 不属于给定的集合, 故 C 错误; D 是正确的. 故选 ABC.

10. ACD 解析: $\because A \subseteq B, A \subseteq C, B = \{2, 0, 1, 8\}, C = \{1, 9, 3, 8\}$, $\therefore A \subseteq (B \cap C)$, 即 $A \subseteq \{1, 8\}$. 故选 ACD.

11. ABD 解析: 由 $1 \leq x \leq 2$, 得 $1+m \leq x+m \leq 2+m$. 要使一次函数 $y=x+m$ 的图象在 x 轴上方, 需 $x+m > 0$ 恒成立, 即 $(x+m)_{\min} > 0$. 所以 $1+m > 0$. 解得 $m > -1$. 故选 ABD.

12. ABD 解析: $a > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1$, 所以“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充分不必要条件, 故 A 正确; 命题“若 $x < 1$, 则 $x^2 < 1$ ”可改写为“ $\forall x < 1, x^2 < 1$ ”, 所以命题的否定为“存在 $x < 1, x^2 \geq 1$ ”, 故 B 正确; 当 $x=2, y=2$ 时, $x^2+y^2=8 \geq 4$, 当 $x=1, y=3$ 时, $x^2+y^2=1+9=10 \geq 4$, 但不满足 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$, 所以“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2+y^2 \geq 4$ ”的充分不必要条件, 故 C 错误; $ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ 且 $b \neq 0$. 所以“ $a \neq 0$ ”是“ $ab \neq 0$ ”的必要不充分条件, 故 D 正确. 综上所述, 答案为 ABD.

13. -3 解析: $\because$ 集合 $U = \{0, 1, 2, 3\}$, $\complement_U A = \{1, 2\}$, $\therefore A = \{0, 3\}$. 解 $x^2 + mx = 0$, 得 $x=0$ 或 $x=-m$. $\therefore -m=3$. $\therefore m=-3$.

14. 必要不充分 解析: 条件是 $p: x \in M$ 或 $x \in P$, 等价于 $x \in (P \cup M)$, 结论是 $q: x \in (P \cap M)$. 依题意得 $P \cap M$ 是 $P \cup M$ 的真子集, 所以“ $x \in (P \cap M)$ ”能推出“ $x \in (P \cup M)$ ”, 反之不成立, 即结论 $q \Rightarrow$ 条件 p , 必要性成立; 条件 $p \not\Rightarrow$ 结论 q , 充分性不成立. 综上, “ $x \in M$ 或 $x \in P$ ”是“ $x \in (P \cap M)$ ”的必要不充分条件.

15. $m \leq 5$ 解析: 因为命题“ $\exists x \geq 3$, 使得 $2x-1 < m$ ”是假命题, 所以“ $\forall x \geq 3, 2x-1 \geq m$ ”是真命题, 故 $m \leq 5$.

16. 13 解析: $\because k \in A, k-1 \notin A$ 且 $k+1 \notin A$, $\therefore$ 所求

集合中满足题意的有 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}$.

17. 解: (1) 依题意, 知 $2 \in B$,

所以 $2^2 - 5 \times 2 + q = 0$, 所以 $q = 6$.

由 $4 \in A$, 所以 $4^2 + 4p + 12 = 0$, 所以 $p = -7$.

所以 $p+q = -7+6 = -1$.

(2) 由 (1) 知 $A = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\} = \{3, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$,

所以 $A \cup B = \{2, 3, 4\}$.

因为 $S \subseteq (A \cup B)$, 所以 S 的个数为 $2^3 = 8$.

18. 证明: 充分性: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore a=b=c$, 则 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$,

$\therefore 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$.

即 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

必要性: $\because a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$,

$\therefore 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$,

$\therefore (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$,

$\therefore a=b, b=c, c=a$, 即 $a=b=c$.

故 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 的充要条件是 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

19. 解: (1) 当 $a=3$ 时, $A = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$,

又 $B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$,

$\therefore A \cap B = \{x | -1 \leq x \leq 1 \text{ 或 } 4 \leq x \leq 5\}$.

(2) $\because B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$,

$\therefore \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | 1 < x < 4\}$.

由“ $x \in A$ ”是“ $x \in \complement_{\mathbb{R}} B$ ”的充分不必要条件,

得 $A \not\subseteq \complement_{\mathbb{R}} B$,

又 $A = \{x | 2-a \leq x \leq 2+a\}$, $A \neq \emptyset$,

$$\therefore \begin{cases} 2-a \leq 2+a, \\ 2-a > 1, \\ 2+a < 4, \end{cases} \quad \therefore 0 \leq a < 1.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\{a | 0 \leq a < 1\}$.

20. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$,

则 $A \cup B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$.

(2) ①②③中任选一个作条件, 都有 $B \subseteq A$,

$$\therefore \begin{cases} a \geq -1, \\ a+2 \leq 2, \end{cases} \quad \text{解得 } -1 \leq a \leq 0.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 0\}$.

21. 解: (1) 若 $a=1, p: 1 < x < 4, q: 2 < x \leq 5$.

$\because p, q$ 都为真命题,

$\therefore x$ 的取值范围为 $\{x | 2 < x < 4\}$.

(2) 设 $A = \{x | a < x < 4a, a > 0\}$,

$$B = \{x | 2 < x \leq 5\}.$$

$\because p$ 是 q 的必要不充分条件, $\therefore B \subsetneq A$,

$$\therefore \begin{cases} a \leq 2, \\ 4a > 5, \end{cases} \text{解得 } \frac{5}{4} < a \leq 2.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid \frac{5}{4} < a \leq 2\right\}$.

22. 解: (1) 集合 A 不是闭集合, 集合 B 是闭集合. 证明如下:

因为 $4 \in A, 2 \in A$, 但是 $4+2=6 \notin A$,

所以 A 不是闭集合.

任取 $a, b \in B$, 设 $a=3m, b=3n, m, n \in \mathbf{Z}$,

则 $a+b=3m+3n=3(m+n)$ 且 $m+n \in \mathbf{Z}$,

所以 $a+b \in B$. 同理, $a-b \in B$. 故 B 是闭集合.

(2) 不一定. 理由如下: 令 $A = \{x | x=2k_1, k_1 \in \mathbf{Z}\}$,

$B = \{x | x=3k_2, k_2 \in \mathbf{Z}\}$, 由 (1) 易知, A, B 均为闭集合,

因为 $2 \in (A \cup B), 3 \in (A \cup B)$, 但 $5 \notin (A \cup B)$,

所以 $A \cup B$ 不一定为闭集合.

第二章 一元二次函数、方程和不等式(A卷)

1. D 解析: 由 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 得 $b < a < 0$, $\therefore a^2 < b^2$.

2. D 解析: 由 $x^2 \geq 2x$, 得 $x(x-2) \geq 0$. 解得 $x \leq 0$ 或 $x \geq 2$. 故选 D.

3. B 解析: 由一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立, 知 $a>0$ 且 $\Delta=b^2-4ac<0$. 反之, 当 $a>0$ 时, 如 $x^2+3x+2>0$, 不一定恒成立. 故选 B.

4. D 解析: $t-s=4b-b^2-4=-(b-2)^2 \leq 0$, 故 $t \leq s$.

5. A 解析: 不等式 $\frac{2}{x+2} < x+1$ 等价于 $\frac{x(x+3)}{x+2} > 0$, 即等价于 $x(x+3)(x+2) > 0$, 得它的解集为 $\{x | -3 < x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$.

6. C 解析: 设该容器底面的长和宽分别为 a m, b m, 总造价为 y 元, $\because$ 长方体容器的容积为 4 m^3 , 高为 1 m, $\therefore$ 底面面积 $S=ab=4 \text{ m}^2$, $y=20S+10 \times [2(a+b)]=20(a+b)+80$, $\because a+b \geq 2\sqrt{ab}=4$, 当且仅当 $a=b=2$ 时取等号, $\therefore$ 当 $a=b=2$ 时, y 取最小值, 为 160 , 即该容器的最低总造价是 160 元. 故选 C.

7. B 解析: $\because a>0, b>0$, $\therefore a+1>1, b+1>1$. 又

$$\therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1, \therefore a+2b = [(a+1) + 2(b+1) - 3] = [(a+1) + 2(b+1)] \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) -$$

$$3 = 1 + \frac{2(b+1)}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} + 2 - 3 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{2(b+1)}{a+1} \cdot \frac{a+1}{b+1}} = 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{2(b+1)}{a+1} = \frac{a+1}{b+1}, \text{ 即 } a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时等号成立. 故选 B.}$$

8. B $\because (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) = 1+a + \left(\frac{y}{x} + \frac{ax}{y}\right) \geq 1 +$

$$a + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{ax}{y}} = 1+a+2\sqrt{a} \geq 9, \text{ 当且仅当 } \frac{y}{x} =$$

$$\frac{ax}{y}, \text{ 即 } y=\sqrt{ax} \text{ 时等号成立, } \therefore a+2\sqrt{a}-8 \geq 0, \text{ 即}$$

$$(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-2) \geq 0, \because a>0, \therefore \sqrt{a}-2 \geq 0, \text{ 即 } a \geq$$

4. $\therefore$ 正实数 a 的最小值为 4 . 故选 B.

9. AB 解析: 由 $x^2-x-6<0$, 得 $-2<x<3$, 使不等式 $x^2-x-6<0$ 成立的一个充分不必要条件的 x 的取值范围是集合 $\{x | -2<x<3\}$ 的真子集. 故选 AB.

10. AD 解析: ①由 $xt^2>yt^2$ 可知, $t^2>0$, 所以 $x>y$, 因此 $xt^2>yt^2$ 是 $x>y$ 的充分条件. ②由 $xt>yt$ 不能确定 t 的符号, 因此不能确定 x 与 y 的大小, 故 $xt>yt$ 不是 $x>y$ 的充分条件. ③令 $x=-2, y=1$, 则 $x^2>y^2$, 但 $x<y$, 因此 $x^2>y^2$ 不是 $x>y$ 的充分条件. ④由 $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ 可得, $x>0, y>0$,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0, \text{ 即 } \frac{y-x}{xy} < 0, \text{ 所以 } y-x < 0, \text{ 所以}$$

$$x>y, \text{ 因此 } 0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y} \text{ 是 } x>y \text{ 的充分条件. 故选 AD.}$$

11. BD 解析: $\because x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当

$$x^2=y^2=\frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立, } 0 \leq x^2y^2 \leq \frac{1}{4}, \therefore \frac{3}{4} \leq$$

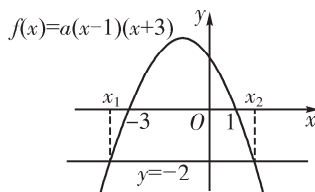
$$1-x^2y^2 \leq 1.$$

12. ACD 解析: 由题设, $a(x-1)(x+3)+2=ax^2+2ax-3a+2>0$ 的解集为 (x_1, x_2) , $\therefore a<0$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2, \\ x_1x_2=\frac{2}{a}-3<0, \end{cases} \therefore x_1+x_2+2=0, x_1x_2+3=$$

$$\frac{2}{a}<0, \text{ 则 A, D 正确. 原不等式可转化为 } f(x)=$$

$a(x-1)(x+3)>-2$ 的解集为 (x_1, x_2) , 而 $f(x)$ 的零点分别为 $-3, 1$, 且开口向下, 又 $x_1<x_2$, 如下图所示.



∴由图知, $x_1 < -3 < 1 < x_2$, $|x_1 - x_2| > 4$, 故 B 错误, C 正确.

13. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3 \leq 2x$ 解析: 存在量词命题的否定是全称量词命题, 只需把“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ”改为“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ”, 把“ $x^2 + 3 > 2x$ ”改为“ $x^2 + 3 \leq 2x$ ”, 所以存在量词命题: “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3 > 2x$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3 \leq 2x$ ”.

14. $\{a | a \leq 1\}$ 解析: 关于 x 的不等式 $(x-1)(x-2a) > 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 的解集为 A . ①当 $2a \geq 1$ 时, $A = \{x | x < 1$ 或 $x > 2a\}$, $\because B \subseteq A$, $\therefore 2a \leq 2$. 联立 $\begin{cases} 2a \geq 1, \\ 2a \leq 2, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. ②当 $2a < 1$ 时, $A = \{x | x < 2a$ 或 $x > 1\}$, 满足 $B \subseteq A$, 由 $2a < 1$, 解得 $a < \frac{1}{2}$. 综上可得, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a \leq 1\}$.

15. -1 0 解析: $\because x > -2, \therefore x+2 > 0. \therefore y = x + \frac{1}{x+2} = (x+2) + \frac{1}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{1}{x+2}} - 2 = 0$, 当且仅当 $x+2 = \frac{1}{x+2}$, 即 $x = -1$ 时等号成立.

16. -2 $\{a | a < -2\}$ 解析: ①当 $0 < x \leq 1$ 时, 不等式 $y = x^2 + ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 即当 $0 < x \leq 1$ 时, $-a \leq x + \frac{1}{x}$ 恒成立, 设 $t = x + \frac{1}{x}$ ($0 < x \leq 1$), 则 $t = x + \frac{1}{x} \geq 2$ (当且仅当 $x = 1$ 时等号成立), 所以 $-a \leq 2$, 即 $a \geq -2$, 所以 a 的最小值为 -2 . ②若 $y = 0$ 的一个根比 1 大, 另一个根比 1 小, 则 $f(1) = 2 + a < 0$, 即 $a < -2$.

17. 解: $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)(a^2 - b^2) = (a-b)^2 \cdot (a+b)$, $\because a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, $\therefore (a-b)^2 > 0, a+b > 0$, $\therefore (a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) > 0$, 即 $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$.

18. 解: (1) 由题意得, $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\} = \{x | x \leq -1$ 或 $x \geq 3\}$, $B = \{x | x^2 - 6x + 8 \leq 0\} = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$, $\therefore A \cup B = \{x | x \leq -1$ 或 $x \geq 2\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{x | 2 \leq x \leq 4\} \cap \{x | -1 < x < 3\} = \{x | 2 \leq x < 3\}$. (2) $\because C \cap (\complement_U A) = C, \therefore C \subseteq \complement_U A$. 若 $C = \emptyset$, 则 $2a - 1 \geq 1$, 即 $a \geq 1$.

若 $C \neq \emptyset$, 则 $a < 1$,

$\because C \subseteq \complement_U A$, 且 $\complement_U A = \{x | -1 < x < 3\}$, $\therefore 2a - 1 \geq -1$, 解得 $0 \leq a < 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a \geq 0\}$.

19. 解: (1) 因为不等式 $ax^2 - 3x + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | x < 1$ 或 $x > b\}$, 所以方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根为 $x = 1, x = b$, 且 $a > 0$.

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{3}{a} = 1 + b, \\ \frac{2}{a} = b. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 2. \end{cases}$$

(2) 由(1)知, 不等式 $\frac{x-c}{ax-b} > 0$ 为 $\frac{x-c}{x-2} > 0$,

等价于 $(x-c)(x-2) > 0$.

①当 $c \geq 2$ 时, $x > c$ 或 $x < 2$.

②当 $c < 2$ 时, $x > 2$ 或 $x < c$.

综上, 当 $c \geq 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > c$ 或 $x < 2\}$,

当 $c < 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > 2$ 或 $x < c\}$.

20. 解: (1) 由 $a + 4b - ab = 0$, 得 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$,

$$\text{所以 } a + b = (a + b) \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right) = 5 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9,$$

当且仅当 $\frac{4b}{a} = \frac{a}{b}$ 时, 等号成立, 即 $a = 6, b = 3$.

故 $a + b$ 的最小值为 9 , 此时 $a = 6, b = 3$.

(2) 因为 $a + b + c = 1$,

$$\text{所以 } (1-a)(1-b)(1-c) = (b+c)(a+c)(a+b).$$

又因为 a, b, c 均为正数,

$$\text{所以 } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}.$$

$$\text{所以 } \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8} \geq abc,$$

$$\text{故 } (1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc,$$

当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立.

21. 解: (1) 设捕捞 n 年的盈利为 y 万元,

$$\text{则 } y = 50n - (2n^2 + 10n) - 98 = -2n^2 + 40n - 98.$$

$$\text{令 } y > 0, \text{ 得 } n^2 - 20n + 49 < 0,$$

$$\text{解得 } 10 - \sqrt{51} < n < 10 + \sqrt{51} \quad (n \in \mathbf{N}_+).$$

则 $3 \leq n \leq 17$. 所以捕捞 3 年开始盈利.

(2) 方案①划算, 理由如下:

$$\text{① } \frac{y}{n} = -2n - \frac{98}{n} + 40 \leq -2\sqrt{2n \cdot \frac{98}{n}} + 40 = 12,$$

当且仅当 $2n = \frac{98}{n}$, 即 $n = 7$ 时取等号,

故经过 7 年捕捞, 年平均盈利最大, 共盈利 $12 \times 7 + 26 = 110$ (万元).

②因为 $y = -2n^2 + 40n - 98 = -2(n-10)^2 + 102$, 所以当 $n = 10$ 时, y 取得最大值 102.

故经过 10 年捕捞盈利总额最大, 共盈利 $102 + 8 = 110$ (万元).

综上知, 两种方案获利相等, 但方案②的时间更长, 所以方案①更划算.

22. (1) 当 $m = 0$ 时, $y_1 = -8x + 1$,

要使 $y_1 > 0$, 则 $x < \frac{1}{8}$, 不满足条件, 舍去.

当 $m \neq 0$ 时, 由题意得

$$\begin{cases} 2m > 0, \\ [-2(4-m)]^2 - 4 \times 2m < 0, \end{cases} \text{解得 } 2 < m < 8.$$

所以实数 m 的取值范围为 $\{m | 2 < m < 8\}$.

(2) 当 $m \leq 0$ 时, 由函数解析式知不满足对于任一实数 x , y_1 与 y_2 的值至少有一个为正数, 舍去.

当 $m > 0$ 时, 若 $x = 0$, 则 $y_1 = 1 > 0$,

当 $-\frac{2(4-m)}{2 \times 2m} = \frac{4-m}{2m} \geq 0$, 即 $0 < m \leq 4$ 时,

函数 $y_1 = 2mx^2 - 2(4-m)x + 1$ 的图象与 x 轴无交点或交点都在 y 轴右侧, 如图 1 所示, 结论显然成立.

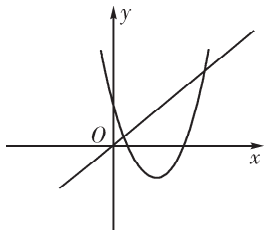


图 1

当 $-\frac{2(4-m)}{2 \times 2m} = \frac{4-m}{2m} < 0$ 且 $m > 0$, 即 $m > 4$ 时,

如图 2 所示, 只要 $[-2(4-m)]^2 - 4 \times 2m = 4(m-8)(m-2) < 0$ 即可, 所以 $4 < m < 8$.

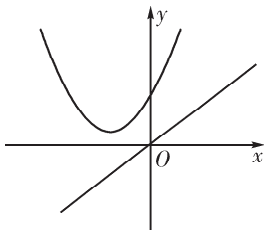


图 2

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\{m | 0 < m < 8\}$.

第二章 一元二次函数、方程和不等式(B 卷)

1. C 解析: 由题意, 得 $N = \{x | -2 < x < 3\}$, 则 $M \cap N = \{x | -2 < x < 2\}$. 故选 C.

2. C 解析: 因为 $a^2 + a < 0$, 所以 $-1 < a < 0$. 所以 $a < a^2 < -a$. 故选 C.

3. C 解析: $\because \frac{4x-1}{2-x} \geq 2, \therefore \frac{4x-1}{2-x} - 2 \geq 0$, 即 $\frac{6x-5}{2-x} \geq 0, \therefore \begin{cases} (6x-5)(2-x) \geq 0, \\ 2-x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{5}{6} \leq x < 2$. 故选 C.

4. A 解析: 由 $x \geq 3$ 且 $y \geq 3 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 18$, 反之不成立, 例如, $x = 2, y = 5$ 满足 $x^2 + y^2 \geq 18$, 但 $x < 3$. 故选 A.

5. B 解析: 因为 $4a + 2b = 3(a+b) + (a-b)$, 所以 $3 \times 1 - 1 \leq 4a + 2b \leq 3 \times 3 + 1$, 即 $2 \leq 4a + 2b \leq 10$.

6. B 解析: $A = \{x | x^2 - 8x + 15 \leq 0\} = \{x | 3 \leq x \leq 5\}$, $\therefore A \cap B = A, \therefore A \subseteq B$. 当 $a > 0$ 时, $B = \{x | ax - 1 < 0\} = \{x | x < \frac{1}{a}\}$, $\therefore \frac{1}{a} > 5$, 得 $0 < a < \frac{1}{5}$. 当 $a = 0$ 时, $B = \mathbf{R}$, 恒满足 $A \subseteq B$. 当 $a < 0$ 时, $B = \{x | ax - 1 < 0\} = \{x | x > \frac{1}{a}\}$, $\therefore \frac{1}{a} < 0$, $\therefore$ 恒满足 $A \subseteq B$. 综上, a 的取值范围为 $\{a | a < \frac{1}{5}\}$. 故选 B.

7. D 解析: 对于 A, $c^2 \geq 0$, 则由 $a > b$ 可得 $ac^2 \geq bc^2$, 故 A 中说法正确; 对于 B, 由 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, 得 $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} > 0$, 当 $c < 0$ 时, 有 $a-b < 0$, 则 $a < b$, 故 B 中说法正确; 对于 C, $\because a^3 > b^3, ab > 0, \therefore a^3 > b^3$ 两边同乘 $\frac{1}{a^3 b^3}$, 得到 $\frac{1}{b^3} > \frac{1}{a^3}, \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 C 中说法正确; 对于 D, $\because a^2 > b^2, ab > 0, \therefore a^2 > b^2$ 两边同乘 $\frac{1}{a^2 b^2}$, 得到 $\frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2}$, 不一定 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 D 中说法错误. 故选 D.

8. A 解析: 由题意得, $x + y = (x+3) + y - 3 = 2\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y}\right)[(x+3) + y] - 3 = 2 + \frac{2y}{x+3} + \frac{2(x+3)}{y} + 2 - 3 = \frac{2y}{x+3} + \frac{2(x+3)}{y} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{2y}{x+3} \cdot \frac{2(x+3)}{y}} + 1 = 5$, 当且仅当 $\frac{2y}{x+3} = \frac{2(x+3)}{y}, \frac{1}{x+3} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 即 $x = 1, y = 4$ 时等号成立, $\therefore x + y$ 的最小值为 5.

9. ABC 解析: $\because x^2 - 4x + 12 = (x-2)^2 + 8 \geq 8 > 0$,

所以不等式 $\frac{x}{x^2-4x+12} > 1$ 与 $x > x^2 - 4x + 12$ 的解集相同, 故 A 符合题意; 因为 $|a| > |b|$ 与 $a^2 > b^2$ 等价, 所以 $|x-3| > |2x+6|$ 与 $(x-3)^2 > (2x+6)^2$ 的解集相同, 故 B 符合题意; 根据 $|x| > a (a > 0)$ 等价于 $x > a$ 或 $x < -a$ 知 $|x^2-2x| > 3$ 与 $x^2-2x > 3$ 或 $x^2-2x < -3$ 的解集相同, 故 C 符合题意; 根据 $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0, \\ f(x) \neq 0, \end{cases}$ 知 $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$ 等价于 $(x-2)(x-3)(x+1)(x+2) \leq 0$ 且 $(x+1)(x+2) \neq 0$, 故 D 不符合题意. 故选 ABC.

10. AD 解析: 设甲、乙两地之间的距离为 s , 则全程所需的时间为 $\frac{s}{a} + \frac{s}{b}$, $\therefore v = \frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

$\because b > a > 0$, 由基本不等式可得 $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, $\therefore v = \frac{2ab}{a+b} < \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$, 另一方面 $v = \frac{2ab}{a+b} < \frac{2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{a+b}{2}$, $v - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{ab-a^2}{a+b} > \frac{a^2-a^2}{a+b} = 0$, $\therefore v > a$, 则 $a < v < \sqrt{ab}$.

11. BC 解析: A 中, $y = x^2 + \frac{1}{16x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{16x^2}} = \frac{1}{2}$ (当且仅当 $x = \pm \frac{1}{2}$ 时取等号), 因此式子无最大值; B 中, $y^2 = x^2(1-x^2) \leq \left(\frac{x^2+1-x^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $y \geq 0$, $\therefore 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 y 取到最大值 $\frac{1}{2}$; C 中, 当 $x=0$ 时, $y=0$, 当 $x \neq 0$ 时, $y = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = \pm 1$ 时 y 取到最大值 $\frac{1}{2}$; D 中, 当 $x > -2$ 时, $x+2 > 0$, $y = x + \frac{4}{x+2} = x+2 + \frac{4}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{4}{x+2}} - 2 = 2$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号), 无最大值. 故选 BC.

12. AC 解析: 由题意知, x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2ax - 8a^2 = 0$ 的两个实数根, 所以 $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1 x_2 = -8a^2$, 则 $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4a^2 + 32a^2 = 36a^2$, 又因为 $x_2 - x_1 = 15$, 所以 $36a^2 = 15^2$, 解得 $a = \pm \frac{5}{2}$.

13. 1 解析: $\because x < \frac{5}{4}$, $\therefore 5-4x > 0$, $\therefore y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5} = -\left(5-4x + \frac{1}{5-4x}\right) + 3 \leq -2+3=1$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立. 故当 $x=1$ 时, $y_{\max} = 1$.

14. $\{a | -1 < a < 3\}$ 解析: 由 $\begin{cases} x-1 > a^2, \\ x-4 < 2a, \end{cases}$ 得 $a^2 + 1 < x < 2a+4$. $\because$ 不等式组的解集不是空集, $\therefore a^2 + 1 < 2a+4$, 解得 $-1 < a < 3$, $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\{a | -1 < a < 3\}$.

15. $\{a | 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\}$ 解析: 由 $\frac{2x-1}{x-1} < 0$, 得 $\frac{1}{2} < x < 1$, 所以 $p: \frac{1}{2} < x < 1$. 由 $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$, 得 $a \leq x \leq a+1$, 所以 $q: a \leq x \leq a+1$. 要使 p 是 q 的充分不必要条件, 则 $\begin{cases} a+1 \geq 1, \\ a \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. 所以实数 a 的取值范围是 $\{a | 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\}$.

16. $2\sqrt{2}$ 解析: 由题意可知, $p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 4$, $c = 2$, $\therefore a+b=6$, $a+b=6 \geq 2\sqrt{ab}$, $\therefore ab \leq 9$, 当 $a=b=3$ 时等号成立. $\therefore S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8(4-a)(4-b)} = \sqrt{128-32(a+b)+8ab} \leq 2\sqrt{2}$.

17. 证明: 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$, 又 $abc=1$,

$$\text{故有 } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = \frac{ab+bc+ac}{abc} =$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时, 等号成立.

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

18. 解: (1) 若命题 p 为真命题, 则 $x^2 > 3-2m$ 恒成立, 因此 $3-2m < 0$, 解得 $m > \frac{3}{2}$.

因此, 实数 m 的取值范围是 $\{m | m > \frac{3}{2}\}$.

(2) 若命题 q 为真命题, 则 $\Delta = (-2m)^2 - 4(m+2) > 0$, 即 $m^2 - m - 2 > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 2$.

因此, 实数 m 的取值范围是 $\{m | m < -1 \text{ 或 } m > 2\}$.

(3) 若命题 p, q 中至少有一个为真命题, 则结合 (1)(2) 得 $m \in \{m | m > \frac{3}{2}\} \cup \{m | m < -1 \text{ 或 } m > 2\}$.

$$2) = \left\{ m \mid m < -1 \text{ 或 } m > \frac{3}{2} \right\}.$$

19. 解: 设 $y = (m+1)x^2 + 2(2m+1)x + 1 - 3m$, 显然 $m+1 \neq 0$.

(1) 当 $m+1 > 0$ 时, 二次函数图象的简图, 如图 1.

则当 $x=1$ 时, $y < 0$; $x=3$ 时, $y > 0$,

$$\text{即} \begin{cases} m+1 > 0, \\ 2m+4 < 0, \\ 18m+16 > 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m > -1, \\ m < -2, \\ m > -\frac{8}{9}, \end{cases} \text{不等式组无解.}$$

(2) 当 $m+1 < 0$ 时, 二次函数图象的简图, 如图 2.

则当 $x=1$ 时, $y > 0$; 当 $x=3$ 时, $y < 0$.

$$\text{即} \begin{cases} m+1 < 0, \\ 2m+4 > 0, \\ 18m+16 < 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m < -1, \\ m > -2, \\ m < -\frac{8}{9}, \end{cases} \text{得 } -2 < m < -1.$$

由(1)(2)知, 实数 m 的取值范围是 $\{m \mid -2 < m < -1\}$.

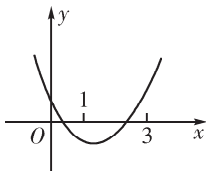


图 1

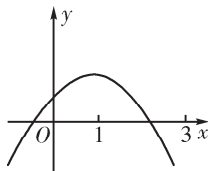


图 2

20. 解: (1) 当 $a=0$ 时, $1 \geq 0$ 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时, 要使 $ax^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 恒成立,

$$\text{则} \begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 4a \leq 0. \end{cases}$$

解得 $0 < a \leq 1$.

综上, a 的取值范围为 $\{a \mid 0 \leq a \leq 1\}$.

(2) 由 $x^2 - x - a^2 + a < 0$,

得 $(x-a)[x-(1-a)] < 0 (0 \leq a \leq 1)$.

① 当 $1-a > a$, 即 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 时,

解得 $a < x < 1-a$.

② 当 $1-a = a$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时,

原不等式化为 $(x - \frac{1}{2})^2 < 0$, 无解.

③ 当 $1-a < a$, 即 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时,

解得 $1-a < x < a$.

综上所述, 当 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 时,

解集为 $\{x \mid a < x < 1-a\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\emptyset$;

当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, 解集为 $\{x \mid 1-a < x < a\}$.

$$21. \text{解: (1)} y = \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} = \frac{920}{v + \frac{1600}{v} + 3} \leq \frac{920}{80 + 3} =$$

$$\frac{920}{83} \approx 11.08,$$

当且仅当 $v=40$ 时, 取“=”,

所以当汽车的平均速度为 40 千米/小时时, 车流量最大, 为 11.08 千辆/小时.

(2) 要使该时段内车流量至少为 10 千辆/小时,

$$\text{即} \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} \geq 10,$$

因为 $v^2 + 3v + 1600 > 0$,

所以 $v^2 - 89v + 1600 \leq 0$, 解得 $25 \leq v \leq 64$,

所以为保证在该时段内车流量至少为 10 千辆/小时, 汽车的平均速度应不低于 25 千米/小时且不高出 64 千米/小时.

$$22. \text{解: (1) 当 } a=2 \text{ 时, } \frac{y}{x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} - 4.$$

因为 $x > 0$, 所以 $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立.

所以 $\frac{y}{x} \geq -2$. 故当 $x=1$ 时, $\frac{y}{x}$ 的最小值为 -2 .

(2) 因为 $y-a = x^2 - 2ax - 1$,

所以要使得“当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $y \leq a$ 恒成立”只需“当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $x^2 - 2ax - 1 \leq 0$ 恒成立”,

不妨设 $t = x^2 - 2ax - 1$,

则只要当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $t \leq 0$ 恒成立.

$$\text{所以} \begin{cases} 0 - 0 - 1 \leq 0, \\ 4 - 4a - 1 \leq 0, \end{cases} \text{解得 } a \geq \frac{3}{4}.$$

所以 a 的取值范围是 $\{a \mid a \geq \frac{3}{4}\}$.

第三章 函数的概念与性质(A 卷)

1. D 解析: 根据题意得 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$.

2. 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2) \cup (2, +\infty)$. 故选 D.

2. C 解析: 对于 A, $y = \frac{x}{x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$, $y =$

1 的定义域为 $\mathbf{R}$, 定义域不同, 不是同一个函数; 对于 B, $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, $y = |x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 不是同一个函数; 对于 C, $f(x) = |x|$ 与

$g(x) = \sqrt{x^2}$ 定义域和对应关系相同, 故是同一个函数; 对于 D, $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, $y = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$, 解析式不同, 不是同一个函数.

3. B 解析: 函数 $y = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 是奇函数, 排除 A, C; 函数在第一象限内单调递增, 且增长越来越快. 故选 B.

4. C 解析: $\because f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x > 2, \\ f(x+3), & x \leq 2, \end{cases} \therefore f(2) = f(5) = \frac{5+1}{5-2} = 2$. 故选 C.

5. B 解析: 由函数为偶函数, 可以排除 CD; 又函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以排除 A. 故选 B.

6. A 解析: 令 $g(x) = ax^7 - bx^5 + cx^3$, 易知 $g(x)$ 为奇函数, 则 $f(x) = g(x) + 2$, $\therefore f(-5) = g(-5) + 2 = m$, $g(-5) = m - 2$, $\therefore g(5) = -g(-5) = -m + 2$, $\therefore f(5) = g(5) + 2 = 4 - m$, $\therefore f(-5) + f(5) = 4$.

7. C 解析: 令 $\frac{x}{2} - 1 = t$, 则 $x = 2t + 2$. 所以 $f(t) = 2(2t+2) + 3 = 4t + 7$, 所以 $f(x) = 4x + 7$, 所以 $f(6) = 4 \times 6 + 7 = 31$. 故选 C.

8. A 解析: 由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 可得 $f(2x-1) = f(|2x-1|) < 0 = f(\frac{1}{2})$. 又 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $|2x-1| < \frac{1}{2}$, 解得 $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$. 故选 A.

9. BD 解析: 当 $\alpha = -1$ 时, 幂函数 $y = x^{-1}$ 的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq 0\}$, A 不符合题意; 当 $\alpha = 1$ 时, 幂函数 $y = x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数, B 符合题意; 当 $\alpha = 2$ 时, 幂函数 $y = x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为偶函数, C 不符合题意; 当 $\alpha = 3$ 时, 幂函数 $y = x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数, D 符合题意.

10. BD 解析: 因为 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, 所以 $f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = f(x)$, D 正确, A 错误; $f(\frac{1}{x}) = \frac{1+(\frac{1}{x})^2}{1-(\frac{1}{x})^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = -f(x)$, B 正确; $f(-\frac{1}{x}) = \frac{1+(-\frac{1}{x})^2}{1-(-\frac{1}{x})^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = -f(x)$, C 错误. 故选 BD.

11. AC 解析: 对于 A, $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - x = -(x -$

$\frac{1}{x}) = -f(x)$, 满足“倒负”变换. 对于 B,

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + x = f(x) \neq -f(x)$, 不满足“倒负”

变换. 对于 C, 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$, $f(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x} = -x = -f(x)$; 当 $x = 1$ 时, $\frac{1}{x} = 1$,

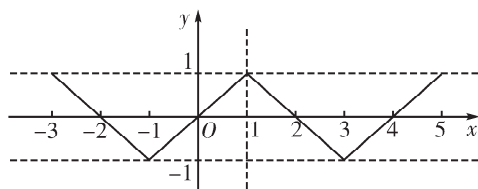
$f(\frac{1}{x}) = 0 = -f(x)$; 当 $x > 1$ 时, $0 < \frac{1}{x} < 1$,

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = -(-\frac{1}{x}) = -f(x)$, 满足“倒负”

变换. 对于 D, 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$, $f(\frac{1}{x}) =$

$\frac{1}{x} = x \neq -f(x)$, 不满足“倒负”变换.

12. ACD 解析: 因为奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = f(-x)$, 所以 $f(2+x) = -f(x)$, 所以有 $f(4+x) = -f(x+2) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 故 A 正确; 又 $f(2+x) = f(-x)$ 表示 $f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称, 结合当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 可以作出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示.



显然 $(1,0)$ 不是对称中心, B 错误; 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成图形的面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 2$, C 正确; 由图象可知, $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 因为周期为 4, 而 $2\ 020 = 4 \times 505$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2\ 019) + f(2\ 020) = 0$, D 正确.

13. -1 解析: 因为 $f(x) = \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x} = x + \frac{a}{x} + a + 1$, 所以 $f(-x) = -x + \frac{a}{-x} + a + 1$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) + f(x) = 0$, 即 $2a + 2 = 0$, 所以 $a = -1$.

14. $x(1+x)$ 解析: 因为 $x < 0$, 所以 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = (-x)(1+x)$, 又函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x) = -(-x)(1+x) = x(1+x)$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$.

15. 1 或 -1 解析: $f(x) = x^2 - x + 1$ 图象的对称轴方

程为 $x = \frac{1}{2}$. ①当 $t \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上是增函数, $\therefore f(x)_{\min} = f(t) = t^2 - t + 1$. 由 $t^2 - t + 1 = 1$, 得 $t = 1$ 或 $t = 0$ (舍去); ②当 $t + 1 \leq \frac{1}{2}$, 即 $t \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上是减函数, $\therefore f(x)_{\min} = f(t+1) = (t+1)^2 - (t+1) + 1 = t^2 + t + 1$. 由 $t^2 + t + 1 = 1$, 得 $t = -1$ 或 $t = 0$ (舍去); ③当 $t < \frac{1}{2} < t+1$, 即 $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, 此时最小值不是 1. 综上可知, $t = 1$ 或 $t = -1$.

16. 8 100 解析: 设每个小矩形垂直于墙的一边长为 a m, 则平行于墙的一边长 $b = (360 - 4a)$ m, 记场地的面积为 S m², 则 $S = ab = a(360 - 4a) = -4(a - 45)^2 + 8100$ ($0 < a < 90$), $\therefore$ 当 $a = 45$ 时, $S_{\max} = 8100$, 则最大面积为 8 100 m².

17. 解: (1) $\because f(1) = 3$, 即 $1 + m = 3$, $\therefore m = 2$.

(2) 由 (1) 知, $f(x) = x + \frac{2}{x}$,

其定义域是 $\{x | x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 关于原点对称,

又 $\because f(-x) = -x - \frac{2}{x} = -\left(x + \frac{2}{x}\right) = -f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是奇函数.

18. 解: (1) $f(2) = -2 \times 2 + 8 = 4$,

$f[f(-1)] = f(-1 + 5) = f(4) = -2 \times 4 + 8 = 0$.

(2) 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x + 5$,

若 $f(x) > 4$, 则 $x + 5 > 4$,

解得 $x > -1$, 则 $-1 < x \leq 1$.

当 $x > 1$ 时, $f(x) = -2x + 8$,

若 $f(x) > 4$, 则 $-2x + 8 > 4$,

解得 $x < 2$, 则 $1 < x < 2$.

所以不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$.

19. 解: (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 5]$ 上单调递增, 证明如下:

设 x_1, x_2 是区间 $[3, 5]$ 上的任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1 - 1}{x_1 + 1} - \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 1} = \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$.

$\because 3 \leq x_1 < x_2 \leq 5$,

$\therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0$,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 5]$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 5]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(3) = \frac{2 \times 3 - 1}{3 + 1} = \frac{5}{4}$,

$f(x)_{\max} = f(5) = \frac{2 \times 5 - 1}{5 + 1} = \frac{3}{2}$.

20. 解: (1) 易知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称,

因为 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $f(-x) = f(x)$,

即 $x^2 - 2ax - a^2 + 2a - 4 = x^2 + 2ax - a^2 + 2a - 4$,

所以当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由题意, $f(x) = x^2 + 2ax - a^2 + 2a - 4 = (x + a)^2 + (-2a^2 + 2a - 4)$,

所以 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x = -a$,

当 $-a < -2$, 即 $a > 2$ 时,

$f(x)_{\min} = f(-2) = 4 - 4a - a^2 + 2a - 4 = -a^2 - 2a$,

当 $-2 \leq -a \leq 2$, 即 $-2 \leq a \leq 2$ 时,

$f(x)_{\min} = f(-a) = -2a^2 + 2a - 4$.

当 $-a > 2$, 即 $a < -2$ 时,

$f(x)_{\min} = f(2) = 4 + 4a - a^2 + 2a - 4 = -a^2 + 6a$,

所以 $g(a) = \begin{cases} -a^2 + 6a, & a < -2, \\ -2a^2 + 2a - 4, & -2 \leq a \leq 2, \\ -a^2 - 2a, & a > 2. \end{cases}$

21. 解: (1) $f(x) = (x - 4 - m)(14 - x) = -x^2 + (18 + m)x - 14(4 + m)$, 定义域为 $[9, 10]$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = -\left(x - \frac{m+18}{2}\right)^2 + \left(\frac{10-m}{2}\right)^2$.

当 $1 \leq m \leq 2$ 时, $9 < \frac{m+18}{2} \leq 10$,

$f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{m+18}{2}\right) = \left(\frac{10-m}{2}\right)^2$.

当 $2 < m \leq 3$ 时, $\frac{m+18}{2} > 10$,

$f(x)$ 的最大值为 $f(10) = 4(6 - m) = 24 - 4m$.

综上可知, 当 $1 \leq m \leq 2$, 售价为 $\frac{m+18}{2}$ 元时, 最大月

利润为 $\left(\frac{10-m}{2}\right)^2$ 千元. 当 $2 < m \leq 3$, 售价为 10 元

时, 最大月利润为 $(24 - 4m)$ 千元.

22. 解: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = -x|x - 2| + 1 =$

$\begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 2, \\ -x^2 + 2x + 1, & x \geq 2, \end{cases}$

所以 $g(x) = f(x) - x = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & x < 2, \\ -x^2 + x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$

当 $x < 2$ 时, $g(x) = x^2 - 3x + 1$, 其图象开口向上, 对称轴方程为 $x = \frac{3}{2}$,

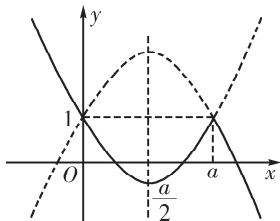
所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上单调递减, 在 $(\frac{3}{2}, 2)$ 上单调递增.

当 $x \geq 2$ 时, $g(x) = -x^2 + x + 1$, 其图象开口向下, 对称轴方程为 $x = \frac{1}{2}$,

所以 $g(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 和 $[2, +\infty)$, 单调递增区间为 $(\frac{3}{2}, 2)$.

(2) 由题知, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + 1, & x \geq a, \\ x^2 - ax + 1, & x < a, \end{cases}$ 作出草图如图所示(实线部分).



因为 $a > 1$, 所以 $f(0) = f(a) = 1$, $f(\frac{a}{2}) = 1 - \frac{a^2}{4}$,

所以可判断 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值在 $f(1)$, $f(3)$, $f(a)$ 中取得.

当 $1 < a \leq 3$ 时, $f(x)_{\max} = f(a) = 1$.

若 $3 < a < 4$, 则 $f(x)_{\max} = f(3) = 10 - 3a$.

若 $a \geq 4$, 则 $f(x)_{\max} = f(1) = 2 - a$.

综上所述, 在区间 $[1, 3]$ 上,

$$f(x)_{\max} = \begin{cases} 1, & 1 < a \leq 3, \\ 10 - 3a, & 3 < a < 4, \\ 2 - a, & a \geq 4. \end{cases}$$

第三章 函数的概念与性质(B卷)

1. C 解析: 由题意得 $\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 解得 $x < 2$ 且 $x \neq -1$, 所以 $M = \{x | x < 2 \text{ 且 } x \neq -1\}$, 故 $\complement_{\mathbf{R}} M = \{x | x \geq 2 \text{ 或 } x = -1\}$. 故选 C.

2. A 解析: 因为 $\begin{cases} |x+3| - 3 \neq 0, \\ 1-x^2 \geq 0, \end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x | -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 1\}$, 关于原点对称, $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, 又 $f(-x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} =$

$-f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数. 故选 A.

3. B 解析: 函数 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2$ 的图象开口向上, 对称轴为 $x = a-1$, 要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 则需满足 $a-1 \geq 4$, 即 $a \geq 5$. 故选 B.

4. B 解析: 设 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$, 则 $f[f(x)] = f(kx+b) = k(kx+b) + b = k^2x + kb + b = 4x - 3$, 因此 $\begin{cases} k^2 = 4, \\ kb + b = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = -2, \\ b = 3. \end{cases}$ 所以 $f(x) = 2x - 1$ 或 $f(x) = -2x + 3$. 当 $f(x) = 2x - 1$ 时, $f(1) = 1$; 当 $f(x) = -2x + 3$ 时, $f(1) = 1$. 综上, $f(1) = 1$. 故选 B.

5. C 函数 $f(x) = |x| \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & x < 0, \end{cases}$ 易知 C 正确. 故选 C.

6. C 解析: 因为函数 $f(x)$ 是偶函数, $f(-2) = 1$, 所以 $f(2) = 1$. 因为 $f(x-2) \leq 1$, 所以 $-2 \leq x-2 \leq 2$, 解得 $0 \leq x \leq 4$. 故选 C.

7. D 解析: $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} (a-3)x+5, & x \leq 1, \\ \frac{2a}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, $\therefore x \leq 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 即 $a-3 < 0$, $\therefore a < 3$. $\because x > 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 即 $a > 0$. 又 $(a-3) \times 1 + 5 \geq \frac{2a}{1}$, $\therefore a \leq 2$, 则 $0 < a \leq 2$. 故选 D.

8. A 解析: 因为函数 $y = f(x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 又 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty) (x_1 \neq x_2)$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减. 因为 $f(a-1) \geq f(2a)$, 所以 $|a-1-1| \geq |2a-1|$, 解得 $-1 \leq a \leq 1$. 故选 A.

9. AC 解析: 由偶函数图象关于 y 轴对称, 可知偶函数在原点两侧的对称区间上单调性相反, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为减函数, 且最小值为 2.

10. BC 解析: 关于函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 的定义域为 $(-2, 3)$, 所以函数 $f(|x|)$ 满足 $-2 < |x| < 3$, 所以 $-3 < x < 3$. $f(|x|) = -x^2 + 2|x| + 1 = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & 0 \leq x < 3, \\ -x^2 - 2x + 1, & -3 < x < 0, \end{cases}$ 由其图象和性质得函数 $f(|x|)$ 的单调递增区间是 $(-3, -1)$ 和 $(0, 1)$. 故选 BC.

11. AC 解析: $f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$, 当 m, n 是奇函数,

幂函数 $f(x)$ 是奇函数, 故 A 正确; 当 m 是偶数, n 是奇数时, 幂函数 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时无意义, 故 B 错误; 当 m 是奇数, n 是偶数时, 幂函数 $f(x)$ 是偶函数, 故 C 正确; $0 < \frac{m}{n} < 1$ 时, 幂函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 错误.

12. BD 解析: 因为 $y = x^2 + 1$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数, 所以函数 $y = x^2 + 1$ 不是闭函数, A 错误; $y = -x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 由题意, 设

$$[a, b] \subseteq \mathbf{R}, \text{ 则 } \begin{cases} b = -a^3, \\ a = -b^3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 1. \end{cases} \text{ 因此存在}$$

区间 $[-1, 1]$, 使 $y = -x^3$ 在 $[-1, 1]$ 上的值域为

$$[-1, 1], \text{ B 正确; } y = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \text{ 在 } (-\infty, -1)$$

上单调递增, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数在定义域上不单调递增或单调递减, 从而该函数不是闭函数, C 错误; $y = k + \sqrt{x+2}$ 在定义域 $[-2, +\infty)$ 上单调递增, 若 $y = k + \sqrt{x+2}$ 是闭函数, 则存在区间 $[a, b]$, 使函数 $f(x)$ 的值域为

$$[a, b], \text{ 即 } \begin{cases} a = k + \sqrt{a+2}, \\ b = k + \sqrt{b+2}, \end{cases} \text{ 所以 } a, b \text{ 为方程 } x =$$

$k + \sqrt{x+2}$ 的两个实数根, 即方程 $x^2 - (2k + 1)x + k^2 - 2 = 0 (x \geq -2, x \geq k)$ 有两个不等的实数

$$\text{根. 当 } k \leq -2 \text{ 时, 有 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ f(-2) \geq 0, \\ \frac{2k+1}{2} > -2, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{9}{4} <$$

$$k \leq -2. \text{ 当 } k > -2 \text{ 时, 有 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ f(k) \geq 0, \\ \frac{2k+1}{2} > k, \end{cases} \text{ 此时无解. 综}$$

上所述, $k \in (-\frac{9}{4}, -2]$, 因此 D 正确. 故选 BD.

13. -15 解析: 由 $\forall x, f(x) = f(2-x)$ 可知

$$\begin{cases} f(0) = f(2), \\ f(-1) = f(3), \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 0 = 8(4+2a+b), \\ -(1-a+b) = 15(9+3a+b), \end{cases}$$

$$\text{解之得 } \begin{cases} a = -6, \\ b = 8. \end{cases} \text{ 则 } f(x) = (x^2 + 2x)(x^2 - 6x +$$

$8)$, 满足 $f(x) = f(2-x)$, 故 $f(3) = (3^2 + 2 \times 3) \cdot (3^2 - 6 \times 3 + 8) = -15$.

14. $[-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ 解析: 由题知, $f(-x) = -x^3 +$

$bx^2 - x = -f(x) = -x^3 - bx^2 - x$, 所以 $2bx^2 = 0$ 恒成立, 即 $b = 0$. 又因为奇函数的定义域关于原点对称, 所以 $1 - 3a + (a + 1) = 0$, 解得 $a = 1$, 因此 $f(x) = x^3 + x, x \in [-2, 2]$, 易知 $y = x^3$ 单调递增, $y = x$ 单调递增, 则函数 $f(x)$ 单调递增, 故 $f(3x+b) + f(x+a) \geq 0$ 等价于 $f(3x) + f(x+1) \geq 0$ 等价于 $f(3x) \geq -f(x+1) = f[-(x+1)]$. 即

$$\begin{cases} 3x \geq -(x+1), \\ -2 \leq 3x \leq 2, \\ -2 \leq x+1 \leq 2, \end{cases} \text{ 解得 } x \in [-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}].$$

15. $\frac{1}{64}$ 解析: 由 $y = f(x + \frac{1}{4})$ 的图象关于原点对

称, 得 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{4}, 0)$ 对称. 由 $y =$

$f(x + \frac{1}{2})$ 的图象关于 y 轴对称, 得 $y = f(x)$ 的图

象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, $\therefore \frac{T}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, 解得

$T = 1$, 即 $f(x)$ 的周期为 1, $\therefore f(\frac{13}{8}) =$

$$f(1 + \frac{5}{8}) = f(\frac{5}{8}) = f(\frac{3}{8}) = \frac{1}{64}.$$

16. (2, 4) 解析: 由 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 可得,

$$f(x-2) + f(x+4) = f[(x+4)(x-2)]. \text{ 又}$$

$$f(2) = -2, \text{ 则 } f(16) = f(4) + f(4) = 2f(2) +$$

$$2f(2) = 4f(2) = -8. \text{ 设任意 } x_1, x_2 > 0, \text{ 且 } x_1 <$$

x_2 , 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$. 又当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$, 则 $f(x_2) -$

$$f(x_1) = f(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}) - f(x_1) = [f(x_1) +$$

$$f(\frac{x_2}{x_1})] - f(x_1) = f(\frac{x_2}{x_1}) < 0, \text{ 即 } f(x_1) >$$

$f(x_2)$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数. 则不

等式 $f(x-2) + f(x+4) + 8 > 0$ 等价于

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x+4 > 0, \\ (x-2)(x+4) < 16, \end{cases} \text{ 解之得 } 2 < x < 4.$$

17. 解: (1) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

由函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$,

可知 $f(x) = f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) = x^2 + 4x$.

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 0, \\ x^2 + 4x, & x < 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-2, 0), (2, +\infty)$.

(2) 当 $x \in [1, 4]$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$.

$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,在 $[2,4]$ 上单调递增,
 $f(1)=-3, f(2)=-4, f(4)=0$.
 故 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的值域为 $[-4,0]$.

18. 解: (1) 因为 $a > 0$, 二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$,

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数,在 $[1,4]$ 上为增函数,

从而得 $\begin{cases} f(1)=b-a=1, \\ f(4)=8a+b=10, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$

(2) 由(1), 得 $f(x)=x^2-2x+2$,

则 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=x+\frac{2}{x}-2$,

设任意的 $x_1, x_2 \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

则 $x_2 - x_1 > 0$,

因为 $g(x_2) - g(x_1) = \left(x_2 + \frac{2}{x_2} - 2\right) - \left(x_1 + \frac{2}{x_1} - 2\right) = (x_2 - x_1) + \left(\frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_1}\right) = (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{2}{x_1 x_2}\right) = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 2)}{x_1 x_2}$,

因为 $\sqrt{2} < x_1 < x_2, x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 > 2$,

所以 $x_1 x_2 - 2 > 0, g(x_2) - g(x_1) > 0$,

所以 $g(x_2) > g(x_1)$,

所以 $g(x)=x+\frac{2}{x}-2$ 是 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上的增函数.

19. 解: (1) 设 $f(x)=k_1 x+b_1, 0 \leq x \leq 20$,

由 $\begin{cases} 4k_1+b_1=34, \\ 12k_1+b_1=42, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1=1, \\ b_1=30, \end{cases}$

则 $f(x)=x+30(1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N})$.

设 $f(x)=k_2 x+b_2, 21 \leq x \leq 30$,

由 $\begin{cases} 20k_2+b_2=50, \\ 28k_2+b_2=34, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_2=-2, \\ b_2=90, \end{cases}$

则 $f(x)=-2x+90(21 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N})$.

综上, $f(x)=\begin{cases} x+30, & 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N}, \\ -2x+90, & 21 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}. \end{cases}$

(2) 设日销售额为 $h(x)=f(x)g(x)$.

当 $1 \leq x \leq 20$ 时,

$h(x)=(x+30)(-x+50)=-x(x-10)^2+1\,600 \leq 1\,600$ (当且仅当 $x=10$ 时等号成立).

当 $21 \leq x \leq 30$ 时,

$h(x)=(-2x+90)(-x+50)=2\left(x-\frac{95}{2}\right)^2-$

$\frac{25}{2} \leq 1\,392$ (当且仅当 $x=21$ 时等号成立).

因为 $1\,600 > 1\,392$, 故该产品投放市场第 10 天, 日销售额最高, 最高为 1 600 元.

20. 解: (1) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $f(0)=0$, 即 $n=0$, 所以 $f(x)=x|x-m|$,

又 $f(-1)=-f(1)$, 所以 $|1-m|=|1+m|$,

解得 $m=0$,

此时 $f(x)=x|x|$,

对 $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x)=-x|x|=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 故 $m=0$.

(2) $f(x)=x|x-1|+n=\begin{cases} -x^2+x+n, & x \leq 1, \\ x^2-x+n, & x > 1, \end{cases}$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $[1, n]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减,

其中 $f\left(\frac{1}{2}\right)=n+\frac{1}{4}, f(n)=n^2, f(n)-f\left(\frac{1}{2}\right)=$

$n^2-n-\frac{1}{4}=\left(n-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(n-\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$,

令 $n^2 > \frac{1}{4} + n$ 得 $n > \frac{1+\sqrt{2}}{2}$,

所以当 $n > \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(n) > f\left(\frac{1}{2}\right)$,

$f(x)_{\max}=n^2$.

当 $1 < n \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$,

所以 $f(x)_{\max}=n+\frac{1}{4}$,

$f(x)_{\max}=\begin{cases} \frac{1}{4}+n, & 1 < n \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \\ n^2, & n > \frac{1+\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

21. 解: (1) $\because f(-1)=0, \therefore b=a+1$.

即 $f(x)=ax^2+(a+1)x+1$,

因为对任意实数 $x, f(x) \geq 0$ 恒成立,

则 $a > 0$ 且 $\Delta=(a+1)^2-4a=(a-1)^2 \leq 0$,

$\therefore a=1$.

$\therefore f(x)=x^2+2x+1$.

(2) 因为 $g(x)=|f(x)-kx|=|x^2+(2-k)x+1|$,

设 $h(x)=x^2+(2-k)x+1$, 要使 $g(x)$ 在

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调, 只需要 $\begin{cases} \frac{k-2}{2} \geq \frac{1}{2}, \\ h\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} \frac{k-2}{2} \leq -\frac{1}{2}, \\ h\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{k-2}{2} \leq -\frac{1}{2}, \\ h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0. \end{cases}$

解得 $3 \leq k \leq \frac{9}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq k \leq 1$,

所以实数 k 的取值范围是 $\left[3, \frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

22. 解: (1) 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(-x) = -f(x)$,

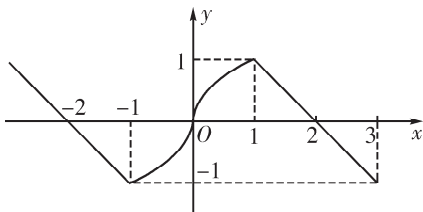
当 $x \in [-1, 0)$ 时, $-x \in (0, 1]$, $f(-x) = \sqrt{-x} = -f(x)$, 所以 $f(x) = -\sqrt{-x}$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $-x \in (1, +\infty)$, $f(-x) = x+2 = -f(x)$, 所以 $f(x) = -x-2$.

所以 $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -1 \leq x < 0, \\ -x-2, & x < -1. \end{cases}$

(2) 由(1), 得 $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -1, \\ -\sqrt{-x}, & -1 \leq x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x+2, & x > 1. \end{cases}$

画出 $f(x)$ 的图象如图所示.



$f(3) = -3+2 = -1$, $f(-1) = -1$,

由图象可得, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(m, m+5)$ 上有最小值,

则 $\begin{cases} -1 < m+5 \leq 3, \\ m < -1, \end{cases}$ 解得 $-6 < m \leq -2$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-6, -2]$.

第四章 指数函数与对数函数(A卷)

1. D 解析: 原式 $= 1 - (1 - 2^2) \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 - (-3) \times \frac{4}{9} = \frac{7}{3}$. 故选 D.

2. A 解析: $\because f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 4^{\frac{1}{2}} - 1 = 1$,
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$, $\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 = 3$.
故选 A.

3. C 解析: 由指数函数、对数函数、幂函数的增长率比较, 指数函数增长最快, 对数函数增长最慢, 由题中表格可知, y_1 是幂函数, y_2 是指数函数, y_3 是对数函数. 故选 C.

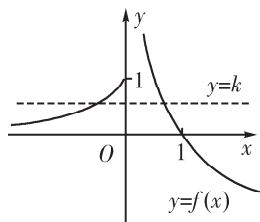
4. A 解析: 由 $a = \lg 0.3 < \lg 1 = 0$, $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$,

$0 < c = 0.8^{0.6} < 0.8^0 = 1$, 得 $a < c < b$. 故选 A.

5. C 解析: 由指数函数和对数函数的单调性知, 函数 $f(x) = a^x$ 与 $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $(0, +\infty)$ 上单调性相同, 可排除 B, D. 再由关系式 $f(3) \cdot g(3) < 0$ 可排除 A. 故选 C.

6. C 解析: 开区间 $(2, 3)$ 的区间长度等于 1, 每经过一次操作, 区间长度变为原来的一半, 经过 n 次操作后, 区间长度变为 $\frac{1}{2^n}$, 故有 $\frac{1}{2^n} \leq 0.1$, $\therefore n \geq 4$, $\therefore$ 至少需要经过 4 次二分后精确度达到 0.1. 故选 C.

7. D 解析: 作出函数 $f(x)$ 的图象, 由图象知, 当 $0 < k \leq 1$ 时, $y=k$ 与 $y=f(x)$ 的图象有两个交点, 此时方程 $f(x)=k$ 有两个不相等的实数根, 所以 $0 < k \leq 1$, 故选 D.



8. B 解析: 令 $g(x) = ax^2 - 2x + 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则

$g(x) > 0$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上恒成立, $\therefore \begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{a}{9} - \frac{2}{3} + 1 > 0 \end{cases}$

或 $\begin{cases} \frac{1}{a} \geq 3, \\ 9a - 6 + 1 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{1}{3} < \frac{1}{a} < 3, \\ \frac{1}{a} - \frac{2}{a} + 1 > 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$.

$\therefore$ 外层函数在定义域内单调递增, 若函数 $f(x) = \log_a(ax^2 - 2x + 1)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上是增函数, 则内层函数

$g(x) = ax^2 - 2x + 1$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上是增函数,

$\therefore \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3}$, 且 $a > 1$, 解得 $a \geq 3$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[3, +\infty)$. 故选 B.

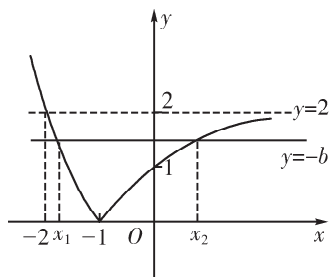
9. CD 解析: 选项 A 中, $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数, 不符合题目要求; 选项 B 中, $y = e^{-x}$ 是非奇非偶函数, 不符合题目要求; 选项 C 中, $y = -x^2 + 1$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题目要求; 选项 D 中, $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上, 函数解析式为 $y = \log_{\frac{1}{2}}x$, 是减函数, 符合题目要求. 故选 CD.

10. AD 解析: 由 $10^a = 4$, $10^b = 25$, 得 $a = \lg 4$, $b = \lg 25$, 则 $a + b = \lg 4 + \lg 25 = \lg 100 = 2$, A 正确; $ab = \lg 4 \cdot \lg 25 = 4 \lg 2 \cdot \lg 5 \neq \lg 100$, B 错误; $b -$

$a = \lg 25 - \lg 4 = \lg \frac{25}{4}$, C 错误; $\because \lg 10 = 1 > \lg \frac{25}{4} > \lg 6$, $\therefore b - a > \lg 6$, D 正确. 故选 AD.

11. ABD 解析: 因为函数 $y = a^{t-1}$ 的图象经过 $(2, 2)$, 所以 $2 = a^{2-1}$, 解得 $a = 2$. 当 $t = 0$ 时, $y = 2^{0-1} = \frac{1}{2}$, 故 A 正确; 当 $t = 8$ 时, $y = 2^{8-1} = 2^7 = 128 > 60$, 故 B 正确; 当 $t = 1$ 时, $y = 1$, 增加 0.5 m^2 . 当 $t = 2$ 时, $y = 2$, 增加 1 m^2 , 故浮草每月增加的面积不相等, 故 C 错误; 由 $2^{t_1-1} = 10$, 得 $t_1 = \log_2 10 + 1$. 同理 $t_2 = \log_2 20 + 1$, $t_3 = \log_2 30 + 1$, 所以 $2t_2 = 2\log_2 20 + 2 = \log_2 400 + 2 > \log_2 300 + 2 = t_1 + t_3$, 所以 $2t_2 > t_1 + t_3$, 故 D 正确. 故选 ABD.

12. AC 解析: 由题意, 得 $\left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 2 \right| = -b$ 有两个不相等的实数根, 作出函数 $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x - 2 \right|$ 的图象, 如图所示.



由图可得 $-2 < x_1 < -1$, $x_2 > -1$, 且 $\left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x_1} - 2 \right| = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x_2} - 2 \right|$, 则 $\left(\frac{1}{2} \right)^{x_1} - 2 = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{x_2}$, 所以 $4 = \left(\frac{1}{2} \right)^{x_1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{x_2} > 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^{x_1+x_2}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}$, 所以 $\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \left(\frac{1}{2} \right)^{-1}$, 所以 $\frac{x_1+x_2}{2} > -1$, 所以 $x_1+x_2 > -2$. 故选 AC.

13. (1, 2) 解析: 函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 $(0, 1)$, 令 $x = 1$, 得 $f(1) = 2$, 即函数 $f(x)$ 的图象恒过定点 $(1, 2)$.

14. $(-\infty, -\frac{2}{3})$ 解析: 易知函数 $f(x) = x - \left(\frac{1}{3} \right)^x + a$ 在定义域上单调递增, 又 $\because$ 函数 $f(x) = x - \left(\frac{1}{3} \right)^x + a$ 的零点在区间 $(1, +\infty)$ 上, $\therefore f(1) = \frac{2}{3} + a < 0$, $\therefore a < -\frac{2}{3}$.

15. $\left[\frac{5}{4}, 5 \right)$ 解析: $\because f(x) = \begin{cases} (5-a)x-3a, & x < 1, \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 即 $\begin{cases} 5-a > 0, \\ a > 1, \\ 5-a-3a \leq \log_a 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{5}{4} \leq a < 5$, 即 $a \in \left[\frac{5}{4}, 5 \right)$.

16. $[-1, 1)$ 解析: 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的值域为 $(-\infty, 0)$. 由于函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 且 $f(1) = -a-1 \leq 0$, 所以 $\begin{cases} a-1 < 0, \\ -a-1 \leq 0. \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a < 1$. 因此, 实数 a 的取值范围是 $[-1, 1)$.

17. 解: (1) $0.064^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{8} \right)^0 + 16^{\frac{3}{4}} + 0.25^{\frac{1}{2}}$
 $= 0.4^{3 \times (-\frac{1}{3})} - 1 + 2^{4 \times \frac{3}{4}} + 0.5^{2 \times \frac{1}{2}}$
 $= 2.5 - 1 + 8 + 0.5$
 $= 10$.
 (2) $\frac{1}{2} \lg 25 + \lg 2 + \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_3 2} - \log_2 9 \times \log_3 2$
 $= \lg 5 + \lg 2 + 3^{-\log_3 2} - 2 \times \log_2 3 \times \log_3 2$
 $= 1 + \frac{1}{2} - 2$
 $= -\frac{1}{2}$.

18. 解: (1) 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且为奇函数, 所以 $f(0) = \frac{1-a}{2} = 0$, 解得 $a = 1$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2e^x}$,

因为 $y = e^x$, $y = -\frac{1}{2e^x}$ 都在 $\mathbf{R}$ 上递增,

所以函数 $f(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $f(x)$ 为奇函数, 得 $f(\lg x) < -f(-1) = f(1)$, 所以 $\lg x < 1$, 解得 $0 < x < 10$, 即实数 x 的取值范围为 $(0, 10)$.

19. 解: (1) 要使函数 $f(x)$ 有意义, 则 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$

解得 $-3 < x < 1$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | -3 < x < 1\}$.

(2) $f(x) = \log_a(1-x) + \log_a(x+3) = \log_a(-x^2 - 2x + 3) = \log_a[-(x+1)^2 + 4]$.

因为 $-3 < x < 1$, 所以 $0 < -(x+1)^2 + 4 \leq 4$,

因为 $0 < a < 1$, 所以 $\log_a [-(x+1)^2 + 4] \geq \log_a 4$,
即函数 $f(x)$ 的最小值为 $\log_a 4$,
所以 $\log_a 4 = -4$,

所以 $a^{-4} = 4$, 所以 $a = 4^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即实数 a 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 解: (1) 第 1 年投入的资金数为 $100 \times (1 + 10\%)$ 万元, 第 2 年投入的资金数为 $100 \times (1 + 10\%) + 100 \times (1 + 10\%) 10\% = 100 \times (1 + 10\%)^2$ 万元, 第 x 年 (2018 年为第 1 年) 该企业投入的资金数 y (单位: 万元) 与 x 的函数关系式为 $y = 100(1 + 10\%)^x$,

其定义域为 $\{x \in \mathbf{N}^* \mid x \leq 10\}$.

(2) 令 $100(1 + 10\%)^x > 200$,

可得 $1.1^x > 2$, 即 $x > \frac{\lg 2}{\lg 1.1} \approx \frac{0.301}{0.041} \approx 7.3$.

即企业从第 8 年开始 (2018 年为第 1 年), 每年投入的资金数将超过 200 万元.

21. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \log_2 (4^x + 2^x + 2)$.

由 $f(x) = 3$, 得 $4^x + 2^x + 2 = 2^3$,

所以 $4^x + 2^x - 6 = 0$,

因此 $(2^x + 3)(2^x - 2) = 0$, 解得 $x = 1$.

所以方程 $f(x) = 3$ 的解集为 $\{1\}$.

(2) 因为方程 $\log_2 (4^x + a \cdot 2^x + a + 1) = x$ 有两个不同的实数根,

即 $4^x + a \cdot 2^x + a + 1 = 2^x$ 有两个不同的实数根.

设 $t = 2^x$, 则 $t^2 + (a-1)t + a + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的解,

令 $g(t) = t^2 + (a-1)t + a + 1$,

$$\text{则} \begin{cases} g(0) > 0, \\ -\frac{a-1}{2} > 0, \\ \Delta = (a-1)^2 - 4(a+1) > 0, \end{cases}$$

解得 $-1 < a < 3 - 2\sqrt{3}$.

故实数 a 的取值范围为 $(-1, 3 - 2\sqrt{3})$.

22. 解: (1) 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(0) = 0$, 即 $\frac{-1+b}{2+a} = 0$, 解得 $b = 1$.

从而有 $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + a}$.

由 $f(1) = -f(-1)$, 得 $\frac{-2+1}{4+a} = -\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$,

解得 $a = 2$,

经检验, 当 $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + 2}$ 时, $f(-x) = -f(x)$,

满足题意,

所以 $a = 2, b = 1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + 2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^x + 1}$.

易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

又因为 $f(x)$ 是奇函数, $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$,

所以 $f(t^2 - 2t) < -f(2t^2 - k) = f(-2t^2 + k)$.

所以 $t^2 - 2t > -2t^2 + k$,

即对任意 $t \in \mathbf{R}$, $3t^2 - 2t - k > 0$ 恒成立,

所以 $\Delta = 4 + 12k < 0$, 解得 $k < -\frac{1}{3}$.

第四章 指数函数与对数函数(B卷)

1. D 解析: 集合 M 表示函数 $y = 2^x$ 的值域, 为 $(0, +\infty)$, 即 $M = \{y \mid y = 2^x\} = \{y \mid y > 0\}$. 集合 P 表示

函数 $y = \log_{2x-1} \sqrt{3x-2}$ 的定义域, 则

$$\begin{cases} 3x-2 > 0, \\ 2x-1 > 0, \text{解得 } x > \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 1, \text{即 } P = \{x \mid y = \\ 2x-1 \neq 1, \end{cases}$$

$\log_{2x-1} \sqrt{3x-2}\} = \{x \mid x > \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 1\}$. 所以 $M \cap$

$P = (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$. 故选 D.

2. C 解析: $\because f(x) = a^{x-2} + 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 恒过定点 $(2, 2)$, $\therefore m = n = 2$, $\therefore g(x) = 2 - 2^x$, $\therefore g(x)$ 为减函数, 且过点 $(0, 1)$, $\therefore g(x)$ 的图象不经过第三象限. 故选 C.

3. B 解析: 依题意, 得 $\log_m x = \frac{1}{24}$, $\log_m y = \frac{1}{40}$,

$$\log_m (xyz) = \frac{1}{12} \Rightarrow \log_m x + \log_m y + \log_m z = \frac{1}{12}.$$

$\therefore \log_m z = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \frac{1}{40} = \frac{1}{60}$. 因此 $\log_m m = 60$. 故

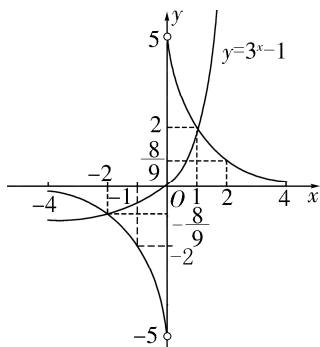
选 B.

4. A 解析: 由 $x^2 - x - 2 \geq 0$, 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 2$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$, 易知 $\mu = \sqrt{x^2 - x - 2}$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, $y = (\frac{1}{2})^\mu$ 单调递减. 由复合函数单调性可知 $f(x) = (\frac{1}{2})^{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增. 故选 A.

5. B 解析: 当 $x = 2$ 时, $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} > 0$, 函数有意义,

可排除 A; 当 $x = -2$ 时, $x - \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} < 0$, 函数无意义, 可排除 D; 当 $x > 1$ 时, 函数 $y = x - \frac{1}{x}$ 单调递增, 结合对数函数的单调性可得函数 $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 单调递增, 可排除 C. 故选 B.

6. B 解析: 如图所示, 根据函数的奇偶性画出 $f(x)$ 的图象和 $y = 3^x - 1$ 的图象, 两函数图象的交点为 $(1, 2), (-2, -\frac{8}{9})$.



由图易知 $f(x) \geq 3^x - 1$ 的解集为 $[-4, -2] \cup (0, 1]$. 故选 B.

7. C 解析: 若对任意 $x_1 \in [\frac{1}{2}, 3]$, 存在 $x_2 \in [2, 3]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$. $\because f(x) = |x-1| + |x+3| = \begin{cases} 4, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 2x+2, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases} \therefore f(x)_{\min} =$

4. $\because$ 函数 $g(x) = 2^x + a$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数, $\therefore$ 当 $x = 2$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最小值, 即 $g(x)_{\min} = g(2) = a + 4$, $\therefore a + 4 \leq 4$, 解得 $a \leq 0$. 故选 C.

8. B 解析: 易知 $f(x) = \log_2 \frac{4^x + 1}{2^x}$, 令 $3x - 1 = t$, $\therefore$ 不等式 $f(3x - 1) + 1 < \log_2 5$ 转化为 $f(t) + 1 < \log_2 5$, $\log_2 \frac{4^t + 1}{2^t} < \log_2 5 - 1 = \log_2 \frac{5}{2}$, $\therefore \frac{4^t + 1}{2^t} < \frac{5}{2}$, 即 $(2^t)^2 - \frac{5}{2} \cdot 2^t + 1 < 0$, $(2^t - 2)(2^t - \frac{1}{2}) < 0$. $\therefore \frac{1}{2} < 2^t < 2$, $\therefore -1 < t < 1$, $\therefore -1 < 3x - 1 < 1$, $0 < x < \frac{2}{3}$. 故选 B.

9. BC 解析: A 选项: $y = c^x$ 为单调递减函数, 所以 $c^a < c^b$; B 选项: $y = \log_a x$ 与 $y = \log_b x$, 当 $x > 1$ 时, $0 < \log_a x < \log_b x$, 当 $0 < x < 1$ 时, $0 > \log_a x > \log_b x$, 所以 $\log_a c > \log_b c$; C 选项: $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 在 $x > 1$ 时 $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$, 而 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x > 1$ 时 $x^{\frac{1}{3}} > 1$, 所以

$\log_{\frac{1}{3}} a < a^{\frac{1}{3}}$; D 选项: $y = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x > 0$ 上单调递增, 所以 $a^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{2}{3}}$. 故选 BC.

10. AC 解析: 对于选项 A, $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 定义域为

$\mathbf{R}$, 则 $f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -f(x)$, 则 $f(x)$

是奇函数, 图象关于原点对称; 对于选项 B, 计算

$$f(1) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}, f(-1) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3} \neq$$

$f(1)$, 故 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称; 对于选项

C, $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{1 + 2^x}$, 令 $1 + 2^x = t$, $t \in$

$(1, +\infty)$, $y = f(x) = 1 - \frac{2}{t}$, 易知 $1 - \frac{2}{t} \in (-1, 1)$, 故 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$; 对于选项 D,

$f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{1 + 2^x}$, 令 $1 + 2^x = t$, $t \in (1,$

$+\infty)$, $y = f(x) = 1 - \frac{2}{t}$, 因为函数 $t = 1 + 2^x$ 在 $\mathbf{R}$

上单调递增, 且 $y = 1 - \frac{2}{t}$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调

递增, 根据复合函数的单调性, 可知 $f(x) = 1 -$

$\frac{2}{1 + 2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \neq$

x_2 , $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 不成立. 故选 AC.

11. AB 解析: $\because f(x) = \log_a(x+1)$, $g(x) = \log_a(1-x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), $\therefore f(x) + g(x) = \log_a(x+1) + \log_a(1-x)$. 由 $x+1 > 0$ 且 $1-x > 0$, 得 $-1 < x < 1$. $\therefore f(x) + g(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 故 A 正确; $\because f(-x) + g(-x) = \log_a(-x+1) + \log_a(1+x) = f(x) + g(x)$, 且 $f(x) + g(x)$ 的定义域关于原点对称, $\therefore$ 函数 $f(x) + g(x)$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 故 B 正确; 易知 $f(x) + g(x) = \log_a(1-x^2)$, $-1 < x < 1$, $y = 1 - x^2$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减, 由复合函数的单调性可知, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x) + g(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 最小值为 $f(0) + g(0) = \log_a(1-0) = 0$. 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) + g(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减, 无最小值, 故 C 错误; $f(x) - g(x) = \log_a(x+1) - \log_a(1-x)$. 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x) = \log_a(x+1)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $g(x) = \log_a(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增. $\therefore$ 函数 $f(x) - g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减. 当 $a > 1$ 时, $f(x) = \log_a(x+1)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $g(x) = \log_a(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore$ 函数 $f(x) -$

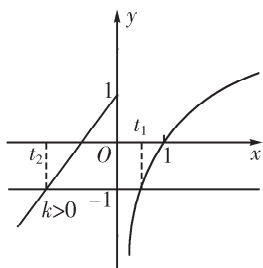
$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,故D错误. 故选AB.

12. CD 解析:由 $y=f[f(x)]+1=0$, 得 $f[f(x)]=-1$. 设 $f(x)=t$, 则方程 $f[f(x)]=-1 \Leftrightarrow f(t)=-1$.

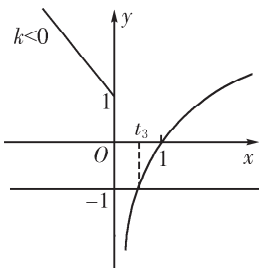
①若 $k>0$, 作出函数 $f(x)$ 的图象如图①.

$\therefore$ 此时方程 $f(t)=-1$ 有两个根, 其中 $t_2<0, 0<t_1<1$. 由 $f(x)=t_2<0$, 知此时 x 有 2 个解. 由 $f(x)=t_1 \in (0,1)$, 知此时 x 有 2 个解. 所以共有 4 个解, 即函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 4 个零点.

②若 $k<0$, 作出函数 $f(x)$ 的图象如图②. $\therefore$ 此时方程 $f(t)=-1$ 有一个根 t_3 , 且 $0<t_3<1$. 由 $f(x)=t_3 \in (0,1)$, 知此时 x 只有 1 个解, 即函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 1 个零点. 故选 CD.



图①



图②

13. $(-8, -6]$ 解析:令 $g(x)=3x^2-ax+5$, 其图象的对称轴为直线 $x=\frac{a}{6}$. 依题意, 有

$$\begin{cases} \frac{a}{6} \leq -1, \\ g(-1) > 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a \leq -6, \\ a > -8. \end{cases} \quad \text{故 } a \in (-8, -6].$$

14. $[4, 8)$ 解析: $\because$ 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$$\therefore \begin{cases} a > 1, \\ 4 - \frac{a}{2} > 0, \\ a \geq 4 - \frac{a}{2} + 2, \end{cases} \quad \text{解得 } 4 \leq a < 8. \text{ 故实数 } a \text{ 的取值}$$

范围为 $[4, 8)$.

15. 7 048 解析: $\because$ 样本中碳 14 的质量 N 随时间 t (单位:年) 的衰变规律满足 $N=N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$, 由于遗址文物样本中碳 14 的质量约是原来的 $\frac{3}{7}$,

$$\therefore N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}} = \frac{3}{7} N_0, \text{ 即 } 2^{\frac{-t}{5730}} = \frac{3}{7}, \text{ 两边同时取以}$$

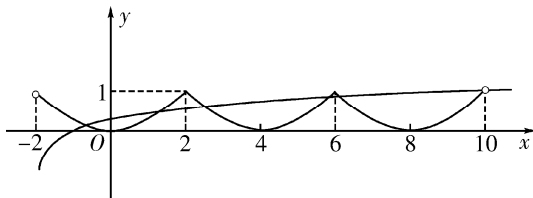
$$2 \text{ 为底的对数, 得 } \frac{-t}{5730} = \log_2 3 - \log_2 7 = \frac{\lg 3}{\lg 2} -$$

$$\frac{\lg 7}{\lg 2} \approx \frac{0.48}{0.30} - \frac{0.85}{0.30} \approx -1.23. \therefore t = 1.23 \times 5730 \approx$$

7 048. $\therefore$ 推测遗址存在的时期距今约 7 048 年.

16. $8 < a \leq 12$ 解析:对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(2+x) = f(2-x)$, 得 $f(x+4) = f[2+(x+2)] = f[2-(x+2)] = f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是一个周期函数, 且 $T=4$. 因为当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 1$, 且函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

又因为在区间 $(-2, 10)$ 内关于 x 的方程 $f(x) - \log_a(x+2) = 0$ 恰有 5 个不同的实数解, 所以函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\log_a(x+2)$ 的图象在区间 $(-2, 10)$ 内有 5 个不同的交点, 作出图象如图所示.



$$\text{由} \begin{cases} f(6) > g(6), \\ f(10) \leq g(10), \\ a > 1, \end{cases} \text{ 即} \begin{cases} 1 > \log_a(6+2), \\ 1 \leq \log_a(10+2), \\ a > 1, \end{cases} \text{ 解得 } 8 < a \leq 12.$$

17. 解:(1) $10^{\frac{3m-2n}{2}} = 10^{\frac{3m}{2}-n} = 10^{\frac{3m}{2}} \div 10^n = (10^m)^{\frac{3}{2}} \div 10^n = 2^{\frac{3}{2}} \div 3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$$(2) \log_{28} 63 = \frac{\log_{12} 63}{\log_{12} 28} = \frac{\log_{12} 7 + \log_{12} 9}{\log_{12} \left(\frac{7}{3} \times 12\right)} =$$

$$\frac{\log_{12} 7 + 2\log_{12} 3}{\log_{12} 7 - \log_{12} 3 + \log_{12} 12} = \frac{m+2n}{m-n+1}.$$

18. 解:(1)由 $f(x)$ 的图象经过 A, B 两点, 得

$$\begin{cases} f(1) = a+b=6, \\ f(-1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} a+b=6, \\ ab=8. \end{cases}$$

$\therefore a, b$ 是一元二次方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两个根,

$\therefore a=2, b=4$ 或 $a=4, b=2$.

$\therefore f(x) = 2^x + 4^x$.

(2)由(1)及 $a>b$ 知, $a=4, b=2$,

$$\therefore g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2,$$

设 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in [-1, 2]$, 则 $\frac{1}{4} \leq t \leq 2$.

$$\text{令 } \varphi(t) = t^2 - t + 2, t \in \left[\frac{1}{4}, 2\right],$$

$$\text{由 } \varphi(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \text{ 知, } \frac{7}{4} \leq \varphi(t) \leq 4.$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的值域为 $\left[\frac{7}{4}, 4\right]$.

19. 解: (1) 根据题意, 设该公司的总收入为 W 万元,

$$\text{则 } W = 50 \left(10 + \frac{x}{8} \right) \left(1 - \frac{x}{100} \right), 0 < x < 100.$$

若该公司月总收入不减少, 则有

$$50 \left(10 + \frac{x}{8} \right) \left(1 - \frac{x}{100} \right) \geq 10 \times 50,$$

解得 $0 < x \leq 20$.

(2) 设该公司总盈利为 y 万元,

$$\text{则 } y = 50 \left(10 + \frac{x}{8} \right) \left(1 - \frac{x}{100} \right) - 2 \left(10 + \frac{x}{8} \right) = -\frac{x^2}{16} + x + 480, 0 < x < 100,$$

结合二次函数的性质分析可得, 当 $x = 8$ 时, 该公司的总盈利最大.

20. 解: (1) 要使函数 $f(x)$ 有意义, 必有 $\frac{4-x}{x} > 0$,

解得 $0 < x < 4$, 因此函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 4)$.

(2) $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递减.

证明: 任取 $x_1, x_2 \in (0, 4)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{x_1} + \lg \frac{4-x_1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \lg \frac{4-x_2}{x_2} \\ &= \frac{x_2-x_1}{x_1 x_2} + \lg \frac{4x_2-x_1x_2}{4x_1-x_1x_2}. \end{aligned}$$

$$\because 0 < x_1 < x_2 < 4, \therefore \frac{x_2-x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

$$4x_2 - x_1x_2 > 4x_1 - x_1x_2 > 0, \therefore \frac{4x_2-x_1x_2}{4x_1-x_1x_2} > 1,$$

$$\therefore \lg \frac{4x_2-x_1x_2}{4x_1-x_1x_2} > 0, \therefore f(x_1) > f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递减.

$$(3) \because f(1) = 1 + \lg 3,$$

$$\therefore \text{原不等式等价于 } f\left[\frac{1}{2}x(3-x)\right] > f(1).$$

由(2)知, $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递减,

$$\therefore 0 < \frac{1}{2}x(3-x) < 1.$$

$$\text{由 } \frac{1}{2}x(3-x) > 0, \text{ 得 } x(x-3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3,$$

$$\text{由 } \frac{1}{2}x(3-x) < 1, \text{ 得 } x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ 或 } x > 2.$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(0, 1) \cup (2, 3)$.

21. 解: (1) $\because f(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\therefore f(-x) = f(x) \text{ 恒成立},$$

$$\therefore 2^{-x} - \frac{a}{2^{-x}} = 2^x - \frac{a}{2^x}, \therefore \frac{1}{2^x} - a \cdot 2^x = 2^x - \frac{a}{2^x},$$

$$\text{化简得 } (a+1) \left(2^x - \frac{1}{2^x} \right) = 0,$$

故 $a = -1$.

$$(2) \text{ 已知 } h(x) = f(x) + g(x) = \frac{3}{4} \cdot 2^x + \frac{3a}{2^x} + 2 > 2 + 3a,$$

$$\text{即 } \frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{a}{2^x} > a,$$

设 $t = 2^x$, 因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $t \in (1, +\infty)$.

$$\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{a}{2^x} > a \text{ 可化为 } \frac{1}{4}t + \frac{a}{t} > a,$$

$$\text{即 } t^2 - 4at + 4a > 0.$$

$h(x) > 2 + 3a$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立,

即对任意 $t \in (1, +\infty)$, $t^2 - 4at + 4a > 0$ 恒成立.

$$\text{记 } m(t) = t^2 - 4at + 4a,$$

对称轴方程为 $t = 2a$,

$$\text{① 当 } 2a \leq 1, \text{ 即 } a \leq \frac{1}{2} \text{ 时},$$

$$m(t) > m(1) = 1 > 0 \text{ 恒成立},$$

$$\text{故 } a \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{② 当 } 2a > 1, \text{ 即 } a > \frac{1}{2} \text{ 时},$$

$$m(t)_{\min} = m(2a) = -4a^2 + 4a > 0,$$

$$\text{解得 } 0 < a < 1, \text{ 又 } a > \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < a < 1.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1)$.

22. 解: (1) 函数 $g(x)$ 存在零点, 即 $f(x) = a - 1$ 有解.

$$\because k = 2, \therefore f(x) = \log_2(4^x + 1) - 2x = \log_2 \frac{4^x + 1}{4^x} =$$

$$\log_2 \left(1 + \frac{1}{4^x} \right).$$

$$\because 1 + \frac{1}{4^x} > 1,$$

$$\therefore \log_2 \left(1 + \frac{1}{4^x} \right) > 0,$$

即 $f(x) > 0$.

$\because f(x) = a - 1$ 有解, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数,

$$\therefore a - 1 > 0, \text{ 即 } a > 1,$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

(2) $\because f(x) = \log_2(4^x + 1) - kx (k \in \mathbf{R})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-1) = f(1),$$

$$\therefore \log_2 \left(\frac{1}{4} + 1 \right) + k = \log_2(4 + 1) - k,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore f(x) = \log_2(4^x + 1) - x = \log_2 \left(\frac{4^x + 1}{2^x} \right) =$$

$$\log_2(2^x + 2^{-x}),$$

$$f(-x) = \log_2(2^{-x} + 2^x),$$

$$\therefore f(x) = f(-x),$$

又 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $\therefore f(x)$ 为偶函数.

$\therefore k=1$ 符合题意.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象只有一个公共点,

$\therefore$ 方程 $f(x) = h(x)$ 只有一个解,

$$\text{即 } 2^{-x} + 2^x = b \cdot 2^x - \frac{4}{3}b \text{ 只有一个解,}$$

$$\text{即 } 3(b-1)2^{2x} - 4b2^x - 3 = 0 \text{ 只有一个解,}$$

$$\text{令 } t = 2^x, t > 0,$$

$$\text{则 } 3(b-1)t^2 - 4bt - 3 = 0 \text{ 只有一个正根,}$$

$$\text{当 } b=1 \text{ 时, } t = -\frac{3}{4} < 0, \text{ 不符合题意;}$$

当 $b \neq 1$ 时, 若方程有两个相等的正数根,

$$\text{则 } \Delta = (-4b)^2 - 4 \times 3(b-1) \times (-3) = 0, \text{ 且}$$

$$\frac{4b}{2 \times 3(b-1)} > 0. \text{ 解得 } b = -3 \text{ 或 } b = \frac{3}{4} \text{ (舍去),}$$

当方程有两个不相等的实数根且只有一个正数根时, $\therefore y = 3(b-1)t^2 - 4bt - 3$ 的图象恒过点 $(0, -3)$,

$\therefore$ 只需图象开口向上, 即 $b-1 > 0$, 解得 $b > 1$.

综上所述, 实数 b 的取值范围是 $\{-3\} \cup (1, +\infty)$.

第五章 三角函数(A卷)

1. B 解析: 由诱导公式 $\sin 600^\circ + \tan 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} +$

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

2. A 解析: $\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{4}{3}, \therefore 1 - 2\sin \theta \cos \theta =$

$$\frac{16}{9}, \therefore 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{9} < 0. \therefore \theta \in \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right),$$

$$\therefore \sin(\pi - \theta) - \cos(\pi - \theta) = \sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = -\sqrt{1 + 2\sin \theta \cos \theta} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

故选 A.

3. C 解析: 因为 $\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{3}{5}$. 故选 C.

4. A 解析: 由一元二次方程根与系数的关系, 得

$$\begin{cases} \tan A + \tan B = \frac{5}{3}, \\ \tan A \tan B = \frac{1}{3}, \end{cases} \therefore \tan(A + B) =$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}. \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \tan C =$$

$$\tan[\pi - (A + B)] = -\tan(A + B) = -\frac{5}{2} < 0, \therefore C$$

是钝角, $\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形. 故选 A.

5. B 解析: $f(x) = \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} = \sin x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

$$\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{4} (1 -$$

$$\cos 2x) - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2x =$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right). \text{ 对任意 } x \in \mathbf{R} \text{ 都满足 } f(c + x) =$$

$f(c - x)$, 即直线 $x = c$ 为函数图象的对称轴. 令

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 当}$$

$$k=0 \text{ 时, } x = \frac{3\pi}{8}, \text{ 所以 } c \text{ 的值可以为 } \frac{3\pi}{8}.$$

6. A 解析: 将 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上各点的

横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 可以得到

$$y = \sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ 的图象,}$$

再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可以得到 $y =$

$$\sin\left[\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) \text{ 的图象. 因此}$$

$$g(x) = \sin\left(x - \frac{5\pi}{12}\right), \text{ 则 } g\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin 0 = 0. \text{ 故选 A.}$$

7. B 解析: 由题图得 $A = 2, \frac{3T}{4} = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4},$

$$\therefore T = \pi, \therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \therefore \omega = 2, \therefore f(x) = 2\sin(2x + \varphi).$$

$$\text{将点 } \left(\frac{\pi}{6}, 2\right) \text{ 代入, 得 } 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2, \therefore \frac{\pi}{3} + \varphi =$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \therefore \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}). \text{ 又 } |\varphi| <$$

$$\frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = -1.$$

8. D 解析: $f(x) = 3\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} +$

$$m = \frac{3}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + m =$$

$$\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + m, \therefore -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}, \therefore -\frac{\pi}{3} \leq$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}, \therefore f(x)_{\min} = -\frac{3}{2} + m \geq 0, \therefore m \geq \frac{3}{2}.$$

9. BC 解析: $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 2x$. 所以 $f(x)$ 的最大值是 $\sqrt{2}$, 并且是偶函数, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $y = 0$, 函数关于点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in (0, \pi)$, 此时函数单调递减.

10. CD 解析: 设 y 与时间 t 的函数关系式为 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, 由题意可得, 初始位置为 $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $A = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}$. 又函数周期是 $60(\text{s})$ 且秒针按顺时针旋转, 即 $T = \left|\frac{2\pi}{\omega}\right| = 60$, 所以 $|\omega| = \frac{\pi}{30}$, 即 $\omega = -\frac{\pi}{30}$. 故满足题意的函数解析式为: $y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{4}\right)$.

11. AC 解析: $\because \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha \in (0, \pi), \therefore \frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 则 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$, 故 A 正确; $\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故 B 错误; $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{6}$, 故 C 正确; $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{6}$, 故 D 错误.

12. AB 解析: $\because$ 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上是单调函数, $\therefore \frac{T}{2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi - \frac{\pi}{2}$, $\therefore T \geq \pi, \therefore 0 < \omega \leq 2$. $\because f(0) = f(\pi), \therefore x = \frac{\pi}{2}$ 是函数图象的一条对称轴. $\because f(0) = -f\left(-\frac{\pi}{2}\right), \therefore f(x)$ 图象的一个对称中心是 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$. 若 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, 则 $\omega = \frac{2}{3}$; 若 $\frac{3}{4}T = \frac{3}{4} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, 则 $\omega = 2$. 故选 AB.

13. $\frac{2}{19}$ 解析: 由题意, 得 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$,

$$\therefore \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{5\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + 2}{5 - \tan \alpha} = \frac{-\frac{4}{3} + 2}{5 - \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{2}{19}.$$

14. 2 解析: 依题意有 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\sin \frac{\pi}{3} + b\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{12+b^2}$, 即 $3 + \frac{b}{2} = \sqrt{12+b^2}$, 解得 $b = 2$, 于是 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 由于 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, 所以 $x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 故 $f(x)_{\min} = 4\sin \frac{\pi}{6} = 2$.

15. 2 解析: $\because f(x) = -\sin^2 x - a\sin x + b + 1$, 令 $t = \sin x (-1 \leq t \leq 1)$, 则 $y = -t^2 - at + b + 1 (-1 \leq t \leq 1)$, 函数的对称轴为 $t = -\frac{a}{2}$, 当 $-\frac{a}{2} \leq -1$, 即 $a \geq 2$ 时, $\begin{cases} -1 + a + b + 1 = 0, \\ -1 - a + b + 1 = -4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -2. \end{cases}$ 当 $-1 < -\frac{a}{2} < 0$, 即 $0 < a < 2$ 时, $\begin{cases} -\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b + 1 = 0, \\ -1 - a + b + 1 = -4, \end{cases}$ 此时无解. $\therefore \begin{cases} a = 2, \\ b = -2, \end{cases}$ 所以 $2a + b = 2$.

16. $g(x) = \tan\left(x + \frac{2\pi}{9}\right)$ 解析: 由题意, 函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$ 的相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\omega = \frac{1}{3}$, 且 $f(\pi) = -\sqrt{3}$, 即 $\tan\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = -\sqrt{3}$. 因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \tan\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$. 将 $f(x)$ 图象上的点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得 $y = \tan\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \tan\left(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{9}\right)$, 再把所得图象的纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$, 可得 $y = \tan\left(x + \frac{2\pi}{9}\right)$ 的图象, 即函数 $g(x)$ 的解析式为 $g(x) = \tan\left(x + \frac{2\pi}{9}\right)$.

17. 解: (1) $\because \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3},$$

$$\because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ 及 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$(2) \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \therefore 0 < \beta - \alpha < \pi,$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\therefore \sin(\beta - \alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta - \alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin \beta = \sin[(\beta - \alpha) + \alpha] = \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha +$$

$$\cos(\beta - \alpha) \sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \therefore \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

18. 解: (1) $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x -$

$$\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 由(1)知 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$,

所以 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, 2m - \frac{\pi}{6}\right]$.

要使得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$,

即 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 1.

所以 $2m - \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2}$, 即 $m \geq \frac{\pi}{3}$.

所以实数 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

19. 解: (1) 将函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向右

平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

再将所得函数图象向下平移 1 个单位长度, 得到

函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 的图象,

$$\therefore g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \text{函数 } y = g(x) \text{ 的单调递增区间是 } \left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) \because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \therefore \frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \therefore 0 \leq g(x) \leq 1.$$

$$\therefore \text{函数 } y = g(x) \text{ 在区间 } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 上的值域为 } [0, 1].$$

20. 解: (1) 由题意知, $T = \pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$,

$\therefore$ 半径为 2 m, 筒车的轴心 O 距水面的高度为 1 m,

易知 $A = 2, K = 1$,

当 $t = 0$ 时, $d = 0$, 代入 $d = 2\sin(2t + \varphi) + 1$ 得,

$$\sin \varphi = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } d = 2\sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$$

(2) 在水中, 理由如下:

$$\text{由题知, } 2\sin\left(2t_0 - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2,$$

$$\text{即 } \sin\left(2t_0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{由题意, 得 } \cos\left(2t_0 - \frac{\pi}{6}\right) < 0,$$

$$\text{所以 } \cos\left(2t_0 - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{1 - \sin^2\left(2t_0 - \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \sin\left[2\left(t_0 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left[\left(2t_0 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,$$

$$\text{故再经过 } \frac{\pi}{3} \text{ min 后 } d = 2 \times (-1) + 1 = -1 < 0,$$

$$\text{所以再经过 } \frac{\pi}{3} \text{ min 后盛水筒 } W \text{ 在水中, 距水面距}$$

离为 1 m.

21. 解: (1) 由图可知 $A=2$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$,

$$\therefore T = \pi, \therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \varphi),$$

$$\text{代入点} \left(\frac{\pi}{6}, 2\right), \text{得 } 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 2,$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$(2) \text{ 令 } h(x) = 3f(x) + 2 - m = 0,$$

$$\therefore 3f(x) = m - 2,$$

$$\therefore \begin{cases} y = 6\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \\ y = m - 2 \end{cases} \text{ 在 } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ 上有 2}$$

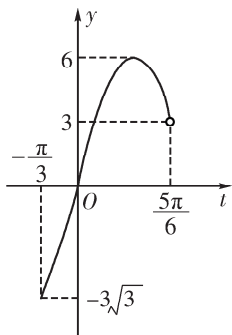
个解,

即 $y = 6\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上与直线 $y = m - 2$ 有两个交点.

$$\text{设 } t = 2x + \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right), \therefore t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$\therefore y = 6\sin t$ 的图象如图所示.



$$\therefore 3 < m - 2 < 6,$$

$$\therefore 5 < m < 8.$$

22. 解: (1) 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

$$\text{由表格中的数据, 得 } T = \frac{11\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi,$$

$$\text{由 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi, \text{ 得 } \omega = 1.$$

$$\text{又 } \begin{cases} b + A = 3, \\ b - A = -1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A = 2, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$\text{令 } \omega \cdot \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即 } \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$$

(2) 因为函数 $y = f(kx) = 2\sin\left(kx - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 的最

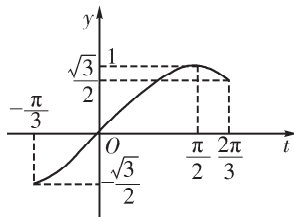
小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$,

$$\text{所以 } k = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3,$$

$$\text{令 } t = 3x - \frac{\pi}{3}, \text{ 因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$\text{所以 } t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

作出 $y = \sin t$ ($t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$) 的图象, 如图所示.



由图象可知, $\sin t = s$ 在 $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的实数解时, $s \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

所以方程 $f(kx) = m$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上恰好有两个不同的实数解时, $m \in [\sqrt{3} + 1, 3)$,

即实数 m 的取值范围是 $[\sqrt{3} + 1, 3)$.

第五章 三角函数(B卷)

1. B 解析: 依题意 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 于是 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. A 解析: $\because \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi, \therefore |\omega| = 2$, 又 $\omega > 0, \therefore \omega = 2$,
 $\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. $\because 2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi, \therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称.

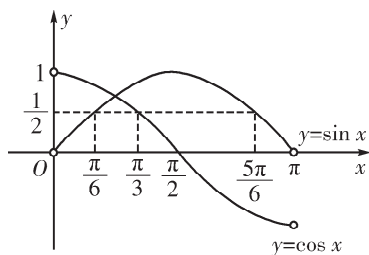
3. D 解析: 因为 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 因为 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\alpha - \beta \in (0,$

π), 所以 $\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \frac{12}{13}$, 所以 $\sin \beta = \sin[\alpha - (\alpha - \beta)] = \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = -\frac{56}{65}$. 故选 D.

4. B 解析: 由题意, 得 $b = 2a$, 因为 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3}$, 所以 $a^2 = \frac{1}{5}$, 所以 $|a| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $|a - b| = |a - 2a| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

5. B 解析: 对任意 $\theta \in \mathbf{R}$, $3m^2 - \frac{1}{2}m > \sin \theta \cos \theta$ 恒成立, 可转化为求 $\sin \theta \cos \theta$ 的最大值, 因为 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 所以 $\sin \theta \cos \theta$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 所以 $3m^2 - \frac{1}{2}m > \frac{1}{2}$, 解得 $m < -\frac{1}{3}$ 或 $m > \frac{1}{2}$. 故选 B.

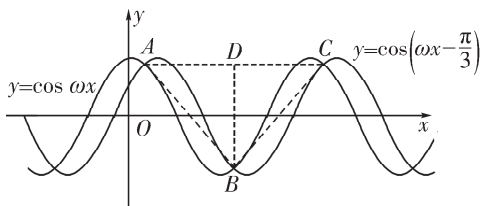
6. B 解析: 当 $0 < x < \pi$ 时, 正弦函数与余弦函数的图象如图所示.



因为 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 所以由图可知, 使得 $\sin x > \frac{1}{2}$ 和 $\cos x < \frac{1}{2}$ 同时成立的 x 的取值范围为 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$. 故选 B.

7. B 解析: 由题意, 得平移后的图象对应的函数为 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3} + m\right)$, 因为 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3} + m\right)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以此函数是偶函数, 所以 $\frac{\pi}{3} + m = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 即 $m = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 又因为 $m > 0$, 所以当 $k = 0$ 时, $m_{\min} = \frac{\pi}{6}$.

8. D 解析: 由条件, 得 $g(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$, 作出两个函数图象, 如图所示.



A, B, C 为连续三个交点, 不妨设 B 在 x 轴下方, D 为 AC 的中点, 由对称性可得 $\triangle ABC$ 是以 $\angle B$ 为顶角的等腰三角形, $AC = T = \frac{2\pi}{\omega} = 2CD$, 由 $\cos \omega x =$

$\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$, 整理, 得 $\cos \omega x = \sqrt{3} \sin \omega x$, 则 $\cos \omega x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $y_C = -y_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $BD = 2|y_B| = \sqrt{3}$, 要使 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 只需 $\angle ACB < \frac{\pi}{4}$ 即可, 由 $\tan \angle ACB = \frac{BD}{DC} = \frac{\sqrt{3}\omega}{\pi} < 1$, 所以 $0 < \omega < \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. 故选 D.

9. BC 解析: 由题图知 $A = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$. 又 $f(0) = |2\cos \varphi + 1| = 2$, 所以 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ 或 $\cos \varphi = -\frac{3}{2}$ (舍), 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 即 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 由图象知 $\varphi > 0$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故选 BC.

10. ABD 解析: $\because f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 对于 A: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 即 A 正确; 对于 B: $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbf{Z}$ 时, $y = f(x)$ 单调递减, 故减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, 则 $b - a$ 的最大值是 $\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$, 故 B 正确; 对于 C: $f\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 2\cos\left[2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\sin 2x$, $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\cos\left[2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\sin 2x$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 不是 $y = f(x)$ 的对称轴, 故 C 错误; 对于 D: $y = 2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{11\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y = 2\cos\left[2\left(x - \frac{11\pi}{12}\right)\right] = 2\cos\left(2x - \frac{11\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABC 解析: 设点 P 距离水面的高度 h (单位: m) 和时间 t (单位: s) 的函数解析式为 $h = A\sin(\omega t +$

$\varphi)+B(A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2})$, 由题意, 得

$$\begin{cases} h_{\max}=A+B=6, \\ h_{\min}=-A+B=-2, \\ T=\frac{2\pi}{\omega}=60, \\ h(0)=A\sin(\omega\cdot 0+\varphi)+B=0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} A=4, \\ B=2, \\ \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{30}, \\ \varphi=-\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$\therefore h=4\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})+2$. 故 D 错误; 对于 A:

令 $h=6$, 即 $6=4\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})+2$, 解得 $t=20$, 故

A 正确; 对于 B: 令 $t=155$, 代入 $h=$

$4\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})+2$, 解得 $h=2$, 故 B 正确; 对于 C:

令 $t=50$, 代入 $h=4\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})+2$, 解得 $h=-2$, 故 C 正确. 故选 ABC.

12. AD 解析: 任取 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$, 因此 $f(x)$ 是偶函数, A 正确; 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $f(x) = \sin x + \sin x = 2\sin x$, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, B 错误; 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x) = 2\sin x$. 令 $f(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \pi$, 当 $-\pi \leq x < 0$ 时, $f(x) = -\sin x - \sin x = -2\sin x$, 令 $f(x) = 0$, 得 $x = -\pi$, 因此 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有三个零点, C 错误; $\because \sin|x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$, $\therefore \sin|x| + |\sin x| \leq 2$, 且 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(\frac{\pi}{2}) = 2$, $\therefore f(x)$ 的最大值为 2, D 正确. 故选 AD.

13. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 解析: 由 $\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})} = \frac{\tan \alpha}{\frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}} = \frac{\tan \alpha(1 - \tan \alpha)}{\tan \alpha + 1} = -\frac{2}{3}$, 得 $3\tan^2 \alpha - 5\tan \alpha - 2 = 0$, 解得 $\tan \alpha = 2$ 或 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$. $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\tan \alpha + 1 - \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} \right)$, 当 $\tan \alpha = 2$ 时, 上式 = $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2 \times 2 + 1 - 2^2}{2^2 + 1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$; 当 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ 时, 上

$$\text{式} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{2 \times (-\frac{1}{3}) + 1 - (-\frac{1}{3})^2}{(-\frac{1}{3})^2 + 1} \right] = \frac{\sqrt{2}}{10}. \text{ 综上}$$

所述, $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

14. 0 解析: $\because \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \cos(\frac{5\pi}{6} + \alpha) = \cos[\pi - (\frac{\pi}{6} - \alpha)] = -\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = -\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\sin[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} - \alpha)] = -\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \cos(\frac{5\pi}{6} + \alpha) - \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$.

15. 1 解析: $\because$ 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度得到 $y = \sin 2x$ 的图象, 即 $h(x) = \sin 2x$. 又 $x = a$ 是曲线 $y = h(x)$ 的一条对称轴, 则 $2a = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, $a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$. $\therefore h(a + \frac{\pi}{4}) + h(\frac{\pi}{4}) = \sin(k\pi + \pi) + \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

16. $[\frac{3}{2}, \frac{15}{2})$ 解析: $\because f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 是奇函数, 且存在正数 α 使得函数 $f(x)$ 在 $[0, \alpha]$ 上单调递增, 故 $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. $\therefore f(x) = \sin \omega x$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上取得最小值时的 x 值有且仅有一个, $\omega x \in [-\frac{\omega\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{6}]$, 则 $-\frac{5}{2}\pi < -\frac{\omega\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{2}$, 且 $\frac{\omega\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$, 解得 $\frac{3}{2} \leq \omega < \frac{15}{2}$. 故 ω 的取值范围是 $[\frac{3}{2}, \frac{15}{2})$.

17. 解: (1) $\because \frac{\sin(\alpha + 3\pi)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{17}{31}$, $\frac{\sin(\pi - \beta)}{\cos \beta - \sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} = \frac{\tan \beta}{1 - \tan \beta} = \frac{1}{6}$, 解得 $\tan \beta = \frac{1}{7}$, 故 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{17}{31} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{17}{31} \times \frac{1}{7}} =$

$$\frac{3}{4}.$$

(2) 因为 α, β 均为锐角, $\tan \alpha < 1, \tan \beta = 1$,

$$\text{所以 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{又 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{4} < 1,$$

$$\text{所以 } 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } 0 < \alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha + 2\beta) = \tan[(\alpha + \beta) + \beta] =$$

$$\frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = 1.$$

$$\text{所以 } \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}.$$

$$18. \text{解: (1) } f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6}\right).$$

因为 $f(x)$ 是偶函数,

$$\text{所以 } \varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}).$$

又因为 $0 < \varphi < \pi$,

$$\text{所以 } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

因为函数 $y = f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

所以 $T = \pi$, 又因为 $\omega > 0$, 所以 $\omega = 2$.

$$\text{所以 } f(x) = 2\cos 2x,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

$$\text{得到 } y = 2\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \text{ 的图象,}$$

再将得到的图象上每个点的横坐标伸长到原来的 4 倍, 纵坐标不变,

$$\text{得到 } g(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象.}$$

$$\text{令 } 2k\pi \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 4k\pi + \frac{8\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的单调递减区间是 } \left[4k\pi + \frac{2\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$19. \text{解: (1) 当 } \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(x) = x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 1 =$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}.$$

$$\therefore x \in [-1, \sqrt{3}],$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值, 为 } -\frac{4}{3}.$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值, 为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 函数 $f(x) = (x + \tan \theta)^2 - 1 - \tan^2 \theta$ 的图象的对称轴为 $x = -\tan \theta$.

$$\therefore f(x) \text{ 在区间 } [-1, \sqrt{3}] \text{ 上单调,}$$

$$\therefore -\tan \theta \leq -1 \text{ 或 } -\tan \theta \geq \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \tan \theta \geq 1 \text{ 或 } \tan \theta \leq -\sqrt{3},$$

$$\text{又 } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \theta \text{ 的取值范围是 } \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

20. 解: (1) 由函数的图象可得 $f(x)$ 的周期为 $2 \times$

$$\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi, \text{ 故 } \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2,$$

$$\text{又 } f\left(\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}}{2}\right) = -1, \text{ 故 } \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{所以 } \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \pi, \text{ 即 } \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

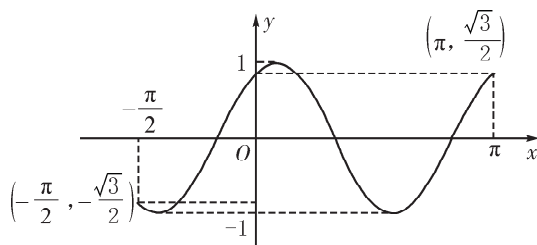
$$(2) g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } f(x) - \sqrt{3}g(x) - m &= \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\cos 2x - m \\ &= \cos 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{6} - m \\ &= \cos 2x - m = -m - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

故方程在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的实数解的个数即为

$y = -m$ 与 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 图象交点的个数,

$y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的图象如图所示.



由图象可得:

当 $-m = -1$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2} < -m < 1$, 即 $m = 1$ 或 $-1 <$

$m < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 方程有 2 个不同的解;

当 $-1 < -m \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m < 1$ 时, 方程有 4 个不同的解;

当 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < -m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 方程有 3 个不同的解.

21. 解: (1) 设摩天轮转动 $t \text{ min}$ ($0 \leq t \leq 30$) 时游客距离地面的高度为 h ,

因为摩天轮转动一周需要 30 min,

所以座舱每分钟旋转角的大小为 $\frac{\pi}{15}$,

由题意, 得 $h = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 65$,

当 $t = 5$ 时, $h = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15} \times 5 - \frac{\pi}{2}\right) + 65 = 37.5$,

所以游客 5 min 后距离地面的高度是 37.5 m.

(2) 由题意可知, 要获得俯瞰的最佳视觉效果,

应满足 $55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 65 \geq 92.5$,

化简, 得 $\sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$,

因为 $0 \leq t \leq 30$, 所以 $\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

所以 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6}$, 解得 $10 \leq t \leq 20$,

所以摩天轮转动一周能有 10 min 最佳视觉效果.

22. 解: (1) $h(x) = \sqrt{3} \sin^4 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} -$

$\sqrt{3} \cos^4 \frac{x}{2} = \sqrt{3} \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} -$

$\cos^2 \frac{x}{2} \right) + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \cos x + \sin x =$

$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

将函数 $h(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的

$\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y =$

$2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

所以函数 $f(x)$ 的解析式为: $f(x) =$

$2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

(2) $\because x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \therefore 2x_1 + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$,

$\therefore \sin\left(2x_1 + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 即 $f(x_1) \in [1, 2]$.

$\because x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \therefore 2x_2 - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

$\therefore \cos\left(2x_2 - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

又 $m > 0, \therefore m \cos\left(2x_2 - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{m}{2}, m\right]$,

即 $g(x_2) \in \left[3 - \frac{3m}{2}, 3 - m\right]$.

假设存在实数 m , 满足对任意 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 都存

在 $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立,

则 $f(x_1)$ 的值域是 $g(x_2)$ 值域的子集,

即 $[1, 2] \subseteq \left[3 - \frac{3m}{2}, 3 - m\right]$,

则 $\begin{cases} 3 - \frac{3m}{2} \leq 1, \\ 3 - m \geq 2, \end{cases}$ 此不等式组无解,

故满足题意的实数 m 不存在.

专题一 集合与常用逻辑用语、 二次函数与不等式(A卷)

1. D 解析: 存在量词命题的否定是全称量词命题, 把“ $\exists$ ”改成“ $\forall$ ”, 把“ $<$ ”改成“ $\geq$ ”. 故选 D.

2. C 解析: $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | x > 1\} = \{x | x > -1\}$, 故选 C.

3. B 解析: 由真子集的定义知, $\{2, 3\}$ 是集合 A 的真子集. 故选 B.

4. B 解析: $\because 0 < x < 1, 1 - x > 0, \therefore x(3 - 3x) = 3x(1 - x) \leq 3\left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, 当且仅当 $x = 1 - x$, 即 $x = \frac{1}{2}$ 时等号成立, $\therefore x(3 - 3x)$ 取最大值 $\frac{3}{4}$ 时, x 的值为 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. A 解析: $x_1 > 1$ 且 $x_2 > 1 \Rightarrow x_1 + x_2 > 2$ 且 $x_1 x_2 > 1$, 但是 $x_1 + x_2 > 2$ 且 $x_1 x_2 > 1 \not\Rightarrow x_1 > 1$ 且 $x_2 > 1$. 例如 $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}$ 满足 $x_1 + x_2 > 2$ 且 $x_1 x_2 > 1$, 但不满足 $x_1 > 1$ 且 $x_2 > 1$, $\therefore$ “ $x_1 > 1$ 且 $x_2 > 1$ ”是“ $x_1 + x_2 > 2$ 且 $x_1 x_2 > 1$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

6. D 解析: 设 $A = \{x | -1 < x < 3\}, B = \{x | x > a\}$, 因为 p 是 q 的充分不必要条件, 所以 $A \subsetneq B$, 所以 $a \leq -1$. 故选 D.

7. B 解析: $\because a > 0, b > 0, ab = 1, m + n = b + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{b} = (a+b) + \frac{a+b}{ab} = 2(a+b) \geq 4\sqrt{ab} = 4$, 当且仅当 $a = b = 1$ 时等号成立. 故选 B.

8. A 解析: 不等式 $4[x]^2 - 63[x] + 45 < 0$ 即为 $(4[x] - 3) \cdot ([x] - 15) < 0$. 解得 $\frac{3}{4} < [x] < 15$, 则 $[x] \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}$, 因此, $1 \leq x < 15$. 故选 A.

9. ACD 解析: A 项, 不成立, 比如 $a = -2, b = 1$. B 项, 成立, $\because 0 < a < 1, \therefore a^2 < 1, \therefore a(a^2 - 1) < 0$, 即 $a^3 < a$. C 项, 不成立, $\because ab + a - ab - b = a - b > 0, \therefore ab + a > ab + b$, 即 $a(b+1) > b(a+1), \therefore \frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$. D 项, 不成立, 若 $b = 0$, 则 $cb^2 = ab^2$. 故选 ACD.

10. AD 解析: 因为 $2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$, 所以 $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$, 故 A 正确; 当 $a = -1$ 时, $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 显然不成立, 故 B 错误; 当 $a = 1, b = -1$ 时, 显然有 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 但 $a > b$, 故 C 错误; 若 $a < b < 0, c < d < 0$, 则 $-a > -b > 0, -c > -d > 0$, 根据不等式的性质可知 $ac > bd > 0$, 故 D 正确. 故选 AD.

11. BC 解析: $\because$ 正数 a, b 满足 $a + b = 4, \therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4$, 即 ab 的最大值 $t = 4$, 不等式 $x^2 + 3x - t < 0$ 即为 $x^2 + 3x - 4 < 0$, 其解集为 $M = \{x | -4 < x < 1\}$. 故选 BC.

12. ABD 解析: A 中, 当 $m = 0$ 时, 方程为 $(x-2)(x-3) = 0$. 解得 $x_1 = 2, x_2 = 3$. 所以 A 正确. B 中, 整理方程可得 $x^2 - 5x + 6 - m = 0$, 由题意得 $\Delta = 25 - 4(6 - m) > 0$, 可得 $m > -\frac{1}{4}$, 所以 B 正确. 由函数 $y = (x-2)(x-3)$ 的图象可知, 当 $m > 0$ 时, $x_1 < 2 < 3 < x_2$, 所以 C 错误, D 正确. 故选 ABD.

13. 3 解析: “ $\exists x \in [-1, 1], x + 2 - a > 0$ ”的否定为 “ $\forall x \in [-1, 1],$ 都有 $x + 2 - a \leq 0$ ”. 因为 “ $\exists x \in [-1, 1], x + 2 - a > 0$ ”为假命题, 所以 “ $\forall x \in [-1, 1],$ 都有 $x + 2 - a \leq 0$ ”为真命题, 所以 $a \geq x + 2$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 所以 $a \geq 3$. 故实数 a 的最小值为 3.

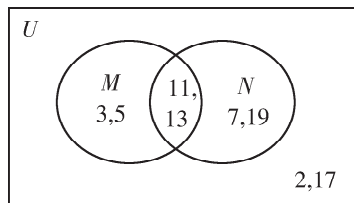
14. -3 $\{-8, -7, -4, 4, 9\}$ 解析: 因为 $A \cap B = \{9\}$, 所以 $9 \in A$. 所以 $a^2 = 9$ 或 $2a - 1 = 9$, 解得

$a = \pm 3$ 或 $a = 5$. 当 $a = 3$ 时, $A = \{9, 5, -4\}, B = \{-2, -2, 9\}$, B 中元素不满足集合元素的互异性, 舍去. 当 $a = -3$ 时, $A = \{9, -7, -4\}, B = \{-8, 4, 9\}, A \cap B = \{9\}$ 满足题意, 故 $A \cup B = \{-8, -7, -4, 4, 9\}$. 当 $a = 5$ 时, $A = \{25, 9, -4\}, B = \{0, -4, 9\}$, 此时 $A \cap B = \{-4, 9\}$, 与 $A \cap B = \{9\}$ 矛盾, 故舍去. 综上所述, $a = -3, A \cup B = \{-8, -7, -4, 4, 9\}$.

15. 180 m 解析: 将 $t = 3, x = 135$ 代入 $x = at - 5t^2$ 可得 $135 = 3a - 45$, 解得 $a = 60$, 所以 $x = 60t - 5t^2$, 根据二次函数的性质可知, $x = 60t - 5t^2$ 的图象开口向下, 对称轴为 $t = 6$, 故当 $t = 6$ 时, 箭达到最大高度, 为 180 m.

16. $\{a | a \geq 1\}$ 解析: 由 $m + n = 8$, 得 $m + n + 1 = 9$, 故 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n+1} = \frac{1}{9} (m + n + 1) \left(\frac{1}{m} + \frac{4}{n+1} \right) = \frac{1}{9} \left(5 + \frac{n+1}{m} + \frac{4m}{n+1} \right) \geq \frac{1}{9} \left(5 + 2\sqrt{\frac{n+1}{m} \cdot \frac{4m}{n+1}} \right) = \frac{9}{9} = 1$, 当且仅当 $n+1 = 2m$, 即 $m = 3, n = 5$ 时等号成立, 故只需 $\frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq 1$.

17. 解: $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, 根据题意, 画出 Venn 图如图所示.



$\therefore M = \{3, 5, 11, 13\}, N = \{7, 11, 13, 19\}$.

18. 解: $\because$ 全集为 $\mathbf{R}, \complement_{\mathbf{R}} B = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$,

$\therefore B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $\begin{cases} a \geq -1, \\ a + 3 \leq 5, \end{cases}$

$\therefore -1 \leq a \leq 2$.

$\therefore$ 当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a < -1 \text{ 或 } a > 2\}$.

(2) 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$,

结合数轴得, $a + 3 < -1$ 或 $a > 5$,

即 $a < -4$ 或 $a > 5$.

$\therefore$ 当 $A \cap B \neq A$ 时, 实数 a 的取值范围是 $\{a | -4 \leq a \leq 5\}$.

19. 解: 对于集合 A , 由 $\Delta = 4 - 4(9 - a) < 0$, 解得 $a < 8$.

对于集合 B , 由 $\Delta = 16 - 4a < 0$, 解得 $a > 4$.

因为 A, B 两个集合中至少有一个集合不为空集, 所以 a 的取值范围是 $\{a | a \geq 8 \text{ 或 } a \leq 4, \text{ 且 } a \neq 0\}$.

20. 解: (1) 当 $a = 2$ 时, $A = \{x | 1 \leq x \leq 7\}$,

则 $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$,

$\complement_U A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 7\}$,

$\complement_U B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$.

$\therefore (\complement_U B) \cap (\complement_U A) = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 7\}$.

(2) $\because x \in A$ 是 $x \in B$ 成立的充分不必要条件,

$\therefore A \subseteq B$,

①若 $A = \emptyset$, 则 $a - 1 > 2a + 3$, 解得 $a < -4$.

②若 $A \neq \emptyset$, 由 $A \subseteq B$,

$$\text{得} \begin{cases} a - 1 \leq 2a + 3, \\ a - 1 \geq -2, \text{ 且 } a - 1 \geq -2 \text{ 与 } 2a + 3 \leq 4 \text{ 不同时取等号,} \\ 2a + 3 \leq 4, \end{cases}$$

时取等号,

$$\text{解得 } -1 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a < -4 \text{ 或 } -1 \leq a \leq \frac{1}{2}\}$.

21. 解: (1) 因为不等式 $ax^2 - 3x + 6 > 4$ 的解集为 $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > b\}$,

所以 $x_1 = 1$ 与 $x_2 = b$ 是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的两个实数根, $b > 1$ 且 $a > 0$.

$$\text{由根与系数的关系, 得} \begin{cases} 1 + b = \frac{3}{a}, \\ 1 \times b = \frac{2}{a}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = 2. \end{cases}$$

(2) 由(1)知不等式 $ax^2 - (ac + b)x + bc < 0$ 可化为 $x^2 - (2 + c)x + 2c < 0$, 即 $(x - 2)(x - c) < 0$.

当 $c > 2$ 时, 不等式 $(x - 2)(x - c) < 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < c\}$.

当 $c < 2$ 时, 不等式 $(x - 2)(x - c) < 0$ 的解集为 $\{x | c < x < 2\}$.

当 $c = 2$ 时, 不等式 $(x - 2)(x - c) < 0$ 的解集为 $\emptyset$.

22. 解: (1) 设甲工程队的总报价为 y 元,

$$\text{则 } y = 3 \left(150 \times 2x + 400 \times \frac{12}{x} \right) + 7\,200 =$$

$$900 \left(x + \frac{16}{x} \right) + 7\,200 \quad (2 \leq x \leq 6),$$

$$\because 900 \left(x + \frac{16}{x} \right) + 7\,200 \geq 900 \times 2 \times \sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 7\,200 = 14\,400.$$

当且仅当 $x = \frac{16}{x}$, 即 $x = 4$ 时, 等号成立,

$\therefore$ 当左、右两面墙的长度为 4 m 时, 甲工程队的报价最低为 14 400 元.

(2) 由题意可得, 当 $2 \leq x \leq 6$ 时, $900 \left(x + \frac{16}{x} \right) +$

$$7\,200 > \frac{900a(1+x)}{x} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } \frac{(x+4)^2}{x} > \frac{a(1+x)}{x},$$

$$\therefore a < \frac{(x+4)^2}{x+1} = (x+1) + \frac{9}{x+1} + 6,$$

$$\text{又 } x+1 + \frac{9}{x+1} + 6 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{9}{x+1}} + 6 = 12.$$

当且仅当 $x+1 = \frac{9}{x+1}$, 即 $x = 2$ 时, 等号成立.

故 $a < 12$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $\{a | 0 < a < 12\}$.

专题一 集合与常用逻辑用语、 二次函数与不等式(B卷)

1. C 解析: 原命题是存在量词命题, 其否定是全称量词命题, 将原命题中的“ $\exists$ ”改为“ $\forall$ ”, 再对其结论进行否定, 故 C 选项正确. 故选 C.

2. B 解析: $N = \left\{ x \mid x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 $x = \frac{n}{2} -$

$$\frac{1}{3} = \frac{3n-2}{6}, n \in \mathbf{Z}. P = \left\{ x \mid x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ 则}$$

$$x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3p+1}{6}, p \in \mathbf{Z}. \text{ 而当 } p = n-1 \text{ 时,}$$

$$\frac{3n-2}{6} = \frac{3(n-1)+1}{6} = \frac{3p+1}{6}, \text{ 故 } N = P. M =$$

$$\left\{ x \mid x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ 则 } x = m + \frac{1}{6} = \frac{6m+1}{6},$$

$$m \in \mathbf{Z}. \text{ 当 } 2m = p \text{ 时, } \frac{6m+1}{6} = \frac{3p+1}{6}. \text{ 则 } M \subseteq N, \text{ 所}$$

以 $M \subseteq N = P$. 故选 B.

3. A 解析: 集合 $M = \{x | x < 4\}$, 集合 $N = \{x | x^2 - 2x < 0\} = \{x | 0 < x < 2\}$, $M \cup N = M$, A 正确;

$\complement_{\mathbf{R}} N = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $\therefore M \cup \complement_{\mathbf{R}} N = \mathbf{R} \neq M$,

B 错误; $\complement_{\mathbf{R}} M = \{x | x \geq 4\}$, $\therefore N \cup \complement_{\mathbf{R}} M = \{x | 0 < x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\} \neq \mathbf{R}$. C 错误; $M \cap N = \{x | 0 < x < 2\} \neq M$,

D 错误. 故选 A.

4. B 解析: 由集合 $A = \{x | mx^2 - 2x + m = 0\}$ 仅有两个子集, 可知集合 A 中只有一个元素, ①当 $m = 0$ 时, 方程为 $-2x = 0$, 解得 $x = 0$. 此时 $A = \{0\}$, 仅有两个子集; ②当 $m \neq 0$ 时, 方程有两个相等实根, 所以 $\Delta = 4 - 4m^2 = 0$, 解得 $m = \pm 1$, 所以实数 m 的取值构成的集合为 $\{0, 1, -1\}$. 故选 B.

5. A 解析: $\because a > 0, b > 0, \therefore 4 \geq a + b \geq 2\sqrt{ab}, \therefore 2 \geq \sqrt{ab}, \therefore ab \leq 4$, 即 $a + b \leq 4 \Rightarrow ab \leq 4$, 充分性成立. 若 $a = 4, b = \frac{1}{4}$, 则 $ab = 1 \leq 4$, 但 $a + b = 4 + \frac{1}{4} > 4$, 即 $ab \leq 4 \nRightarrow a + b \leq 4$, 必要性不成立. $\therefore "a + b \leq 4"$ 是 $"ab \leq 4"$ 的充分不必要条件. 故选 A.

6. A 解析: $\because$ 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta\} (\alpha > 0)$. $\therefore \alpha + \beta$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实数根, 且 $a < 0, \therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$. 不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 可化为 $\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 < 0, \therefore \alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 < 0$, 即 $(\alpha x - 1)(\beta x - 1) < 0, \therefore 0 < \alpha < \beta, \therefore \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0. \therefore \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0, \therefore c < 0, \therefore$ 不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}\right\}$. 故选 A.

7. B 解析: 任取其中两次加油, 假设第一次的油价为 m 元/升, 第二次的油价为 n 元/升. 第一种方案的均价: $\frac{30m + 30n}{60} = \frac{m + n}{2} \geq \sqrt{mn}$ (当且仅当 $m = n$ 时取等号). 第二种方案的均价: $\frac{\frac{400}{200} + \frac{400}{200}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{2mn}{m + n} \leq \sqrt{mn}$ (当且仅当 $m = n$ 时取等号). 综上可知, 第二种方案更划算. 故选 B.

8. D 解析: 当 $a = 1$ 时, 不等式 $(x + a)(x + 1) < 0$ 的解集为 $\emptyset$, 不满足 $-2 < x < -1$ 是其充分不必要条件. 当 $a < 1$ 时, 不等式 $(x + a)(x + 1) < 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < -a\}$, 不满足 $-2 < x < -1$ 是其充分不必要条件. 当 $a > 1$ 时, 不等式 $(x + a)(x + 1) < 0$ 的解集为 $\{x | -a < x < -1\}$. 要使 $-2 < x < -1$ 是其充分不必要条件, 只需 $\{x | -2 < x < -1\} \subsetneq \{x | -a < x < -1\}$, 所以 $-a < -2$, 解得 $a > 2$. 故选 D.

9. ABD 解析: 对于 A, 显然 $x = 0$ 时不成立; 对于 B, $\forall x < 0, |x| > x$, 故 B 为假命题; 对于 C, 当 $x = -1$ 时成立; 对于 D, 若 $x^2 = 2$, 则 $x = \pm\sqrt{2}$, 是无理数. 故选 ABD.

10. ACD 解析: 关于 x 的不等式 $x^2 - ax + a > 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 等价于 $\Delta < 0$, 即 $a^2 - 4a < 0$. 解得 $0 < a < 4$. 要求“关于 x 的不等式 $x^2 - ax + a > 0$ ”对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立的一个充分不必要条件只需找到集合 $\{a | 0 < a < 4\}$ 的真子集, 对四个选项进行逐一验证, 故选 ACD.

11. ACD 解析: 选项 A, 因为 a, b 是正实数, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 故 A 正确; 选项 B, 因为 a, b 是正实数, 所以 $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 故 B 不正确; 选项 C, 因为 a, b 是正实数, 所以 $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 故 C 正确; 选项 D, 因为 a, b 是正实数, 所以 $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 故 D 正确. 故选 ACD.

12. ABD 解析: 因为 $y = x^2 + ax + b (a > 0)$ 有且只有一个零点, 故可得 $\Delta = a^2 - 4b = 0$, 即 $a^2 = 4b > 0, b > 0$. 对于 A, $a^2 - b^2 \leq 4$ 等价于 $b^2 - 4b + 4 \geq 0$, 显然 $(b - 2)^2 \geq 0$, 故 A 正确; 对于 B, $a^2 + \frac{1}{b} = 4b + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{4b \times \frac{1}{b}} = 4$, 故 B 正确; 对于 C, 因为不等式 $x^2 + ax - b < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 故可得 $x_1 x_2 = -b < 0$, 故 C 错误; 对于 D, 因为不等式 $x^2 + ax + b < c$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $|x_1 - x_2| = 4$, 则方程 $x^2 + ax + b - c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 故可得 $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 - 4(b - c)} = \sqrt{4c} = 2\sqrt{c} = 4$, 故可得 $c = 4$, 故 D 正确. 故选 ABD.

13. ① 解析: 由题意知“无皮” $\Rightarrow$ “无毛”, 所以“无皮”是“无毛”的充分条件. 故答案为①.

14. $\{x | x = 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$ 解析: $\because A = \{x | 0 < x < 2\}, B = \{x | x \geq 0\}, \therefore A \cup B = \{x | x \geq 0\}, A \cap B = \{x | 0 < x < 2\}, \therefore A \otimes B = \{x | x = 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$.

15. $\{m | m \leq 9\}$ 解析: 由于 $x + 4y - xy = 0$, 即 $x + 4y = xy (x > 0, y > 0)$, 等式两边同时除以 xy 得 $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 由基本不等式可得 $x + y = (x + y) \cdot \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 5 = 9$, 当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = 2y$ 时, 等号成立, 所以 $x + y$ 的最小值为 9, 因此 $m \leq 9$.

16. 130 15 解析: ① 当 $x = 10$ 时, 顾客一次购买草

莓和西瓜各 1 盒, 订单金额为 $60+80=140$ (元), 所以顾客需要支付 $140-10=130$ (元). ②在促销活动中, 设订单总金额为 m 元, 当 $0 < m < 120$ 时, 显然符合题意; 当 $m \geq 120$ 时, 可得 $(m-x) \times 80\% \geq m \times 70\%$, 即有 $x \leq \frac{m}{8}$, 又 $m \geq 120$, 所以 $x \leq \frac{120}{8} = 15$, 故 x 的最大值为 15.

17. 解: (1) 由 $A \cap B = \{a_3, a_4\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, 得 a_3, a_4 是两个正整数的平方,

又 $a_3 + a_4 = 13$, 且 $a_3 < a_4$,

所以 $a_3 = 4, a_4 = 9$.

(2) 由 (1) 可得, $A \cap B = \{4, 9\}$.

则 A 中必有元素 2, 3,

B 中必有元素 16, 81,

设 A 中最后一个元素为 x , 则 B 中还有元素 x^2 ,

即 $A = \{2, 3, 4, 9, x\}$, $B = \{4, 9, 16, 81, x^2\}$,

则 $A \cup B = \{2, 3, 4, 9, 16, 81, x, x^2\}$,

依题意, 有 $2+3+4+9+16+81+x+x^2=247$,

解得 $x=11$,

则 $A = \{2, 3, 4, 9, 11\}$.

18. 解: (1) 由 $2x^2 - 5x - 12 \geq 0$,

解得 $x \leq -\frac{3}{2}$ 或 $x \geq 4$,

$\therefore A = \left\{x \mid x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq 4\right\}$,

$\complement_{\mathbb{R}} A = \left\{x \mid -\frac{3}{2} < x < 4\right\}$.

又 $B = \{y \mid y = x^2 + 3x + 2, x > 0\} = \{y \mid y > 2\}$,

$\therefore A \cap B = \{x \mid x \geq 4\}$,

$(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \left\{x \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$.

(2) $\because (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap C = C$,

$\therefore C \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$,

当 $C = \emptyset$, 即 $m-2 > 2m$ 时, 满足 $C \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$,

得 $m < -2$,

当 $C \neq \emptyset$ 时, 要使 $C \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$,

则 $\begin{cases} m-2 \leq 2m, \\ m-2 > -\frac{3}{2}, \text{ 解得 } \frac{1}{2} < m < 2. \\ 2m < 4, \end{cases}$

综上, m 的取值范围为 $\left\{m \mid m < -2 \text{ 或 } \frac{1}{2} < m < 2\right\}$.

19. 证明: (1) 因为 $c > a > b > 0$,

所以 $c-a > 0, c-b > 0$,

$c-a < c-b, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$,

所以 $\frac{c-a}{a} < \frac{c-b}{b}$,

所以 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$.

(2) $\because x > 0, y > 0, 2x+y=1$,

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)(2x+y) = 4 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 4+4=8$,

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$, 即 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号,

又 $-\sqrt{2xy} \geq -\frac{2x+y}{2} = -\frac{1}{2}$,

当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号,

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \sqrt{2xy} \geq \frac{15}{2}$,

当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号.

20. 解: (1) $x \in M$ 或 $x \in P \Rightarrow x \in \{x \mid x < 3\}$,

$x \in (M \cap P) \Rightarrow x \in \{x \mid x < 2\}$,

所以 $x \in M$ 或 $x \in P \nRightarrow x \in (M \cap P)$,

但 $x \in (M \cap P) \Rightarrow x \in M$ 或 $x \in P$.

故“ $x \in M$ 或 $x \in P$ ”是“ $x \in (M \cap P)$ ”的必要不充分条件.

(2) 当 $m \neq 0$ 时, 不等式 $4mx^2 - 2mx - 1 < 0$ 恒成

立 $\Rightarrow \begin{cases} 4m < 0, \\ 4m^2 + 16m < 0 \end{cases} \Rightarrow -4 < m < 0$.

当 $m=0$ 时, 不等式 $4mx^2 - 2mx - 1 < 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立.

故使不等式 $4mx^2 - 2mx - 1 < 0$ 恒成立的充要条件是 $-4 < m \leq 0$.

21. 解: (1) $\because x^2 - (a+2)x + 4 \leq 4 - 2a (a \in \mathbb{R})$,

即 $x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0$,

$\therefore (x-a)(x-2) \leq 0$,

当 $a < 2$ 时, $a \leq x \leq 2$.

当 $a=2$ 时, $x=2$.

当 $a > 2$ 时, $2 \leq x \leq a$.

综上所述, 当 $a < 2$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid a \leq x \leq 2\}$.

当 $a=2$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x=2\}$.

当 $a > 2$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid 2 \leq x \leq a\}$.

(2) $1 < x \leq 4$ 时, 不等式 $x^2 - (a+2)x + 4 \geq -a-1$ 恒成立,

即 $x^2 - (a+2)x + 5 + a \geq 0$ 恒成立,

即 $a(x-1) \leq x^2 - 2x + 5$ 恒成立,

$\therefore$ 当 $1 < x \leq 4$ 时, $a \leq \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} = x-1 + \frac{4}{x-1}$,

$\therefore 1 < x \leq 4, \therefore 0 < x-1 \leq 3$.

$\therefore x-1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$, 当且仅当

$x-1 = \frac{4}{x-1}$, 即 $x=3$ 时取等号,

$\therefore a \leq 4$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a \leq 4\}$.

22. 解: (1) $\because x < \frac{5}{4}, \therefore 4x-5 < 0$, 故 $5-4x > 0$.

$$y = 4x - 1 + \frac{1}{4x-5} = -\left(5-4x + \frac{1}{5-4x}\right) + 4.$$

$$\because 5-4x + \frac{1}{5-4x} \geq 2\sqrt{(5-4x) \cdot \frac{1}{5-4x}} = 2,$$

$$\therefore y \leq -2 + 4 = 2,$$

当且仅当 $5-4x = \frac{1}{5-4x}$, 即 $x=1$ 或 $x=\frac{3}{2}$ (舍)

时, 等号成立.

故当 $x=1$ 时, $y_{\max} = 2$.

$$(2) \because x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1,$$

$$\therefore x + y = \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right)(x + y) = \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} + 10 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} + 10 = 6 + 10 = 16.$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{9x}{y}$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 即 $\begin{cases} x=4, \\ y=12 \end{cases}$ 时等号

成立.

$\therefore$ 当 $x=4, y=12$ 时, $(x+y)_{\min} = 16$.

$$(3) \because a > 0, b > 0, \text{ 且 } a^2 + \frac{b^2}{2} = 1,$$

$$\therefore a \sqrt{1+b^2} = a \sqrt{2 \times \frac{1+b^2}{2}} = \sqrt{2} \cdot a \cdot$$

$$\sqrt{\frac{1+b^2}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1+b^2}{2} + a^2\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $a = \sqrt{\frac{1+b^2}{2}}$ 且 $a^2 + \frac{b^2}{2} = 1$, 即 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立,

$$\therefore \text{当 } a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } (a \sqrt{1+b^2})_{\max} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

专题二 函数的概念与性质(A卷)

1. A 解析: 因为函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $m^2 - 5m + 4 < 0$, 所以 $1 < m < 4$. 因为 $m \in \mathbf{Z}$, 所以

$m=2$ 或 3 . 当 $m=2$ 时, $y=x^{-2}$ 为偶函数, 符合题意, 当 $m=3$ 时, $y=x^{-2}$ 为偶函数, 符合题意. 综上, $m=2$ 或 $m=3$.

2. A 解析: 因为幂函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $y=x^3+1$ 在 $x \in [0, 2]$ 上单调递增, 因此 $y_{\min} = 0^3 + 1 = 1$. 故选 A.

3. C 解析: 由图知: ①表示 $y=\sqrt{x}$, ②表示 $y=x$, ③表示 $y=x^2$, ④表示 $y=x^3$. 故选 C.

4. C 解析: $\because f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2), \therefore x_1, x_2$ 关于 $f(x)$ 的对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称, $\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $\therefore f(x_1 + x_2) = f\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = c$. 故选 C.

5. C 解析: 函数 $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x}$ 有意义, 则必有 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$. 故函数 $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x}$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$. 故选 C.

6. A 解析: 由抽象函数的定义域可知,

$$\begin{cases} 211 \leq 2\,018x \leq 985, \\ 211 \leq 2\,021x \leq 985, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{211}{2\,018} \leq x \leq \frac{985}{2\,021},$$

所以所求函数的定义域为 $\left[\frac{211}{2\,018}, \frac{985}{2\,021}\right]$.

7. D 解析: 因为图象关于点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 对称, 则 $f(x) +$

$$f(1-x) = 2, \text{ 令 } S = f\left(\frac{1}{2\,022}\right) + f\left(\frac{2}{2\,022}\right) +$$

$$f\left(\frac{3}{2\,022}\right) + \cdots + f\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right), S = f\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right) +$$

$$f\left(\frac{2\,020}{2\,022}\right) + f\left(\frac{2\,019}{2\,022}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2\,022}\right), \text{ 两式相加}$$

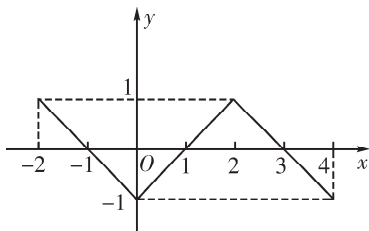
得 $2S = 2\,021 \times 2$, 所以 $S = 2\,021$.

8. C 解析: 若 $x \in [-2, 0]$, 则 $-x \in [0, 2]$, $\because$ 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x-1$, $\therefore f(-x) = -x-1$, $\therefore f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x) = -x-1 = f(x)$, 即当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = -x-1$. $\therefore f(x) = \begin{cases} x-1, 0 \leq x \leq 2, \\ -x-1, -2 \leq x < 0, \end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 在 $[-2, 4]$ 上

的图象如图所示. 当 $x \in [-1, 3]$ 时, 不等式

$$xf(x) > 0 \text{ 等价于 } \begin{cases} x > 0, \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0, \\ f(x) < 0, \end{cases} \text{ 即 } 1 < x <$$

3 或 $-1 < x < 0$. 故选 C.



9. ABCD 解析: $\because \pi$ 为无理数, $\therefore D(\pi) = 0$, A 正确;
 $\because$ 有理数和无理数构成了全体实数, $\therefore D(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$, B 正确; 若 x 为有理数, 则 $2-x$ 为有理数, 则 $D(x) = D(2-x) = 1$, 若 x 为无理数, 则 $2-x$ 为无理数, 则 $D(x) = D(2-x) = 0$, $\therefore D(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, C 正确; 同理可证得 $D(x) = D(4-x)$, $\therefore D(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, D 正确. 故选 ABCD.

10. BD 解析: 由该车间连续 5 h 的生产总产量 y (单位: kg) 与时间 x (单位: h) 的函数图象, 得前 3 h 内, 每小时的产量逐步减少, 故 A 错误, B 正确; 后 2 h 均没有生产, 故 C 错误, D 正确. 故选 BD.

11. BC 解析: 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 1, \\ -x+2, & x \geq 1, \end{cases}$ 定义域是 $[-2, +\infty)$, 故 A 错误; $-2 \leq x < 1$ 时 $f(x) = x^2$, 值域为 $[0, 4]$, $x \geq 1$ 时, $f(x) = -x+2$, 值域为 $(-\infty, 1]$, 故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 4]$, 故 B 正确; 由值的分布情况可知, $f(x) = 2$ 在 $x \geq 1$ 上无解, 故 $-2 \leq x < 1$, 即 $f(x) = x^2 = 2$, 得到 $x = -\sqrt{2}$, 故 C 正确; $-2 \leq x < 1$ 时, 令 $f(x) = x^2 < 1$, 解得 $x \in (-1, 1)$, $x \geq 1$ 时, 令 $f(x) = -x+2 < 1$, 解得 $x \in (1, +\infty)$, 故 $f(x) < 1$ 的解集为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 故 D 错误. 故选 BC.

12. ABC 解析: 由 $y = f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $f(1+x-1) = f(1-x-1)$, 即 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, A 正确; 由 $f(x+4) - f(x) = 2f(2)$, 令 $x = -2$, 可得 $f(2) = 0$, 则 $f(x+4) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期 $T = 4$, B 正确; $f(2022) = f(4 \times 505 + 2) = f(2) = 0$, 故 C 正确; 又 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增, 则在 $(-2, 0)$ 上递减, 由周期 $T = 4$, 则 $f(x)$ 在 $(-4, -2)$ 上单调递增, 故 D 错误.

13. 6 解析: 由 $g(x) = f(x) + 9$, $g(-2) = 3$, 得 $f(-2) + 9 = 3$, 所以 $f(-2) = -6$. 又 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(2) = 6$.

14. -1 解析: 由题意知, 幂函数 $f(x) = x^k$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 k 为负数, 则 $k = -2, -1$,

$-\frac{1}{2}$, 又由函数 $f(x) = x^k$ 为奇函数, 则 $k = -1$, 故答案为 -1.

15. $[-2, \frac{1}{2}]$ 解析: 因为函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 又由 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $y = f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上也是单调递减函数, 又因为不等式 $f(2m^2 + m) + f(2m - 2) \geq f(0)$, 即 $f(2m^2 + m) + f(2m - 2) \geq 0$, 即 $f(2m^2 + m) \geq -f(2m - 2) = f(2 - 2m)$, 可得 $2m^2 + m \leq 2 - 2m$, 即 $2m^2 + 3m - 2 \leq 0$, 解得 $-2 \leq m \leq \frac{1}{2}$, 即实数 m 的取值范围为 $[-2, \frac{1}{2}]$.

16. 16 解析: 由题意, 分流前每年创造的总产值为 100t 万元, 分流 x 人后, 每年创造的总产值为 $(100 - x)(1 + 1.2x\%)t$ 万元, 由 $\begin{cases} 0 < x < 100, \\ (100 - x)(1 + 1.2x\%)t \geq 100t, \end{cases}$ 解得 $0 < x \leq \frac{50}{3}$. 因为 $x \in \mathbf{N}^*$, 所以 x 的最大值为 16, 故答案为 16.

17. 解: (1) 因为 $f(x)$ 是一次函数, 所以设 $f(x) = kx + b$, 又因为 $3f(x+1) - f(x) = 2x + 9$, 所以 $3[k(x+1) + b] - (kx + b) = 2x + 9$, 整理, 得 $2kx + 3k + 2b = 2x + 9$, 故 $\begin{cases} 2k = 2, \\ 3k + 2b = 9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1, \\ b = 3, \end{cases}$ 所以 $f(x) = x + 3$.

(2) 令 $\sqrt{x} + 1 = t (t \geq 1)$, 则 $x = (t-1)^2$, 所以 $f(t) = (t-1)^2 + 1 = t^2 - 2t + 2 (t \geq 1)$, 即 $f(x) = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$.

18. 解: (1) $\because$ 函数 $h(x) = (m^2 - 5m + 1)x^{m+1}$ 为幂函数,

$\therefore m^2 - 5m + 1 = 1$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 5$,

当 $m = 0$ 时, $h(x) = x$, $h(x)$ 为奇函数,

当 $m = 5$ 时, $h(x) = x^6$, $h(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 为奇函数, $\therefore m = 0$.

(2) 由 (1) 可知, $h(x) = x$,

则 $g(x) = x + \sqrt{1-2x}$, $x \in [0, \frac{1}{2})$,

令 $\sqrt{1-2x} = t$, 则 $x = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$, $t \in (0, 1]$,

则 $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1$, $t \in (0, 1]$,

函数 $f(t)$ 为开口向下, 对称轴为 $t = 1$ 的抛物线,

$\therefore$ 当 $t = 0$ 时, 函数 $f(0) = \frac{1}{2}$,

当 $t=1$ 时, 函数 $f(t)$ 取得最大值为 1,

$\therefore f(t)$ 的值域为 $(\frac{1}{2}, 1]$,

故函数 $g(x)$ 的值域为 $(\frac{1}{2}, 1]$.

19. 解: (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

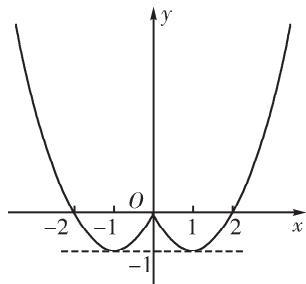
$\therefore f(x)$ 为偶函数, $f(x) = f(-x)$.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$,

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(x) = f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$,

所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x, & x < 0. \end{cases}$

(2) 由第(1)问, 根据二次函数性质, 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



要使函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = m$ 的图象有四个交点, 则 $m \in (-1, 0)$.

20. 解: (1) 由题意, $y = x + 80t - (20 + 9x + 50t) = 30t - 8x - 20 = 30k \cdot (6 - \frac{12}{x+4}) - 8x - 20 =$

$$180k - \frac{360k}{x+4} - 8x - 20,$$

即 $y = 180k - \frac{360k}{x+4} - 8x - 20, x \in [0, 10], k \in [0.5, 1]$.

$$(2) y = 180k - \frac{360k}{x+4} - 8x - 20 = 180k + 12 - 8\left[(x+4) + \frac{45k}{x+4}\right],$$

因为 $x \in [0, 10]$, 所以 $4 \leq x+4 \leq 14$,

$$\text{所以 } (x+4) + \frac{45k}{x+4} \geq 2\sqrt{(x+4) \times \frac{45k}{x+4}} = 6\sqrt{5k},$$

当且仅当 $x+4 = \frac{45k}{x+4}$, 即 $x = 3\sqrt{5k} - 4$ 时, 等号成立.

$$\text{所以 } y = 180k + 12 - 8\left[(x+4) + \frac{45k}{x+4}\right] \leq 180k + 12 - 48\sqrt{5k},$$

故政府补贴为 $(3\sqrt{5k} - 4)$ 万元时能使 A 公司的

防护服利润达到最大, 最大为 $(180k + 12 - 48\sqrt{5k})$ 万元.

21. 解: (1) $\because$ 当 $x = \frac{7}{16}$ 时, $4x = \frac{7}{4}$,

$$\therefore f_1\left(\frac{7}{16}\right) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1,$$

$$g\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{7}{4} - \left[\frac{7}{4}\right] = \frac{3}{4},$$

$$\therefore f_2\left(\frac{7}{16}\right) = f_1\left[g\left(\frac{7}{16}\right)\right] = f_1\left(\frac{3}{4}\right) = [3] = 3.$$

$$(2) \because f_1(x) = [4x] = 1, g(x) = 4x - [4x] = 4x - 1,$$

$$\therefore f_2(x) = f_1(4x - 1) = [16x - 4] = 3.$$

$$\therefore \begin{cases} 1 \leq 4x < 2, \\ 3 \leq 16x - 4 < 4, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{7}{16} \leq x < \frac{1}{2}.$$

故满足题意的 x 的取值范围为 $[\frac{7}{16}, \frac{1}{2})$.

22. 解: (1) 由题意知 $p(t) = \begin{cases} 1200 - k(10-t)^2, & 2 \leq t < 10, \\ 1200, & 10 \leq t \leq 20, \end{cases} (t \in \mathbf{N}^*, k \text{ 为常数}),$

因为 $p(2) = 1200 - k(10-2)^2 = 1200 - 64k = 560$, 则 $k = 10$,

$$\text{所以 } p(t) = \begin{cases} -10t^2 + 200t + 200, & 2 \leq t < 10, \\ 1200, & 10 \leq t \leq 20 \end{cases} (t \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 由 $Q = \frac{6p(t) - 3360}{t} - 360$, 得

$$Q = \begin{cases} \frac{6(-10t^2 + 200t + 200) - 3360}{t} - 360, & 2 \leq t < 10, \\ \frac{3840}{t} - 360, & 10 \leq t \leq 20, \end{cases}$$

$$\text{即 } Q = \begin{cases} 840 - 60\left(t + \frac{36}{t}\right), & 2 \leq t < 10, \\ \frac{3840}{t} - 360, & 10 \leq t \leq 20, \end{cases} (t \in \mathbf{N}^*),$$

① 当 $2 \leq t < 10$ 时, $Q = 840 - 60\left(t + \frac{36}{t}\right) \leq 840 - 60 \times 12 = 120$, 当且仅当 $t = 6$ 时等号成立.

② 当 $10 \leq t \leq 20$ 时, $Q = \frac{3840}{t} - 360$ 在 $[10, 20]$

上单调递减, 当 $t = 10$ 时, Q 取最大值 24.

由①②可知, 当发车时间间隔为 $t = 6$ min 时, 该时段这条线路每分钟的净收益最大, 最大为 120 元.

专题二 函数的概念与性质(B卷)

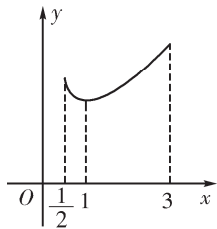
1. A 解析: 依题意 $f(x+1) = \frac{1}{x+1}$. 故选 A.

2. C 解析: $\because f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$, 对于 A, $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x)g(x)$, 故 $f(x)g(x)$ 是奇函数, 故 A 错误; 对于 B, $|f(-x)|g(-x) = |-f(x)| \cdot g(x) = |f(x)|g(x)$, 故 $|f(x)|g(x)$ 是偶函数, 故 B 错误; 对于 C, $f(-x)|g(-x)| = -f(x)|g(x)|$, 故 $f(x)|g(x)|$ 是奇函数, 故 C 正确; 对于 D, $|f(-x)g(-x)| = |f(x)g(x)|$, 故 $|f(x)g(x)|$ 是偶函数, 故 D 错误. 故选 C.

3. D 解析: 由题意得, $2x + y = 20$, 即 $y = 20 - 2x$, 由 $\begin{cases} x + x > y, \\ y > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2x > 20 - 2x, \\ 20 - 2x > 0, \end{cases}$ 解得 $5 < x < 10$. 故选 D.

4. B 解析: 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 所以 $-1 < x < 1$, 所以 $-1 < 2x - 1 < 1$, 解得 $0 < x < 1$, 所以 $g(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$. 故选 B.

5. B 解析: 设 $f(x) = t$, 则 $t \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$, 从而 $F(x)$ 的值域就是函数 $y = t + \frac{1}{t}, t \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的值域, 由“对勾函数”的图象可知, $2 \leq F(x) \leq \frac{10}{3}$. 故选 B.



6. C 解析: 因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (a-1)x, & x \geq 1, \\ (3-a)x + 1, & x < 1 \end{cases}$ 为增函数, 则 $\begin{cases} \frac{1-a}{2} \leq 1, \\ 3-a > 0, \\ 3-a+1 \leq 1+a-1, \end{cases}$ 解得 $2 \leq a < 3$. 故选 C.

7. B 解析: $\because$ 当 $-1 \leq x < 3$ 时, $f(x) = x, \therefore f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(-1) = -1, \therefore f(x+6) = f(x), \therefore f(x) = f(x-6), f(3) = f(-3), f(4) = f(-2), f(5) = f(-1) = -1, f(6) = f(0) = 0$, 当 $-3 \leq x < -1$ 时, $f(x) = -(x+2)^2, \therefore f(3) = f(-3) = -1, f(4) = f(-2) = 0, \therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1, \therefore f(x+6) = f(x), \therefore f(x+6k) = f(x), k \in \mathbf{Z}, \therefore f(1+6k) + f(2+6k) + f(3+6k) + f(4+6k) + f(5+6k) + f(6+6k) = 1, \therefore 2\ 021 = 6 \times 337 - 1, \therefore f(1) + f(2) +$

$f(3) + \dots + f(2\ 021) = 337 - f(6) = 337$. 故选 B.

8. C 解析: 图②中的图象是在图①的基础上, 去掉函数 $y = f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的部分, 然后将 y 轴左侧图象翻折到 y 轴右侧, y 轴左侧图象不变得来的, $\therefore$ 图②中的图象对应的函数可能是 $y = f(-|x|)$. 故选 C.

9. BD 解析: A 选项, $f(x) = x^3$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 在 $(0, +\infty)$ 上显然单调递增, 但 $f(-x) = -x^3 \neq f(x)$, 即 $f(x) = x^3$ 不是偶函数, 其图象不关于 y 轴对称, A 排除; B 选项, $f(x) = x^2$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 在 $(0, +\infty)$ 上显然单调递增, 且 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 所以 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 即 B 正确; C 选项, $y = x^{-2}$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 在 $(0, +\infty)$ 上显然单调递减, C 排除; D 选项, $f(x) = |x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 在 $(0, +\infty)$ 上显然单调递增, 且 $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, 所以 $f(x) = |x|$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 即 D 正确. 故选 BD.

10. ABD 解析: 因为 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 满足 $f(x+1) = -f(x), f(x+2) = f(x+1+1) = -f(x+1) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=2$, 所以 A 正确; 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(-x) = f(x+2)$, 所以对称轴 $x = \frac{-x+x+2}{2} = 1$, 即关于 $x=1$ 对称, 所以 B 正确; 由函数 $f(x)$ 为偶函数关于 y 轴对称, 又在 $[-1, 0]$ 上是增函数, 所以在 $[0, 1]$ 上单调递减, 故 C 不正确; 因为 $f(x+1) = -f(x)$, 令 $x = -\frac{1}{2}$, 得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 可得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 所以 D 正确. 故选 ABD.

11. BD 解析: 因为甲在公园休息的时间是 10 min, 所以只走了 50 min, A 错误; 由题中图象知, B 正确; 甲同学从家到公园所用的时间比从公园到乙同学家所用的时间长, 而距离相等, 所以甲同学从家到公园的速度比从公园到乙同学家的速度慢, C 错误; 当 $0 \leq x \leq 30$ 时, 设 $y = kx (k \neq 0)$, 则 $2 = 30k$, 解得 $k = \frac{1}{15}$, D 正确. 故选 BD.

12. ACD 解析: 将点 $(4, 2)$ 代入函数 $f(x) = x^a$ 得, $2 = 4^a$, 则 $a = \frac{1}{2}$. 所以 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, 显然 $f(x)$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 A 正确. $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 不具有奇偶性, 所以 B 不正确. 当 $x > 1$ 时, $\sqrt{x} > 1$, 即 $f(x) > 1$, 所以

C 正确. 若 $0 < x_1 < x_2$ 时, $\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)^2 - f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2 = \frac{2\sqrt{x_1x_2}-x_1-x_2}{4} = -\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{4} < 0$, 即

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立, 所以 D 正确.

故选 ACD.

13. $-x^2+x+1$ 解析: 不妨设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) - 1 = x^2 - x - 1$, 又因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x) = x^2 - x - 1$, 即 $f(x) = -x^2 + x + 1$.

14. $\frac{2}{3}$ 解析: 由题意, 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x+4) = f(x)$ 成立, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, 所以 $f(2\ 020) + f(2\ 021) + f(2\ 022) = f(0) + f(1) + f(2)$. 又由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $x \in (-2, 0)$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = -f(-1) = -(3^{-1} - 1) = \frac{2}{3}$. 因为 $f(x+4) = f(x)$, 令 $x = -2$, 可得 $f(2) = f(-2) = -f(2)$, 解得 $f(2) = 0$. 所以 $f(2\ 020) + f(2\ 021) + f(2\ 022) = 0 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$.

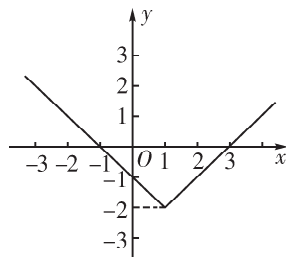
15. $(-3, -2) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$ 解析: 由题意可得, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的解集为 $(0, 2) \cup (3, +\infty)$. 由奇函数的性质可得, 当 $x > 0$ 时, $-f(-x) > -f\left(-\frac{1}{x}\right)$ 的解集为 $(2, 3)$, 令 $t = -x < 0$, 则 $-f(t) > -f\left(\frac{1}{t}\right)$ 的解集为 $(-3, -2)$, 即当 $x < 0$ 时, $f(x) < f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的解集为 $(-3, -2)$, 所以 $f(x) < f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的解集为 $(-3, -2) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$.

16. ①③ 解析: 对于①, 由图象可得, $f(1) = 0$, 所以 $f[f(1)] = f(0) = 3$, 故①正确; 对于②, $f(0) = f(4) = 3$, 且 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上为单调递增函数, 所以 $f(2) < f(4) = 3$, 所以 $f(2) < f(0)$, 故②错误; 对于③, 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $f(x) = 2|x-1| - x + 1 = 2(x-1) - x + 1 = x - 1$, $f(1) = 0$, $f(4) = 3$, 满足图象; 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x) = 2|x-1| - x + 1 = 2(1-x) - x + 1 = 3 - 3x$, $f(0) = 3$, $k = -3$, 满足图象, 故③正确; 对于④, 由题意得 $f(x) \leq a$ 的解集

为 $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$, 即 $f(x) = a$ 的根为 $\frac{1}{3}, 2$, 由③根据 $f(x)$ 解析式可得 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$, 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, 令 $x-1=2$, 解得 $x=3$, 所以解集为 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$, 故④错误. 故答案为①③.

17. 解: (1) $f(x) = |x-1| - 2 = \begin{cases} -x-1, & x \leq 1, \\ x-3, & x > 1. \end{cases}$

(2) $f(x)$ 的图象如下图所示:



(3) 由图可知, $f(x)$ 的值域为 $[-2, +\infty)$.

18. 解: (1) $\because f(x) = 2x - \frac{a}{x}$, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$,

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2a = 3$, 解得 $a = -1$.

(2) 由(1)得, $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 证明如下:

设任意 $x_1 > x_2 > 1$,

则 $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + \frac{1}{x_1} - 2x_2 - \frac{1}{x_2} = (x_1 - x_2) \left(\frac{2x_1x_2 - 1}{x_1x_2} \right)$,

$\because x_1 > x_2 > 1$,

$\therefore x_1 - x_2 > 0, 2x_1x_2 - 1 > 0$,

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

19. 解: (1) 幂函数 $y = f(x)$ 在其定义域上是严格增函数,

则 $\frac{2-m}{2m} > 0$, 即 $0 < m < 2$.

又 $m \in \mathbf{Z}$, 则 $m = 1$, 此时 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 满足在定义域 $[0, +\infty)$ 上是严格增函数, 所以 $m = 1$.

(2) 由(1)函数 $y = f(x)$ 在其定义域上是严格增函数,

根据 $f(|x|-2) < f\left(\frac{3}{x}\right)$,

则 $\begin{cases} \frac{3}{x} \geq 0, \\ |x|-2 \geq 0, \\ |x|-2 < \frac{3}{x}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x \geq 2, \\ |x|-2 < \frac{3}{x}. \end{cases}$

解得 $2 \leq x < 3$.

所以不等式 $f(|x| - 2) < f\left(\frac{3}{x}\right)$ 的解集为 $[2, 3)$.

20. 解: (1) 当 $x \leq 6$ 时, $y = 50x - 115$,

令 $50x - 115 > 0$, 解得 $x > 2.3$,

$\because x$ 是整数, $\therefore 3 \leq x \leq 6, x \in \mathbf{Z}$.

当 $x > 6$ 时, $y = [50 - 3(x - 6)] \cdot x - 115 = -3x^2 + 68x - 115$,

令 $-3x^2 + 68x - 115 > 0$, 有 $3x^2 - 68x + 115 < 0$, 结合 x 为整数得 $6 < x \leq 20, x \in \mathbf{Z}$.

$\therefore f(x) = \begin{cases} 50x - 115, & 3 \leq x \leq 6, x \in \mathbf{Z}, \\ -3x^2 + 68x - 115, & 6 < x \leq 20, x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

(2) 对于 $y = 50x - 115 (3 \leq x \leq 6, x \in \mathbf{Z})$, 显然当 $x = 6$ 时, $y_{\max} = 185$.

对于 $y = -3x^2 + 68x - 115 (6 < x \leq 20, x \in \mathbf{Z})$, 对称轴 $x = \frac{34}{3}$.

当 $x = 11$ 时, $y_{\max} = 270$.

$\because 270 > 185$, $\therefore$ 当每辆自行车的每天租金定为 11 元时, 才能使一天的净收入最多.

21. 解: (1) $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数,

则 $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} n = 0, \\ \frac{m+n}{2} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 1, \\ n = 0. \end{cases}$

经检验 $m = 1, n = 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数.

(2) 由 (1) 知, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数,

又因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数,

由 $f(a-1) + f(a^2-1) < 0$,

得 $f(a-1) < f(1-a^2)$,

所以 $a-1 < 1-a^2$, 即 $-2 < a < 1$, ①

又 $-1 \leq a-1 \leq 1$, 即 $0 \leq a \leq 2$, ②

$-1 \leq a^2-1 \leq 1$, 即 $0 \leq a^2 \leq 2$, ③

由 ①②③, 得 $0 \leq a < 1$.

故 a 的取值范围是 $[0, 1)$.

22. 解: (1) 当 $0 < x < 40$ 时, $L(x) = 5 \times 100x - 10x^2 - 100x - 2500 = -10x^2 + 400x - 2500$.

当 $x \geq 40$ 时, $L(x) = 5 \times 100x - 501x - \frac{10000}{x} +$

$4500 - 2500 = 2000 - \left(x + \frac{10000}{x}\right)$.

$\therefore L(x) = \begin{cases} -10x^2 + 400x - 2500, & 0 < x < 40, \\ 2000 - \left(x + \frac{10000}{x}\right), & x \geq 40. \end{cases}$

(2) 当 $0 < x < 40$ 时, $L(x) = -10(x-20)^2 + 1500$.

$\therefore$ 当 $x = 20$ 时, $L(x)_{\max} = L(20) = 1500$.

当 $x \geq 40$ 时, $L(x) = 2000 - \left(x + \frac{10000}{x}\right) \leq$

$2000 - 2\sqrt{x \cdot \frac{10000}{x}} = 2000 - 200 = 1800$.

当且仅当 $x = \frac{10000}{x}$, 即 $x = 100$ 时,

$L(x)_{\max} = L(100) = 1800 > 1500$.

$\therefore$ 当 $x = 100$ 时, 即 2022 年生产 100 百辆时, 该企业获得利润最大, 且最大利润为 1800 万元.

专题三 指数、对数函数的综合运用(A 卷)

1. B 解析: 因为函数 $f(x)$ 为单调递增函数, 且 $f(2) = e - 2 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, 所以零点所在的区间是 $(1, 2)$. 故选 B.

2. B 解析: 由 $\left(\frac{1}{5}\right)^a = 3$, 得 $a = \log_{\frac{1}{5}} 3 = -\log_5 3$,

$\therefore a - \log_5 \frac{\sqrt{15}}{15} = -\log_5 3 + \log_5 15 = -\log_5 3 + \log_5 5 + \log_5 3 = 1$. 故选 B.

3. C 解析: $f(-2) = \log_2 4 = 2$, $f(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4$, 故 $f(-2) + f(\ln 4) = 6$, 故选 C.

4. D 解析: 因为 $\log_4 \frac{1}{5} < \log_4 1 = 0$, $0 < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$, $3^{0.6} > 1$, 所以 $a < b < c$. 故选 D.

5. D 解析: $\because$ 奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(x)$, $\therefore f(x) = f(1-x) = -f(x-1)$, 即 $f(x+1) = -f(x)$, 则 $f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 所以 $f\left(\frac{5}{2}\right) =$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \log_2 1 = 0$. 故选 D.

6. D 解析: 由题可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = -(e^{-x} + e^x)x^3 = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 由此可排除选项 A, B; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = (e^x + e^{-x})x^3 > 0$, 由此可排除选项 C. 故选 D.

7. C 解析: 由题意, 函数 $f(x)$ 对任意的 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 即函数 $f(x) = \begin{cases} a^{x-1}, & x < 1, \\ (a-2)x + 3a, & x \geq 1 \end{cases}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 可得

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a - 2 < 0, \\ 1 \geq a - 2 + 3a, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a \leq \frac{3}{4}. \text{ 故选 C.}$$

8. D 解析: 因为 $f(x) = \lg(9x^2 + 1) + x^2 - 1$, 所以 $f(-x) = \lg(9x^2 + 1) + x^2 - 1 = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(1) = 1$, 由 $f(\log_3 x) + f\left(\log_3 \frac{1}{x}\right) \leq 2$, 得 $f(\log_3 x) + f(-\log_3 x) \leq 2$, 即 $2f(\log_3 x) \leq 2$, 所以 $f(\log_3 x) \leq 1$, 即 $f(\log_3 x) \leq f(1)$. 所以 $|\log_3 x| \leq 1$, 解得 $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$. 故选 D.

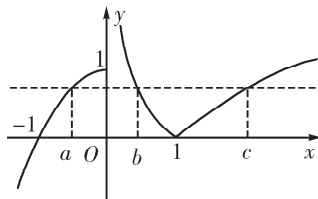
9. BC 解析: 对于 A: $f(\log_2 3) = 2^{\log_2 3} + \frac{1}{2^{\log_2 3}} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, 错误; 对于 B: 令 $t = 2^x > 0$, 则 $f(x) = g(t) = t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$, 当且仅当 $t = 1$, 即 $x = 0$ 时取等号, 正确; 对于 C: $f(-x) = 2^{-x} + \frac{1}{2^{-x}} = 2^x + \frac{1}{2^x} = f(x)$ 且 $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 正确; 对于 D: 令 $t = 2^x > 0$, $f(x) = g(t) = t + \frac{1}{t}$, 则 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 错误. 故选 BC.

10. BC 解析: 对于 A: $f(x) = \frac{1}{x}$ 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 为奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 错误; 对于 B: $f(x) = e^{-x} - e^x$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = e^x - e^{-x} = -f(x)$, 即 $f(x) = e^{-x} - e^x$ 为奇函数, 又函数 $y = e^{-x}$ 与 $y = -e^x$ 在定义域上单调递减, 所以 $f(x) = e^{-x} - e^x$ 在定义域上单调递减, 故 B 正确; 对于 C: $f(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left(\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数, 又 $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ 单调递减, 故 C 正确; 对于 D: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$, 故函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 为奇函数, 又 $f(x) = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 + \frac{-2}{e^x + 1}$, 所以 $f(x) = 1 + \frac{-2}{e^x + 1}$ 在定义域上单调递增, 故 D 错误. 故

选 BC.

11. ABC 解析: 对于 A: $\frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^2}{a^{\frac{5}{6}}} = \frac{a^2}{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{7}{6}}$, 故 A 正确; 对于 B: $\frac{9^a \cdot 3^b}{\sqrt{3^a}} = \frac{3^{2a} \cdot 3^b}{3^{\frac{a}{2}}} = 3^{b + \frac{3a}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, 故 B 正确; 对于 C: $a^m = 2, a^n = 3, a^{2m+n} = (a^m)^2 a^n = 12$, 故 C 正确; 对于 D: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 9} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}} = \frac{1}{\log_4 9} + \frac{1}{\log_5 3} = \log_4 9 + \log_3 5 = \log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10$, 故 D 错误. 故选 ABC.

12. AC 解析: 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图可知 $-1 < a \leq 0, \frac{1}{e} \leq b < 1, 1 < c \leq e$, 则 $b + c > c > 1$, 且 $-\ln b = \ln c$, 所以 $\ln b + \ln c = \ln bc = 0$, 即 $bc = 1$. 因为 $bc = 1$, 所以 $abc = a \in (-1, 0], a + b + c = a + \frac{1}{c} + c > a + 2 > 1$. 故选 AC.

13. (1, 3) 解析: 因为函数 $y = \log_a(2x - 1) + 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 所以令 $2x - 1 = 1$, 即 $x = 1$ 时, $y = \log_a 1 + 3 = 3$, 所以点 P 的坐标为 $(1, 3)$.

14. (0, 2] 解析: 设 $t = x^2 - 1$, 则 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, 因为 $t = x^2 - 1 \geq -1, y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在定义域内为减函数, 所以 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, 即 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 2$, 所以函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 1}$ 的值域为 $(0, 2]$.

15. $(0, \frac{1}{2})$ 解析: $\because a > 0, \therefore t = 1 - ax$ 是减函数, 又 $y = \log_{\frac{1}{a}}(1 - ax)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, 所以 $\frac{1}{a} > 1$, 且 $1 - 2a > 0, \therefore 0 < a < \frac{1}{2}$.

16. $(1, +\infty)$ 解析: 因为函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 1, \\ \log_3 x + 3^a, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(1) = 2^1 + 1 = 3$, 所以 $f[f(1)] = f(3) = \log_3 3 + 3^a = 1 + 3^a$, 因为 $f[f(1)] > 4$, 可得 $1 + 3^a > 4$, 即 $3^a > 3$, 解得 $a >$

1, 即实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

$$17. \text{解: (1) 原式} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 5 \times \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 + 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

$$(2) \text{原式} = (2 + \log_3 32 - \log_3 9) \times \log_2 3 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2^{\log_2 3} = 5 \log_3 2 \times \log_2 3 + 1 + 2 \times 3 = 12.$$

18. 解: (1) 由题意, 当 $P_t = 0.000\ 2\ \text{Pa}$ 时,

$$S = 20 \lg \frac{P_t}{k} = 20 \lg \frac{0.000\ 2}{2 \times 10^{-5}} = 20 \lg 10 = 20 (\text{dB}),$$

即声压级为 $20\ \text{dB}$.

(2) 当声压级为 $100\ \text{dB}$ 时,

$$\text{由 } S = 20 \lg \frac{P_t}{k}, \text{ 得 } 100 = 20 \lg \frac{P_t}{k},$$

$$\text{所以 } \frac{P_t}{k} = 10^5,$$

$$\text{即 } P_t = 10^5 \times 2 \times 10^{-5} = 2 (\text{Pa}),$$

故该学校礼堂此时声压的有效值为 $2\ \text{Pa}$.

19. 解: (1) $\because f(x) = \lg \frac{3+mx}{3-x}$ 在 $(-3, 3)$ 上为奇函数,

$$\therefore f(x) + f(-x) = 0,$$

$$\text{即 } \lg \frac{3-mx}{3+x} + \lg \frac{3+mx}{3-x} = 0,$$

$$\therefore \frac{3-mx}{3+x} \cdot \frac{3+mx}{3-x} = 1,$$

$$\therefore 9 - m^2 x^2 = 9 - x^2, \therefore m^2 = 1,$$

$$\therefore m > 0, \therefore m = 1.$$

$$(2) \because g(x) = f(x) + 3,$$

$$\therefore f(x) = g(x) - 3 \text{ 为奇函数},$$

$$\therefore f(a) + f(-a) = 0,$$

$$\text{即 } g(a) - 3 + g(-a) - 3 = 0,$$

$$\therefore g(-a) = 6 - g(a) = 4.$$

20. 解: (1) 由题意, 函数 $f(x)$ 为偶函数,

$$\text{则 } f(-x) = f(x), \text{ 即 } \frac{4^{-x} + a}{2^{-x}} = \frac{4^x + a}{2^x}.$$

$$\text{整理得 } (a-1)(1-4^x) = 0, \text{ 所以 } a = 1.$$

$$(2) \text{ 因为函数 } g(x) = f(x) - (a+1),$$

$$\text{令 } g(x) = 0, \text{ 可得 } \frac{4^x + a}{2^x} - (a+1) = 0,$$

$$\text{整理, 得 } 4^x - (a+1)2^x + a = 0,$$

$$\text{即 } (2^x - a)(2^x - 1) = 0,$$

由函数 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有 2 个不同的零点,

所以实数 $x_1 = 0, x_2 = \log_2 a (a > 0)$, 且 $-1 \leq \log_2 a \leq 1, \log_2 a \neq 0$,

$$\text{解得 } \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ 或 } 1 < a \leq 2,$$

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2]$.

21. 解: (1) 令 $x = 0$, 得 $2f(0) + f(0) = 3 + 3$,

解得 $f(0) = 2$.

$$(2) \text{ 因为 } 2f(x) + f(-x) = 3^{x+1} + 3^{1-x}, \text{ ①}$$

$$\text{所以 } 2f(-x) + f(x) = 3^{-x+1} + 3^{1+x}, \text{ ②}$$

$$\text{①} \times 2 - \text{②}, \text{ 得 } 3f(x) = 3^{x+1} + 3^{1-x},$$

$$\text{即 } f(x) = 3^x + 3^{-x}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } f(x) > m \cdot 9^{-x} \Leftrightarrow m < (3^x)^3 + 3^x.$$

$$\text{令 } t = 3^x, x \in [\log_3 2, +\infty), \text{ 则 } t \geq 2,$$

设函数 $g(t) = t^3 + t$, 易知 $g(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{从而 } g(t)_{\min} = g(2) = 10,$$

则 $m < 10$, 即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 10)$.

22. (1) 解: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x)$ 为奇函数,

$$\text{所以 } f(-x) = -f(x), f(0) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{3^0 + 1 - m}{3^0 + 1} = 0, \text{ 解得 } m = 2, \text{ 经检验符合题意},$$

$$\therefore m = 2.$$

$$(2) \text{ 证明: 由 (1) 可知, } f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = 1 - \frac{2}{3^x + 1},$$

任意取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 设 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{3^{x_2} + 1} - \frac{2}{3^{x_1} + 1} =$$

$$\frac{2(3^{x_1} - 3^{x_2})}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)}, \because x_1 < x_2, \therefore 3^{x_1} < 3^{x_2},$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数.

(3) 解: 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(a) = \frac{3^a - 1}{3^a + 1} = \frac{1}{2}, \\ f(b) = \frac{3^b - 1}{3^b + 1} = \frac{5}{6}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = 1, b = \log_3 11.$$

专题三 指数、对数函数的综合运用(B卷)

1. A 解析: 由 $f(x) = 2x^2 + (2^a - 3)x + a$ 是偶函数,

$$\text{得 } 2^a - 3 = 0, 2^a = 3, \text{ 所以 } 4^{a-\frac{1}{2}} = \frac{(2^a)^2}{2} = \frac{9}{2}. \text{ 故}$$

选 A.

2. D 解析: 由已知, 得 $5 + \lg V = 4.8$, 解得 $V =$

$$10^{-0.2} \cdot 10^{-0.2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx \frac{1}{1.585} \approx 0.6.$$

3. D 解析: $x^2 - 2x - 8 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4,$

$+\infty)$, 又 $\because x^2 - 2x - 8 = (x-1)^2 - 9$, 对称轴 $x = 1$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(4, +\infty)$. 故

选 D.

4. D 解析: 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(\log_{\frac{1}{2}} 3) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 3)$, 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $-0.4 < 0$, 所以 $0 < 2^{-0.4} < 2^0 = 1$, 因为 $\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 \sqrt{9} = \log_2 3$, $\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 \sqrt{27} > \log_3 \sqrt{16} = \log_3 4 > 1$, 所以 $\log_2 3 > \log_3 4 > 1$, 所以 $\log_2 3 > \log_3 4 > 1 > 2^{-0.4} > 0$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(\log_2 3) > f(\log_3 4) > f(2^{-0.4})$, 即 $f(2^{-0.4}) < f(\log_3 4) < f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$, 故选 D.

5. D 解析: $\because \log_3 a + \log_3 b = \log_3 (a+b) + 1$, 即 $\log_3 (ab) = \log_3 (3a + 3b)$, $\therefore ab = 3a + 3b$, $\therefore 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$, $\therefore a + 4b = 3(a + 4b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 3\left(5 + \frac{a}{b} + \frac{4b}{a}\right) \geq 3\left(5 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}}\right) = 27$, 当且仅当 $a = 2b$ 时, 等号成立, 因此 $a + 4b$ 的最小值为 27. 故选 D.

6. C 解析: $\because f(x) = \left(\log_2 \frac{x}{2}\right) \cdot \log_2 (8x) = (\log_2 x - 1) \cdot (3 + \log_2 x) \leq 5$, 化简, 得 $(\log_2 x + 4) \cdot (\log_2 x - 2) \leq 0$. $\therefore -4 \leq \log_2 x \leq 2$, $\frac{1}{16} \leq x \leq 4$. $\because f(x) \leq 5$ 在区间 (m, n) 上恒成立, $\therefore n - m$ 的最大值为 $4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$. 故选 C.

7. B 解析: $\because f(x) = \ln(|x| + 1) + x^2$, $\therefore f(-x) = \ln(|-x| + 1) + (-x)^2 = \ln(|x| + 1) + x^2 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数. 当 $x \in [0, +\infty)$ 时 $f(x) = \ln(x+1) + x^2$, 由 $y = \ln(x+1)$, $y = x^2$ 都在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 得 $f(x) = \ln(x+1) + x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以由 $f(2^a - 5) < f(3)$, 得 $-3 < 2^a - 5 < 3$, 解得 $1 < a < 3$.

8. B 解析: 因为 $\ln \frac{2a}{b} = \ln(2a) - \ln b > 3^b - 3^{2a} + \frac{1}{2}$, 即 $\ln(2a) + 3^{2a} > \ln b + 3^b + \frac{1}{2}$, 所以 $\ln(2a) + 3^{2a} > \ln b + 3^b$. 令 $f(x) = \ln x + 3^x$, 因为函数 $y = \ln x$, $y = 3^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $f(2a) > f(b)$, 所以 $2a > b$.

9. AC 解析: 对于 A: 根据 $f(x)$ 的图象知对数函数在定义域上单调递增, 所以 $a > 1$, 图象过 $(2, 0)$ 点, 所以 $b = 1$. 根据 $g(x)$ 的图象为 $y = 1$ 的一条直线可判

断 $b = 1$, 且无论 a 为何值图象均为 $y = 1$, 此类情况符合题意, A 正确;

对于 B: 由 $g(x)$ 的图象可知 $0 < b < 1$. 若 $0 < b < 1$, 对数函数 $f(x)$ 的图象应向右平移, 选项中 $f(x)$ 的图象向左平移, 故 B 错误;

对于 C: 由对数函数 $f(x)$ 的图象知 $0 < a < 1$ 且 $0 < b < 1$. 函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 交点的横坐标小于 1 且函数 $g(x)$ 单调递减, 所以 $0 < a < 1$ 且 $0 < b < 1$, C 正确;

对于 D: 由 $f(x)$ 的图象知函数 $f(x)$ 单调递减, 则 $0 < a < 1$, 但 $g(x)$ 未向右平移, D 错误.

10. AD 解析: $\because \log_a b > 1 = \log_a a$, $\therefore$ 若 $a > 1$, 则 $b > a$, 即 $b > a > 1$. $\therefore (b-1)(b-a) > 0$, 故 A 正确, $(a-1)(b-a) > 0$, 故 D 正确. 若 $0 < a < 1$, 则 $0 < b < a < 1$, $\therefore (a-1)(a-b) < 0$, $(a-1)(b-1) > 0$, 故 B、C 错误.

11. BD 解析: 因为 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 2$, 所以 $\sqrt{1+x^2} - x > 0$, 即 $\sqrt{1+x^2} > x$, 所以 $x \in \mathbf{R}$, 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故 A 错误;

$$f(x) = \ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) + 2 = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) + 2 = -\ln(\sqrt{1+x^2}+x) + 2, \text{ 因}$$

为当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 则函数 $y = \sqrt{1+x^2} + x$ 单调递增, 又 $y = -\ln x$ 在定义域上单调递减, 所以 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 B 正确;

又当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y = \sqrt{1+x^2} + x > 1$, 所以 $y = -\ln(\sqrt{1+x^2} + x) < 0$, 所以 $f(x) \in (-\infty, 2)$, 故 C 错误;

因为 $f(-x) = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 2$, $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 2$, 所以 $f(-x) + f(x) = 4$. 所以 $f(\lg 3) + f\left(\lg \frac{1}{3}\right) = f(\lg 3) + f(-\lg 3) = 4$, 故 D 正确.

12. ACD 解析: 对于 A: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其函数图象关于直线 $x = -3$ 对称, 所以 $f(x-3) = f(-x-3)$, 又 $f(x+3) = f(x-3)$, 所以 $f(x+3) = f(-x-3)$. 所以 $f[(x-3)+3] = f[-(x-3)-3]$, 即 $f(x) = f(-x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 A 正确;

对于 B: 因为 $f(x+3) = f(x-3)$, 所以 $f[(x+3)+3] = f[(x+3)-3]$, 即 $f(x+6) = f(x)$. 所以

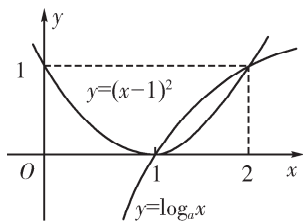
函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数, 当 $x \in [-6, -3]$ 时, $x+6 \in [0, 3]$, 因为当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = 2^x + 2x - 11$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $[-6, -3]$ 上单调递增, 故 B 错误;

对于 C: 因为函数图象关于直线 $x = -3$ 对称, 所以 $f(x-3) = f(-x-3)$, 又函数是偶函数, 所以 $f(x) = f(-x)$, 即 $f(x-3) = f[-(x-3)] = f(3-x)$, $f(-x-3) = f[-(-x-3)] = f(x+3)$, 所以 $f(x+3) = f(3-x)$, 所以 $f(x)$ 关于 $x=3$ 对称, 故 C 正确;

对于 D: $f(2\ 021) = f(336 \times 6 + 5) = f(5) = f(-5) = f(-5+6) = f(1)$, 又 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = 2^x + 2x - 11$, 所以 $f(2\ 021) = f(1) = 2^1 + 2 \times 1 - 11 = -7$, 故 D 正确.

13. $\frac{7}{3}$ 解析: 原式 $= \log_6 2 + \log_6 3 + 2 - \left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 \right]^{-\frac{1}{3}} = \log_6 6 + 2 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

14. $1 < a \leq 2$ 解析: 如图, 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = (x-1)^2$ 和 $y = \log_a x$ 的图象.



由于当 $x \in (1, 2)$ 时, 函数 $y = (x-1)^2$ 的图象恒在函数 $y = \log_a x$ 的图象的下方, 则 $\begin{cases} a > 1, \\ \log_a 2 \geq 1, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$.

15. $[4, +\infty)$ 解析: 令 $u = mx^2 - mx + 1$, 由题意得真数 $u = mx^2 - mx + 1$ 能取到大于 0 的一切实数.

①当 $m=0$ 时, $u=1$, 函数为 $y = \log_2 1 = 0$, 此时函数的值域为 $\{0\}$, 不符合题意;

②当 $m \neq 0$ 时, 则有 $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = m^2 - 4m \geq 0, \end{cases}$ 解得 $m \geq 4$.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

16. $[-2, 2]$ 解析: 当 $x \in [-1, 0)$ 时, $f(x) = \frac{1}{4^x} - \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2^x} \in (1, 2]$, $\left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2} \right) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, 所以 $\left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2} \right)^2 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right]$, 所以 $f(x) \in (0, 2]$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $x \in (0,$

$1]$ 时, $f(x) \in [-2, 0)$. 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$. 综上所述, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值域为 $[-2, 2]$.

17. 解: (1) 因为指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象过点 $\left(3, \frac{1}{27} \right)$,

$$\text{所以 } a^3 = \frac{1}{27}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^x.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } g(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{x-1} - 1,$$

由函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^x$ 为减函数得, 函数 $g(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{x-1} - 1$ ($x \geq -1$) 为减函数,

当 $x = -1$ 时, $y_{\max} = 8$.

$$\text{又 } \left(\frac{1}{3} \right)^{x-1} > 0, \text{ 所以 } \left(\frac{1}{3} \right)^{x-1} - 1 > -1.$$

所以 $g(x)$ 的值域为 $(-1, 8]$.

18. 解: (1) ①当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

$$a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow (2a+1)(a-2) = 0, \text{ 解得 } a = 2.$$

②当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减,

$$\frac{1}{a} - a = \frac{3}{2} \Rightarrow (2a-1)(a+2) = 0, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}.$$

综上所述, 实数 a 的值为 2 或 $\frac{1}{2}$.

(2) 由题可得 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\text{且 } g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x),$$

所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

$$\text{又因为 } g(x) = a^x - \frac{1}{a^x}, \text{ 且 } a > 1,$$

所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

$$\text{所以 } g(x^2 + 2x) > -g(x-4) = g(4-x),$$

$$\text{所以 } x^2 + 2x > 4-x \Rightarrow (x+4)(x-1) > 0,$$

$$\text{解得 } x < -4 \text{ 或 } x > 1,$$

$$\text{所以不等式的解集为 } \{x | x < -4 \text{ 或 } x > 1\}.$$

19. 解: (1) 因为 $f(x) = \log_a(2-x) + \log_a(x+4)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2-x > 0, \\ x+4 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -4 < x < 2,$$

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-4, 2)$,

$$f(x) = \log_a[(2-x)(x+4)] = \log_a(-x^2 - 2x + 8) = \log_a[-(x+1)^2 + 9],$$

因为 $y = -(x+1)^2 + 9$ 在 $(-4, -1)$ 上单调递增,

在 $(-1, 2)$ 上单调递减, 又 $a > 1$, 所以函数 $f(x) =$

$\log_a[-(x+1)^2 + 9]$ 在 $(-4, -1)$ 上单调递增, 在

$(-1, 2)$ 上单调递减.

(2) 由(1)令 $t = -(x+1)^2 + 9$, 则 $t \in (0, 9]$,
 $f(t) = \log_a t$,
 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(t) = \log_a t$ 在 $(0, 9]$ 上单调递增,
 函数不存在最小值, 故舍去;
 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(t) = \log_a t$ 在 $(0, 9]$ 上单调递减,
 $f(t)_{\min} = f(9) = \log_a 9 = -\frac{1}{2}$,

所以 $a^{-\frac{1}{2}} = 9$, 解得 $a = \frac{1}{81}$.

20. 解: (1) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0) = 1 + b = 0$,
 所以 $b = -1$.

因为 $f(1) = \frac{8}{3}$, 所以 $a - \frac{1}{a} = \frac{8}{3}$,

所以 $3a^2 - 8a - 3 = 0$, 即 $(3a+1)(a-3) = 0$,

解得 $a = 3$ 或 $a = -\frac{1}{3}$ (舍去).

故 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$.

(2) $f(x) + \frac{2}{3^x} \geq 2m - 1$ 等价于 $3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2m - 1$.

设 $t = 3^x$, 因为 $0 \leq x \leq 2$, 所以 $1 \leq t \leq 9$.

令 $g(t) = t + \frac{1}{t}$ ($1 \leq t \leq 9$),

任取 $t_1, t_2 \in [1, 9]$, 且 $t_1 < t_2$,

则 $g(t_1) - g(t_2) = t_1 + \frac{1}{t_1} - (t_2 + \frac{1}{t_2}) = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 t_2 - 1)}{t_1 t_2}$.

因为 $1 \leq t_1 \leq 9, 1 \leq t_2 \leq 9$,

所以 $1 < t_1 t_2 < 81$, 所以 $t_1 t_2 - 1 > 0$.

因为 $t_1 < t_2$, 所以 $t_1 - t_2 < 0$,

所以 $g(t_1) - g(t_2) = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 t_2 - 1)}{t_1 t_2} < 0$,

即 $g(t_1) < g(t_2)$, 则 $g(t)$ 在 $[1, 9]$ 上单调递增,

故 $g(t)_{\max} = g(9) = 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$.

因为存在 $x \in [0, 2]$, 使得 $f(x) + \frac{2}{3^x} \geq 2m - 1$ 成立,

所以 $2m - 1 \leq \frac{82}{9}$, 解得 $m \leq \frac{91}{18}$,

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{91}{18}]$.

21. 解: (1) 由条件, 得 $\log_a 3 = 1$, 得 $a = 3$.

$\therefore g(x) = \log_3(x+1) + \log_3(5-x)$,

即 $g(x) = \log_3(-x^2 + 4x + 5)$.

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $-x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9 \in [8, 9]$,

$\therefore g(x)_{\max} = \log_3 9 = 2, g(x)_{\min} = \log_3 8 = 3\log_3 2$,

$\therefore g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 2, 最小值为 $3\log_3 2$.

(2) 由(1)知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x)_{\min} = 3\log_3 2$, 不等式 $f(m^2 - 2m) - g(x) \geq 0$ 有解,

即 $\log_3(m^2 - 2m) \geq g(x)_{\min}, x \in [1, 2]$.

$\therefore \log_3(m^2 - 2m) \geq \log_3 8$, 即 $m^2 - 2m \geq 8$,

解得 $m \leq -2$ 或 $m \geq 4$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$.

22. 解: (1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $ax^2 + 2x + 3 > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

显然 $a = 0$ 时不合题意,

从而必有 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4 - 12a < 0, \end{cases}$ 解得 $a > \frac{1}{3}$,

即实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{3}, +\infty)$.

(2) 因为 $f(1) = 1$, 所以 $\log_4(a+5) = 1$,

因此 $a+5 = 4, a = -1$.

此时 $f(x) = \log_4(-x^2 + 2x + 3)$.

令 $t = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

则 t 的值域为 $(0, 4]$.

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 1]$.

(3) 假设存在实数 a , 使 $f(x)$ 的最小值为 0,

则 $h(x) = ax^2 + 2x + 3$ 有最小值 1,

因此应有 $\begin{cases} a > 0, \\ \frac{3a-1}{a} = 1, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}$.

故存在实数 $a = \frac{1}{2}$, 使 $f(x)$ 的最小值为 0.

专题四 三角函数的综合运用(A 卷)

1. A 解析: $\because$ 角 300° 的终边上有一点 $(4, a)$,

$\therefore \tan 300^\circ = \frac{a}{4} = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$,

$\therefore a = -4\sqrt{3}$. 故选 A.

2. A 解析: $\frac{4\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 3\sin\alpha} = \frac{4\tan\alpha - 2}{5 + 3\tan\alpha}$, 因为 $\tan\alpha =$

-4 , 所以原式 $= \frac{4 \times (-4) - 2}{5 + 3 \times (-4)} = \frac{18}{7}$. 故选 A.

3. D 解析: $\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] =$

$\frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{3 + 5}{1 - 3 \times 5} = -\frac{4}{7}$. 故选 D.

4. B 解析: $\cos(\frac{2\pi}{3} + 2\theta) = \cos[\pi - (\frac{\pi}{3} - 2\theta)] =$

$-\cos(\frac{\pi}{3} - 2\theta) = 2\sin^2(\frac{\pi}{6} - \theta) - 1 = -\frac{7}{9}$. 故

选 B.

5. C 解析: 函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平

移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到的函数解析式为 $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 再将所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 得到的解析式为 $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 再向上平移 1 个单位长度, 得到 $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. 故选 C.

6. B 解析: $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{4} < \omega x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{4}$. 存在 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, 使得 $f(x_1) - f(x_2) = -2\sqrt{2}$, 则 $\frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{4} > \frac{5}{2} \pi$, 所以 $\omega > \frac{9}{2}$. 故选 B.

7. B 解析: 令 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x - 1 = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$, 可得 $\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2m\pi$, 或 $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $m, n \in \mathbf{Z}$. 根据三角函数图象和性质可知若要 $|\alpha - \beta|$ 的值最小, 可得 $|\alpha - \beta|_{\min} = \frac{2\pi}{3\omega} = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2}{3}$, $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$, 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\frac{\pi}{2} + 3k\pi \leq x \leq 2\pi + 3k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 故选 B.

8. A 解析: 因为 $BC \parallel x$ 轴, 所以 $f(x)$ 图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{7\pi}{12}$, 所以 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, 则 $T = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 又 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 且 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 因为当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, 不等式 $f(x) \geq m - \sin 2x$ 恒成立, 所以 $m \leq f(x) + \sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. 所以 $g(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $m \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

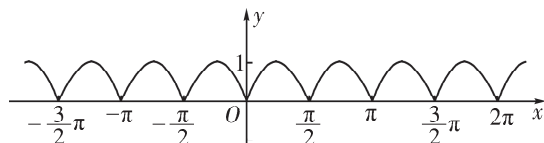
9. BC 解析: 对于 A: $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$,

故 A 选项错误; 对于 B: $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 B 选项正确; 对于 C: $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 故 C 选项正确; 对于 D: $\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\cos^2 15^\circ} = \cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, 故 D 选项错误. 故选 BC.

10. AC 解析: 由 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $-\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=0$, 单调递增区间为 $\left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$, 所以选项 A 正确; 因为 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以函数的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$, 所以选项 B 错误; 由 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=1$ 时, 函数的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, 所以函数的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 成中心对称, 选项 C 正确; 函数 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 没有对称轴, 所以选项 D 错误. 故选 AC.

11. BCD 解析: 由题得 $f(x) = -\sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = -2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$, 令 $\omega x - \frac{\pi}{6} = k\pi$, 解得 $x = \frac{\pi}{6\omega} + \frac{k\pi}{\omega}$, $\because \omega > 0$, 取 $k=0$, $\therefore 0 < \frac{\pi}{6\omega} \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $\omega \geq \frac{1}{3}$. 故选 BCD.

12. AC 解析: 由 $f(-x) = |\sin(-2x)| = |\sin 2x| = f(x)$, 知函数 $f(x)$ 是偶函数, A 正确; 当 $\sin 2x = \pm 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 1, 故 B 错误; 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图象易知, 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 故选项 C 正确, D 错误.

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 解析: $\sin 1500^\circ = \sin(4 \times 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. $\sqrt{3}$ 解析: $f(x) = \sin 2x + \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin 2x + \cos 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 则当 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值为 $\sqrt{3}$.

15. 5 解析: 函数 $f(x) = a \sin 2x + b \tan x + 3$ 满足 $f(-2) = 1$, $\therefore f(-2) = a \sin(-4) + b \tan(-2) + 3 = -a \sin 4 - b \tan 2 + 3 = 1$, $\therefore a \sin 4 + b \tan 2 = 2$, 则 $f(2 - \pi) = a \sin(4 - 2\pi) + b \tan(2 - \pi) + 3 = a \sin 4 + b \tan 2 + 3 = 2 + 3 = 5$.

16. $\frac{2\pi}{3}$ 解析: $\because y = \sin^2 x + 2 \cos x + 1 = -\cos^2 x + 2 \cos x + 2 = -(\cos x - 1)^2 + 3$, 若在区间 $[-\frac{2}{3}\pi, \theta]$ 上的最小值为 $\frac{3}{4}$, 则令 $y = -(\cos x - 1)^2 + 3 = \frac{3}{4}$, 解得 $\cos x = -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$, 又 $\because x \in [-\frac{2}{3}\pi, \theta]$, $\therefore \theta$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$.

17. 解: $1 + \sin \theta - 25 \cos^2 \theta = 0$,
即 $1 + \sin \theta - 25(1 - \sin^2 \theta) = 0$,
整理, 得 $25 \sin^2 \theta + \sin \theta - 24 = 0$,
即 $(25 \sin \theta - 24)(\sin \theta + 1) = 0$,
又 $\theta \in [\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$, 所以 $\sin \theta = \frac{24}{25}$, $\cos \theta = -\frac{7}{25}$,
 $\tan \theta = -\frac{24}{7}$.

$$(1) \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times (-\frac{24}{7})}{1 - (-\frac{24}{7})^2} = \frac{336}{527}.$$

$$(2) \frac{1 + \cos(270^\circ + \theta) - 2 \cos^2(45^\circ + \frac{\theta}{2})}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{1 + \sin \theta - [1 + \cos(90^\circ + \theta)]}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{1 + \sin \theta - [1 - \sin \theta]}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{2 \times \frac{24}{25}}{\sqrt{1 - \frac{7}{25}}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}.$$

18. 解: (1) 由 $\sin \alpha = \frac{4}{5} = \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\frac{1}{4} + \cos^4 \theta}}$,

得 $\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$, $\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$.

所以 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{3}$.

(2) 由 $\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$, $\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$,

得 $P(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), Q(\frac{1}{3}, -1)$,

故 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan \beta = -3$.

因此 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{1}{3}$.

19. 解: (1) 因为 $f(x) = \cos x(2\sqrt{3} \sin x - \cos x) + \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$,

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以 $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}]$, $k \in \mathbf{Z}$.

(2) 因为 $f(\frac{\alpha}{2}) = 2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$,

所以 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$,

又因为 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $0 < \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

又因为 $\sin \alpha = \sin(\alpha - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) +$

$\frac{1}{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{8}$.

20. 解: (1) 由 $f(x) = \sin \omega x \cdot \cos \omega x - \sqrt{3} \sin^2 \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\omega > 0$),

则 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \omega x \cos \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos 2\omega x) +$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin 2\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$),

由三角函数的图象可知 $T = 2(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \pi$,

所以 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ ($\omega > 0$), 解得 $\omega = 1$.

(2) 由 (1) 可得 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$),

因为 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, 所以 $-\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi$,

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)_{\max} = 1$;

当 $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$, 即 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时,

函数 $f(x)_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. 解: $f(x) = 4\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) - \sqrt{3} =$
 $2\sin x \cos x + 2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x =$
 $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$

将 $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) = 2\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 若函数 $g(x)$ 是奇函数,

则 $2\varphi - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由题知 $\sin\left(2\theta + 2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = 1$,

则 $2\theta + 2\varphi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

从而 $\theta = \frac{5\pi}{12} - \varphi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\theta + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因此 $f\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi\right) = 2\sin\left(\pi - 2\varphi + 2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right),$

因为 $\cos \varphi = \frac{1}{3}$, 且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

因此 $\sin 2\varphi = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$,

$\cos 2\varphi = 2 \times \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$,

所以 $\sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{18},$

所以 $f\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{9}$.

22. 解: (1) $f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) -$
 $\sin(\pi + x) = 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) +$

$\sin x = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sin x =$
 $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

因为函数 $g(x)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

所以 $g(x) = 2\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

(2) 若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 即 $g(x) \in (-1, \sqrt{3}).$

令 $g(x) = t$, 则 $t \in (-1, \sqrt{3}),$

所以方程 $t^2 - t + m = 0$ 在 $(-1, \sqrt{3})$ 上有解,

故方程 $m = -t^2 + t = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 在 $(-1,$

$\sqrt{3})$ 上有解,

所以直线 $y = m$ 与函数 $y = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, t \in$

$(-1, \sqrt{3})$ 的图象有公共点,

因为函数 $y = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, t \in (-1, \sqrt{3})$ 的值域为 $\left(-2, \frac{1}{4}\right],$

所以 $m \in \left(-2, \frac{1}{4}\right].$

专题四 三角函数的综合运用(B卷)

1. D 解析: 设角 α 的终边逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 所得角为 β ,

则 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$, 所以 $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, 故 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$

$-\frac{1}{3}$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = -\frac{1}{3}$, 又因为 $\cos^2 \alpha +$

$\sin^2 \alpha = 1$, 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin \alpha > 0$, 所以 $\sin \alpha =$

$\frac{2\sqrt{6} + 1}{6}$. 故选 D.

2. A 解析: 因为 $\sin \alpha = 2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2} \cos \alpha$,

所以 $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$, 所以 $\cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} =$

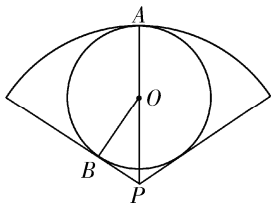
$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - 8}{1 + 8} = -\frac{7}{9}$. 故选 A.

3. C 解析: 设扇形的半径为 R , 圆心角为 α , 面积为

S , 因为 $2R + \alpha R = 20$, 所以 $S = \frac{1}{2} \alpha R^2 = (10 -$

$R)R \leq \left(\frac{10 - R + R}{2}\right)^2 = 25$, 当且仅当 $10 - R = R$, 即

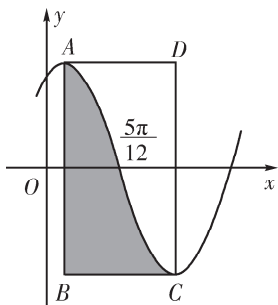
$R=5$ 时,取等号,所以扇形面积取最大值时 $R=5$, $\alpha=2$,如下图所示.



设内切圆圆心为 O , 扇形过点 O 的半径为 AP , B 为扇形与圆的切点, 因为 $AO+OP=R=5$, 所以 $r + \frac{r}{\sin 1} = 5$, 所以 $r = \frac{5 \sin 1}{1 + \sin 1}$. 故选 C.

4. C 解析: 因为 $\sin(2\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, $\sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 若 $\sin(2\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin \beta$, 则 $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha = -3 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 即 $\tan(\alpha + \beta) = -3 \tan \alpha$, 因为 $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 则 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 即 $\tan(\alpha + \beta) = 1$. 又 $\alpha + \beta \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$.

5. C 解析: 由题意知 $|AB|=4$, 如图, 由对称性画出矩形 $ABCD$, 易知矩形 $ABCD$ 的面积等于 2π ,



$\therefore |AB| \times |BC| = 2\pi$, $|BC| = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore$ 函数 $f(x)$

的最小正周期 $T = \pi$, 即 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\therefore \omega = 2$.

$\therefore f(x) = 2 \sin(2x + \varphi)$, 根据图象可知 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. 又 $\because 0 < \varphi < \pi$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $\omega \cdot \varphi = \frac{\pi}{3}$.

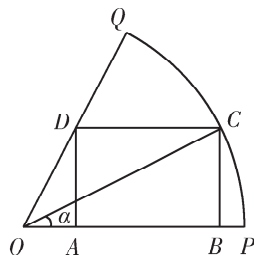
6. A 解析: 因为 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, 且 $\omega > 0$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3}$, 又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上恰有两个零

点, 所以 $\frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} \geq 2\pi$ 且 $\frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} < 3\pi$, 解之得

$\frac{5}{2} \leq \omega < 4$, 故选 A.

7. C 解析: 由已知可得 $f(x) = [1 + \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})] + 1 = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) + 2$. $\therefore f(x)$ 的最小正周期为 π , $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 即 $\omega = 2$, $\therefore f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 2$, $\therefore 1 \leq \cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 2 \leq 3$, $\therefore f(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 故若 $f(m) \cdot f(n) = 9$, 则 $f(m) = f(n) = 3$, $\therefore m$ 与 n 是方程 $f(x) = 3$, 即 $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$ 的根, 所以 $2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\because x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\therefore x_{\max} = \frac{13\pi}{12}, x_{\min} = -\frac{23\pi}{12}$, $\therefore m - n$ 的最大值为 $\frac{13\pi}{12} - (-\frac{23\pi}{12}) = 3\pi$.

8. A 解析: 如图, 记 $\angle COP = \alpha$, 在 $\text{Rt} \triangle OBC$ 中, $OB = 2 \cos \alpha, BC = 2 \sin \alpha$, 在 $\text{Rt} \triangle OAD$ 中, $OA = \frac{\sqrt{3}}{3} DA = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \alpha$, 所以 $AB = OB - OA = 2 \cos \alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \alpha$, 设矩形 $ABCD$ 的面积为 S , 则 $S = AB \cdot BC = (2 \cos \alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \alpha) \cdot 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin^2 \alpha = 2 \sin 2\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos 2\alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) - \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, 所以当 $2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, S 取最大值, 为 $\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



9. ABD 解析: 对于 A: 由三角函数的定义可知, $\sin \alpha = \frac{y}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $x > 0, y > 0$, 所以 $r > x > 0$, 所以 $\sin \alpha <$

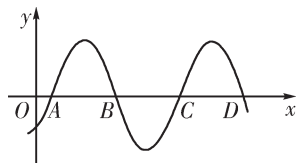
$\tan \alpha$, 所以 A 正确; 对于 B: 由于 α 是第二象限角, 所以 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $\frac{\pi}{4} + 2n\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角; 当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $\frac{5\pi}{4} + 2n\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限或第三象限角, 所以 B 正确; 对于 C: 由于角 α 的终边过点 $P(3k, 4k) (k \neq 0)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4k}{\sqrt{(3k)^2 + (4k)^2}} = \frac{4k}{5|k|}$, 所以 C 错误; 对于 D: 设扇形的圆心角为 α , 则由题意得 $2 + 2 + 2\alpha = 6$, 解得 $\alpha = 1$, 所以 D 正确.

10. BCD 解析: 由 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - kx + 2 = 0$ 的两不等实根, 所以 $\tan \alpha + \tan \beta = k, \tan \alpha \cdot \tan \beta = 2, \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{k}{-1} = -k$. 由 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 知, $\tan \alpha, \tan \beta$ 均为正数, 则 $\tan \alpha + \tan \beta = k \geq 2\sqrt{\tan \alpha \cdot \tan \beta} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\tan \alpha = \tan \beta$, 即 $\alpha = \beta$ 时取等号, 所以 $k > 2\sqrt{2}$. $k + \tan \alpha = 2\tan \alpha + \tan \beta \geq 2\sqrt{2\tan \alpha \cdot \tan \beta} = 4$, 当且仅当 $2\tan \alpha = \tan \beta$ 时取等号.

11. BD 解析: 对于 A: 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度所得的解析式为 $y = 2\sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{24}\right) - \frac{2}{3}\pi\right] = 2\sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{24} - \frac{2}{3}\pi\right)$, 其图象对应的函数为偶函数, 则 $\frac{\omega\pi}{24} - \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = 24k + 28, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $\omega \in (0, 6)$, 令 $k = -1$, 得 $\omega = 4$, 故 A 错误; 对于 B: 由上可知 $f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{2}{3}\pi\right)$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(4 \times \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi\right) = 0$, 所以点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心, 故 B 正确; 对于 C: 因为 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $4x - \frac{2}{3}\pi \in \left[0, \frac{4}{3}\pi\right]$, 所以当 $4x - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{7\pi}{24}$ 时, $f(x)$ 有最大值 2. 当 $4x - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 有最小值 $2\sin \frac{4}{3}\pi = -\sqrt{3}$,

故 C 错误; 对于 D: 令 $4x - \frac{2}{3}\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{7\pi}{24}, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$ 时, 令 $k = -1$, 解得 $x = \frac{\pi}{24} \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$, 令 $k = 0$, 解得 $x = \frac{7\pi}{24} \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$, 令 $k = 1$, 解得 $x = \frac{13\pi}{24} \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$, 令 $k = 2$, 解得 $x = \frac{19\pi}{24} \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$. 所以 $f(x)$ 的图象在 $\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上有四条对称轴, 故 D 正确.

12. ABD 解析: 根据题意作出函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示.

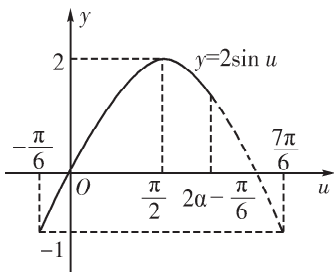


若函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 3 个零点, 则 π 在 C 与 D 之间 (包括 C, 不包括 D). 对于 A: $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 3 个零点, 则函数的最小正周期 $T < \pi$, 在 $(0, \pi)$ 上存在 x_1, x_2 , 满足 $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) = 2$ 可以成立, 故 A 正确; 对于 B: 由图象可知函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 1 个最小值点, 故 B 正确; 对于 D: 令 $f(x) = 0$, 则 $\omega x - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\frac{\pi}{6\omega} + T \leq \pi < \frac{\pi}{6\omega} + \frac{3}{2}T$, 即 $\frac{\pi}{6\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \leq \pi < \frac{\pi}{6\omega} + \frac{6\pi}{2\omega}$, 解得 $\frac{13}{6} \leq \omega < \frac{19}{6}$, 故 D 正确; 对于 C: 由 D 选项中 $\omega \in \left[\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right)$, 当 ω 取最小值为 $\frac{13}{6}$ 时, 若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $-\frac{\pi}{6} < \omega x - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{12}$, 故 C 错误. 故选 ABD.

13. $-\frac{\sqrt{5}}{8}$ 解析: $\because \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $\therefore \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{8}$, 故 $\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{8}$.
14. $\left[-\frac{9}{4}, 0\right]$ 解析: $\because x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\therefore \tan x \in [-1, 1]$. $\because f(x) = \tan^2 x + \tan x - 2 = \left(\tan x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, $\therefore -\frac{9}{4} \leq f(x) \leq 0$.

15. $[0, 2]$ 解析: 设 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$, 则 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时, $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [0, 1]$, $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$. 因为关于 x 的方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上有解, 所以实数 a 的取值范围是 $[0, 2]$.

16. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 解析: 当 $x \in [0, \alpha]$ 时, 则 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2\alpha - \frac{\pi}{6}$, 令 $u = 2x - \frac{\pi}{6}$, 则 $u \in \left[-\frac{\pi}{6}, 2\alpha - \frac{\pi}{6}\right]$, 作出函数 $y = 2\sin u$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\alpha - \frac{\pi}{6}\right]$ 上的图象如图所示.



由图可知, 当 $\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ 时, 即当 $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ 时, 函数 $y = 2\sin u$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\alpha - \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $[-1, 2]$. 即 α 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

17. 解: $\because \tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)x + k^2 - 3 = 0$ 的两个实根,

$$\therefore \begin{cases} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = k + \frac{1}{2}, \\ \tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} = k^2 - 3, \end{cases} \text{ 解得 } k = \pm 2,$$

又 $\because -\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{2}$, $\therefore \tan \theta > 1$,

$\therefore k = 2$, 解得 $\tan \theta = 2$.

$$(1) \frac{\sin(\pi - \theta) + 5\cos(2\pi - \theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \sin(-\theta)} = \frac{\sin \theta + 5\cos \theta}{2\cos \theta + \sin \theta} =$$

$$\frac{\tan \theta + 5}{2 + \tan \theta} = \frac{7}{4}.$$

$$(2) \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 1 = \frac{\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} - 1 =$$

$$\frac{\tan^2 \theta + \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} - 1 = \frac{1}{5}.$$

18. 解: (1) 因为函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$,

$$\text{所以 } 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3}\right) = 2,$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{所以 } \omega = \frac{1}{2} + 6k, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } 0 < \omega < 3, \text{ 所以 } 0 < \frac{1}{2} + 6k < 3, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } k = 0, \text{ 所以 } \omega = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ 当 } \omega = \frac{1}{2} \text{ 时, } g(x) = m \cdot 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + n.$$

$$\text{因为 } -2\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } -1 \leq \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } -2m + n \leq g(x) \leq m + n.$$

因为函数 $g(x)$ 的值域为 $[-2, 1]$,

$$\text{所以 } \begin{cases} -2m + n = -2, \\ m + n = 1, \end{cases} \text{ 解得 } m = 1, n = 0.$$

19. 解: (1) 根据函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象,

$$\text{可得 } A = 1, \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}, \therefore \omega = 2.$$

$$\text{再根据五点法作图可得, } 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

(2) 若将函数 $y = f(x)$ 的图象上的所有点的纵坐标不变, 横坐标伸长到原来的 3 倍,

得到函数 $g(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } 3k\pi - \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 3k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore g(x) \text{ 的增区间为 } \left[3k\pi - \frac{5\pi}{4}, 3k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore g(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

20. 解: (1) 由 $f(0) = 3, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{得} \begin{cases} b=3, \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{3}{4}b = \frac{5-\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=3, \\ a=-2, \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 2\cos^2 x -$$

$$\sin 2x + 1 = \cos 2x - \sin 2x + 2 = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2,$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{即函数 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } \pi.$$

$$\text{由 } 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{得 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的对称中心的坐标为 } \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, 2\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) \text{由题意, 得 } f(\alpha) = f(\beta) = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2,$$

$$\text{即 } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore 2\alpha + \frac{\pi}{4} = \left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \text{ 或 } 2\alpha + \frac{\pi}{4} = -\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{则 } \alpha - \beta = k\pi \text{ 或 } \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{由 } \alpha - \beta \neq k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 知 } \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -1.$$

21. 解: (1) 因为函数 $f(x) = a\sin x - \cos^2 x + 4 - a =$

$$\left(\sin x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 3 - a,$$

$$\text{又 } x \in [0, \pi], \text{ 则 } \sin x \in [0, 1],$$

$$\text{当 } -\frac{a}{2} \leq \frac{1}{2}, \text{ 即 } a \geq -1 \text{ 时, 则当 } \sin x = 1 \text{ 时,}$$

$$f(x) \text{ 取得最大值 } g(a) = 4.$$

$$\text{当 } -\frac{a}{2} > \frac{1}{2}, \text{ 即 } a < -1 \text{ 时, 则当 } \sin x = 0 \text{ 时,}$$

$$f(x) \text{ 取得最大值 } g(a) = 3 - a.$$

$$\text{综上所述, } g(a) = \begin{cases} 4, & a \geq -1, \\ 3 - a, & a < -1. \end{cases}$$

$$(2) \text{因为 } x \in [0, \pi], \text{ 所以 } \sin x \in [0, 1].$$

$$\text{因为方程 } f(x) = a \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上有解,}$$

$$\text{所以 } \left(\sin x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 3 - a = a \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 上}$$

有解,

$$\text{即 } \sin^2 x + a\sin x + 3 - 2a = 0.$$

$$\text{整理, 得 } \sin^2 x + 3 = a(2 - \sin x),$$

$$\text{所以 } a = \frac{\sin^2 x + 3}{2 - \sin x}.$$

$$\text{令 } t = \sin x, \text{ 则 } t \in [0, 1].$$

$$\text{所以 } a = \frac{t^2 + 3}{2 - t},$$

$$\text{易知函数 } a = \frac{t^2 + 3}{2 - t} \text{ 在 } t \in [0, 1] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{故当 } t = 0 \text{ 时, } a_{\min} = \frac{3}{2};$$

$$\text{当 } t = 1 \text{ 时, } a_{\max} = 4.$$

$$\text{故实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{3}{2}, 4\right].$$

22. 解: (1) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) - \sqrt{3}(\cos 2x +$

$$1) + \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{则 } f\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \cos\left[\pi - 2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right] = -\cos 2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right] = -\left[1 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = -\frac{7}{9}.$$

$$(2) \text{当 } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } -\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6},$$

$$\text{可得 } -1 \leq f(x) \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) + 2 > 0,$$

$$\text{则不等式 } 2m \geq \frac{(m+1)f(x) + 2m+1}{f(x)+2} \text{ 可化为}$$

$$2mf(x) + 4m \geq (m+1)f(x) + 2m+1,$$

$$\text{则 } (m-1)f(x) + 2m-1 \geq 0.$$

$$\text{令 } t = f(x), \text{ 则 } t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],$$

$$\text{令 } g(t) = (m-1)t + 2m-1 \geq 0,$$

$$\therefore \text{不等式 } 2m \geq \frac{(m+1)f(x) + 2m+1}{f(x)+2} \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore \begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ g(-1) \geq 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{m-1}{2} + 2m-1 \geq 0, \\ -(m-1) + 2m-1 \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } m \geq \frac{3}{5}.$$

故实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$.

期中检测卷

1. D 解析:全称量词命题的否定为存在量词命题,所以命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \neq x$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = x$ ”. 故选 D.

2. C 解析: $a > 0, b > 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a = b$

时等号成立,故 $a+1 \geq 2\sqrt{a}$ 中等号成立的条件是当且仅当 $a=1$.

3. B 解析:由 $x^2 - 4x + 3 < 0$, 得 $1 < x < 3$, 所以 $A = \{x | 1 < x < 3\}$. 因为 $B = \{x | 2x - 3 < 0\} = \left\{x \left| x < \frac{3}{2}\right.\right\}$, $U = \mathbf{R}$, 所以 $\complement_U B = \left\{x \left| x \geq \frac{3}{2}\right.\right\}$, 又 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \left[\frac{3}{2}, 3\right)$. 故选 B.

4. C 解析:由幂函数的性质,可知当 $\alpha < 0$ 时, $y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,故 $y = x^{-2}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, $y_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$. 故选 C.

5. C 解析:由题意,得 $f(-2) = -2 + 1 = -1$, 由 $f(-2) + f(a) = 3$, 得 $f(a) = 4$. 当 $a \geq 0$ 时, $f(a) = a^2 = 4$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -2$ (舍). 当 $a < 0$ 时, $f(a) = a + 1 = 4$, 解得 $a = 3$ (舍). 所以 $a = 2$. 故选 C.

6. A 解析:已知 $x_1 < x_2, m < n$, 因为 $(m - x_1)(n - x_1) < 0$, 所以 $m < x_1 < n$, 因为 $(m - x_2)(n - x_2) < 0$, 所以 $m < x_2 < n$, 所以 $m < x_1 < x_2 < n$. 故选 A.

7. B 解析:因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 所以 $a = \frac{b}{b-1}$, 所以

$$\frac{1}{a-1} + \frac{b+8}{b-1} = \frac{1}{\frac{b}{b-1}-1} + \frac{9}{b-1} + 1 = b-1 + \frac{9}{b-1} + 1$$

1. 因为 $a = \frac{b}{b-1} > 0, b > 0$, 所以 $b > 1$, 所以 $\frac{1}{a-1} +$

$$\frac{b+8}{b-1} = b-1 + \frac{9}{b-1} + 1 \geq 2\sqrt{(b-1) \cdot \frac{9}{b-1}} + 1 = 7.$$

当且仅当 $b-1 = \frac{9}{b-1}$, 即 $b=4, a=\frac{4}{3}$ 时取等号. 故选 B.

8. C 解析:由 $g(x) = f(x-3)$ 是偶函数, 可知 $f(x)$ 的图象关于 $x = -3$ 对称, 则 $f(-5) = f(-1)$, $f\left(-\frac{7}{2}\right) = f\left(-\frac{5}{2}\right)$. 又函数 $f(x)$ 在 $(-3, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(-1) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f\left(-\frac{5}{2}\right)$, 即

$f(-5) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f\left(-\frac{7}{2}\right)$. 故选 C.

9. ABD 解析:由 $\complement_U B = \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 5\}$ 知, 选项 A 正确; 由 $A \cap (\complement_U B) = \{x | 1 \leq x \leq 3 \text{ 或 } 4 < x < 6\} \cap \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 5\} = \{x | 1 \leq x < 2 \text{ 或 } 5 \leq x < 6\}$ 知, 选项 B 正确; 由 $(\complement_U A) \cup B = \{x | x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 4 \text{ 或 } x \geq 6\} \cup \{x | 2 \leq x < 5\} = \{x | x < 1 \text{ 或 } 2 \leq x < 5 \text{ 或 } x \geq 6\}$ 知, 选项 C 错误; 由 $\complement_U (\complement_U B) = B = \{x | 2 \leq x < 5\}$ 知, 选项 D 正确.

10. AD 由图象可知, 前 3 年年产量的增长速度越来越快, 后 5 年的年产量是不变的, 所以 AD 正确.

11. BC 解析:若 $f(x)$ 为奇函数, 令 $F(x) = |f(x)|$, 则 $F(-x) = |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)| = F(x)$, 故 A 正确; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 令 $F(x) = -f(-x)$, 则 $F(-x) = -f(x) = -f(-x) = F(x)$, 所以 $y = -f(-x)$ 为偶函数, 所以 B 不正确; 若 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 令 $F(x) = f[g(x)]$, 则 $F(-x) = f[g(-x)] = f[g(x)] = F(x)$, 所以 $y = f[g(x)]$ 为偶函数, C 不正确; 若 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 令 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则 $F(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x)$, D 正确. 故选 BC.

12. ABD 解析:函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 若 $a = 0$, 则 $f(x) = |x| (x \neq 0)$, 此时对应 A 图象; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x}$, 排除 C; 若 $a > 0$, 则

$$f(x) = |x| - \frac{a}{x} = \begin{cases} x - \frac{a}{x}, & x > 0, \\ -x - \frac{a}{x}, & x < 0. \end{cases} \quad \text{当 } x > 0 \text{ 时,}$$

$f(x)$ 为增函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 为对勾函数, 此时对应 D 图象; 若 $a < 0$, 则当 $x > 0$ 时, 函数

$f(x) = x - \frac{a}{x}$ 为对勾函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) =$

$-x - \frac{a}{x}$ 为减函数, 此时对应 B 图象. 故选 ABD.

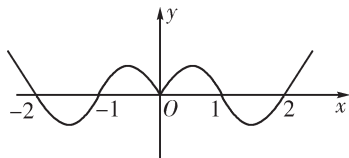
13. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ 解析:集合 $A = \{x | x^2 - ax + 2 < 0\} = \emptyset$, 则不等式 $x^2 - ax + 2 < 0$ 无解, 所以 $\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times 2 \leq 0$, 解得 $-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$.

14. $\{(2, 4), (5, 2), (8, 0)\}$ 解析: $\because 2x + 3y = 16$, $\therefore 3y = 16 - 2x = 2(8 - x)$, 且 $x, y \in \mathbf{N}$, $\therefore y$ 为偶数且 $0 \leq y \leq 5$. 当 $y = 4$ 时, $x = 2$; 当 $y = 2$ 时, $x = 5$; 当 $y = 0$ 时, $x = 8$.

15. 2 019 解析:因为函数 $y = f(x) + x^3$ 为偶函数,

所以 $f(10)+10^3=f(-10)+(-10)^3$. 由 $f(10)=13$, 得 $f(-10)=2\ 013$. 因为函数 $g(x)=f(x)+6$, 所以 $g(-10)=2\ 019$.

16. $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$ 解析: 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称. 补全 $f(x)$ 的图象如图所示. 因为 $xf(x)<0$, 所以当 $x>0$ 时, $f(x)<0$, 结合函数图象, 得 $1<x<2$. 当 $x<0$ 时, $f(x)>0$, 结合函数图象, 得 $x<-2$ 或 $-1<x<0$. 综上所述, 不等式 $xf(x)<0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$.



17. 解: (1) $\because$ 集合 $A=\{x|3\leq x<7\}$,

$$B=\{x|2<x<10\},$$

$$\therefore A\cup B=\{x|2<x<10\}.$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ 当 } C=\emptyset \text{ 时, } 5-a\geq a, \text{ 解得 } a\leq \frac{5}{2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } C\neq\emptyset \text{ 时, 由 } C\subseteq(A\cup B),$$

$$\begin{cases} 5-a<a, \\ 5-a\geq 2, \text{ 解得 } \frac{5}{2}<a\leq 3. \\ a\leq 10, \end{cases}$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

18. 解: (1) 若 $a=1$, 则命题 p : 实数 x 满足 $x^2-4x+3<0$, 解得 $1<x<3$.

命题 q : 实数 x 满足 $5<2x+1<9$, 解得 $2<x<4$.

$$\text{若 } p, q \text{ 同为真命题, 则 } \begin{cases} 1<x<3, \\ 2<x<4, \end{cases} \text{ 解得 } 2<x<3.$$

$\therefore$ 实数 x 的取值范围是 $(2, 3)$.

$$(2) x^2-4ax+3a^2<0 \text{ 可化为 } (x-a)(x-3a)<0,$$

$$\text{又 } \because a>0,$$

$$\therefore a<x<3a.$$

$\because q$ 是 p 的充分不必要条件,

$$\therefore \begin{cases} a\leq 2, \\ 4\leq 3a, \end{cases} \text{ 且两个等号不能同时取到,}$$

$$\text{解得 } \frac{4}{3}\leq a\leq 2.$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{4}{3}, 2\right].$$

19. 解: (1) 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 由 $3-ax\geq 0$,

$$\text{得 } x\leq \frac{3}{a},$$

$$\text{故函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } \left(-\infty, \frac{3}{a}\right].$$

(2) 当 $a-1>0$, 即 $a>1$ 时,

要使 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是减函数, 则需 $3-a\times 1\geq 0$, 此时 $1<a\leq 3$.

当 $a-1<0$, 即 $a<1$ 时,

要使 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是减函数,

则需 $-a>0$, 且 $3-a\times 0\geq 0$, 此时 $a<0$.

综上所述, 所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 3]$.

20. 解: 设楼房每平方米的平均综合费用为 y 元.

$$\text{依题意, 得 } y=s+\frac{8\ 000\times 10\ 000}{4\ 000x}=50x+\frac{20\ 000}{x}+3\ 000(x\geq 12, x\in\mathbf{N}^*).$$

$$\text{因为 } 50x+\frac{20\ 000}{x}+3\ 000\geq 2\times\sqrt{50x\cdot\frac{20\ 000}{x}}+3\ 000=5\ 000,$$

$$\text{当且仅当 } 50x=\frac{20\ 000}{x}, \text{ 即 } x=20 \text{ 时, 等号成立,}$$

所以当 $x=20$ 时, y 取得最小值 $5\ 000$.

所以为了使楼房每平方米的平均综合费用最少, 该楼房应建为 20 层, 每平方米的平均综合费用的最小值为 $5\ 000$ 元.

21. 解: (1) 当 $a=0$ 时, $f(x)=x^2$,

$$\text{对任意 } x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty), f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数.

$$\text{当 } a\neq 0 \text{ 时, } f(x)=x^2+\frac{a}{x}(a\neq 0, x\neq 0),$$

$$\text{取 } x=\pm 1, \text{ 得 } f(-1)+f(1)=2\neq 0,$$

$$f(-1)-f(1)=-2a\neq 0,$$

$$\therefore f(-1)\neq -f(1), f(-1)\neq f(1),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

综上, 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 为偶函数; 当 $a\neq 0$ 时, $f(x)$ 为非奇非偶函数.

$$(2) \text{ 设 } 2\leq x_1<x_2,$$

$$\text{则 } f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{x_1}-x_2^2-\frac{a}{x_2}=\frac{(x_1-x_2)}{x_1x_2}\cdot$$

$$[x_1x_2(x_1+x_2)-a],$$

要使函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 恒成立,

$$\because x_1-x_2<0, x_1x_2>4,$$

即 $a<x_1x_2(x_1+x_2)$ 恒成立.

$$\text{又 } \because x_1+x_2>4, \therefore x_1x_2(x_1+x_2)>16.$$

则 $a\leq 16$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, 16]$.

22. 解: (1) 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$,

则 $f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$,
 $f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b = 2x + 2$,
 解得 $a = b = 1$,
 即 $f(x) = x^2 + x + c$,
 由 $f(1) = 2 + c = 3$, 得 $c = 1$,
 所以 $f(x) = x^2 + x + 1$.

(2) $g(x) = x^2 - 2mx + 2 = (x-m)^2 + 2 - m^2$, 其图象的对称轴为 $x = m$, 开口向上, 分三种情况:

①当 $m < -2$ 时, 函数 $y = g(x)$ 在区间 $[-2, 3]$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = g(-2) = 6 + 4m$.

②当 $-2 \leq m \leq 3$ 时, 对称轴在 $[-2, 3]$ 上, $g(x)_{\min} = g(m) = 2 - m^2$.

③当 $m > 3$ 时, 函数 $y = g(x)$ 在区间 $[-2, 3]$ 上单调递减, $g(x)_{\min} = g(3) = 11 - 6m$.

$$\text{综上, } g(x)_{\min} = \begin{cases} 6 + 4m, & m < -2, \\ 2 - m^2, & -2 \leq m \leq 3, \\ 11 - 6m, & m > 3. \end{cases}$$

期末检测卷(A卷)

1. C 解析: 对 A, 该集合是以点为元素的, 故错误; 对 B, 空集不含有任何元素, 故错误; 对 C, 空集是任何集合的子集, 故正确; 对 D, $\emptyset \subseteq \{(x, y) | x \cdot y \geq 0\}$, 故错误. 故选 C.

2. D 解析: $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{1, 2\}$, 因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$. 当 $a = 0$ 时, 集合 $B = \{x | ax + 2 = 0\} = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A$. 当 $a \neq 0$ 时, 集合 $B = \{x | ax + 2 = 0\} = \left\{-\frac{2}{a}\right\}$, 由 $B \subseteq A$, $A = \{1, 2\}$, 得 $-\frac{2}{a} = 1$ 或 $-\frac{2}{a} = 2$, 解得 $a = -2$ 或 $a = -1$. 综上所述, 实数 a 的取值集合为 $\{-2, -1, 0\}$.

3. B 解析: 由于点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 所以 $\tan \alpha < 0, \cos \alpha < 0$, 所以 α 是第二象限角. 故选 B.

4. C 解析: $f(x) = \sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore \omega = \frac{1}{2}$,
 $\therefore T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$, 则函数的最小正周期为 2π . 故选 C.

5. C 解析: $\because a = \ln 3 > \ln e = 1, b = \log_{\frac{1}{e}} 3 < \log_{\frac{1}{e}} 1 = 0, c = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \therefore a > c > b$. 故选 C.

6. B 解析: 函数 $f(x) = x \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 令 $f(x) = x \ln x = 0$, 得 $x = 1$, 零点不是点, CD 错误. 故选 B.

7. B 解析: 对于 A 和 C, 由于函数 $y = x + a$ 是增函数, 图象应该呈上升趋势, 所以 A, C 错误; 对于 B, 若函数 $y = x + a$ 的图象是正确的, 则 $a > 1$, 所以 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 函数 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象是正确的, 所以 B 正确; 对于 D, 若函数 $y = x + a$ 的图象是正确的, 则 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{1}{a} > 1$, 则函数 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 是增函数, 所以 D 错误. 故选 B.

8. D 解析: 由图象知 $A = 1$, 周期 $T = 2 \times \left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 则 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$. 由图象, 得 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 因此 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 令 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{\pi}{12}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴. $\because x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, $\therefore x_1, x_2$ 关于 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称. $\therefore x_1 + x_2 = 2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

9. ABD 解析: 由题知 $f(0) \cdot f(1) < 0$, 所以根据函数零点存在定理, 得 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一定有零点, 又 $f(1) \cdot f(2) > 0$, 无法判断 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上是否有零点, 在区间 $(1, 2)$ 上可能有零点. 故选 ABD.

10. ABC 解析: 由题意, 将函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $y = g(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{12}\right)$ 的图象. 若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调递增函数, 则满足 $\begin{cases} -\frac{\omega\pi}{12} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\omega\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $0 < \omega \leq \frac{6}{5}$, 所以实数 ω 的可能取值为 $\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}$. 故选 ABC.

11. ACD 解析: 将 $\left(2, \frac{4}{9}\right)$ 代入函数, 则 $\frac{4}{9} = a^2$, 解得 $a = \frac{2}{3}$, 则 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^t$. 对于 A, 当 $t = 4$ 时, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} < \frac{1}{5}$, 故 A 正确; 对于 B, 第 1 个月的减少量为 $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$, 第 2 个月的减少量为

$\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$, 不相等, 故 B 错误; 对于 C, 这种有害物质每月的衰减率为 $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^t - \left(\frac{2}{3}\right)^{t+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^t} = \frac{1}{3}$, 故 C 正确; 对于 D, 可得

$\left(\frac{2}{3}\right)^{t_1} = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{t_2} = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{t_3} = \frac{1}{8}$, 则 $\left(\frac{2}{3}\right)^{t_1+t_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{t_3}$, 则 $t_1 + t_2 = t_3$, 故 D 正确. 故选 ACD.

12. AD 解析: 对于 A, 设 $t = g(x)$, 则由 $f[g(x)] = 0$, 即 $f(t) = 0$, 则 $t = -b$ 或 $t = 0$ 或 $t = b$, 即 $g(x) = -b$ 或 $g(x) = 0$ 或 $g(x) = b$. 由于 $t = g(x)$ 是减函数, 又 $a > c > b > 0$, 所以有 3 个解, 所以 A 正确. 对于 B, 设 $t = f(x)$, 则由 $g[f(x)] = 0$, 即 $g(t) = 0$, 解得 $t = b$. 因为 $c > b > 0$, 所以 $f(x) = b$ 有 3 个解, 所以 B 不正确. 对于 C, 设 $t = f(x)$, 若 $f[f(x)] = 0$, 即 $f(t) = 0$, 则 $t = -b$ 或 $t = 0$ 或 $t = b$, 则 $f(x) = -b$ 或 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = b$, 因为 $a > c > b > 0$, 所以每个方程对应着 3 个根, 所以共有 9 个解, 所以 C 错误. 对于 D, 设 $t = g(x)$, 若 $g[g(x)] = 0$, 即 $g(t) = 0$, 所以 $t = b$, 所以方程 $g(x) = b$ 只有 1 解, 所以 D 正确. 故选 AD.

13. 3 解析: 因为 $x > 0$, 所以 $f(x) = 9x + \frac{1}{4x} \geq 2\sqrt{9x \cdot \frac{1}{4x}} = 3$, 当且仅当 $9x = \frac{1}{4x}$, 即 $x = \frac{1}{6}$ 时取等号, 所以函数 $f(x) = 9x + \frac{1}{4x} (x > 0)$ 的最小值是 3.

14. $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 解析: 因为不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 恒成立, 所以 $a \geq -\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 对一切 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 恒成立, 令 $f(x) = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 可知 $a \geq f(x)_{\max}$ 成立. 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \leq -\frac{5}{2}$, 所以 $a \geq -\frac{5}{2}$.

15. $x = -\frac{5\pi}{24}$ 解析: $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$, 令 $2x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k = -1$ 时, $x = -\frac{5\pi}{24}$ 是与 y 轴最近的对称轴.

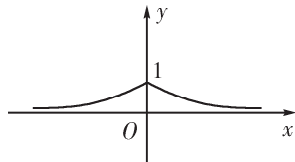
16. $\left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$ 解析: $\because f(x) = \log_a \frac{x-1}{x+1} - 1$, $\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. $\because m < n$, 且 $\log_a 2n < \log_a 2m$, $\therefore 0 < a < 1$. $\because t = 1 - \frac{2}{x+1}$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减. $\therefore f(m) = \log_a 2m, f(n) = \log_a 2n$. $\therefore n > m > 1$ 且 m, n 是方程 $f(x) = \log_a 2x$ 的两根. $\therefore \log_a 2x = \log_a \frac{x-1}{x+1} - 1$,

即 $\log_a 2x - \log_a \frac{x-1}{x+1} = \log_a \frac{2x(x+1)}{x-1} = -1$. $\therefore 2ax(x+1) = x-1$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不等实根, 即 $2ax^2 + (2a-1)x + 1 = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两

个不等实根. $\therefore \begin{cases} \Delta = (2a-1)^2 - 8a > 0, \\ -\frac{2a-1}{4a} > 1, \\ 2a + (2a-1) + 1 > 0, \end{cases}$ 解得 $0 <$

$a < \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$.

17. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2) 由图象, 得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$, $f(x)$ 的值域为 $(0, 1]$.

18. 解: (1) 要使函数 $f(x)$ 有意义, 则 $\begin{cases} x+2 > 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 < x < 2$.

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$.

(2) 由 (1) 知, $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$,

设 $\forall x \in (-2, 2)$, 则 $-x \in (-2, 2)$.

且 $f(-x) = \lg(-x+2) - \lg(2+x) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 易知 $f(x)$ 在定义域 $(-2, 2)$ 上是增函数, 因为 $f(x) > 1$,

所以 $\lg \frac{x+2}{2-x} > 1$.

所以 $\frac{x+2}{2-x} > 10$, 解得 $x > \frac{18}{11}$.

所以不等式 $f(x) > 1$ 的解集是 $\left(\frac{18}{11}, 2\right)$.

19. 解: (1) 设 $f(x) = x^a$,

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $P(2, 4)$,

所以 $f(2)=2^a=4$, 解得 $a=2$,

所以 $f(x)=x^2$.

(2) 由(1)可知 $g(x)=x^2+\frac{2}{x}$,

任取 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{则 } g(x_1) - g(x_2) = x_1^2 + \frac{2}{x_1} - x_2^2 - \frac{2}{x_2} = (x_1 - x_2) \cdot \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2}{x_1 x_2}.$$

因为 $x_1, x_2 \in (0, 1)$,

所以 $x_1 x_2 \in (0, 1), x_1 + x_2 \in (0, 2)$,

所以 $x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2 < 0$.

又 $x_1 > x_2$, 所以 $(x_1 - x_2) \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2}{x_1 x_2} < 0$,

即 $g(x_1) < g(x_2)$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.

20. 解: (1) $\because f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} (1 + \cos x) + \frac{1}{2} =$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$\therefore f(x)$ 最小正周期为 2π .

(2) 选①时, $g(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 1 -$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

由 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 得 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$,

故 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(x) \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$,

$g(x)=a$ 有解, 故 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$.

选②时, $g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6}\right] + 1 = 1 +$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

由 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 得 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$,

故 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, $g(x) \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$.

$g(x)=a$ 有解, 故 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$.

21. 解: (1) 设森林面积的年增长率为 x ,

$$\text{则 } a(1+x)^{10} = 2a,$$

$$\text{即 } (1+x)^{10} = 2, \text{ 解得 } x = 2^{\frac{1}{10}} - 1,$$

因此, 森林面积的年增长率为 $2^{\frac{1}{10}} - 1$.

(2) 设已经植树造林 n 年,

$$\text{则 } a(1+2^{\frac{1}{10}}-1)^n = \sqrt{2}a, \text{ 即 } 2^{\frac{n}{10}} = 2^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{则 } \frac{n}{10} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } n = 5,$$

因此, 已经植树造林 5 年.

(3) 设至少需要植树造林 m 年,

$$\text{则 } a(1+2^{\frac{1}{10}}-1)^m \geq 6a, \text{ 可得 } 2^{\frac{m}{10}} \geq 6,$$

$$\text{所以 } \frac{m}{10} \geq \log_2 6 = \frac{\lg 6}{\lg 2} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 2} = 1 + \frac{\lg 3}{\lg 2},$$

$$\text{则 } m \geq 10 + \frac{10 \lg 3}{\lg 2} \approx 10 + \frac{10 \times 0.4771}{0.3010} \approx 25.8.$$

所以至少需要植树造林 26 年.

22. 解: (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\therefore f(0) = 0, \therefore \lg(1+m) = 0, \therefore m = 0,$$

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时, } f(x) = \lg \frac{1}{3^x},$$

$$\therefore f(-x) + f(x) = \lg \frac{1}{3^{-x}} + \lg \frac{1}{3^x} = \lg 3^x + \lg \frac{1}{3^x} =$$

$$\lg 1 = 0, \text{ 即 } f(-x) = -f(x), \text{ 符合题意,}$$

$$\therefore f(x) = \lg \frac{1}{3^x}.$$

(2) 由题意, 得 $\lg\left(\frac{1}{3^x} + m\right) > 0 = \lg 1$,

即 $\frac{1}{3^x} + m > 1$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立,

$$\therefore m > 1 - \frac{1}{3^x} \text{ 在 } (-\infty, 1] \text{ 恒成立,}$$

$\because t = 1 - \frac{1}{3^x}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增,

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } t_{\max} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{3^x} \leq \frac{2}{3}, \therefore m > \frac{2}{3},$$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

(3) 当 $m = -1$ 时, $f(x) = \lg\left(\frac{1}{3^x} - 1\right)$ 的定义域为

$(-\infty, 0)$, 且 $f(x)$ 在定义域内单调递减,

$$\therefore \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < 0, \\ 1 - 2x < 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 > 1 - 2x, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -1 < x < \frac{5}{2}, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x > 2 \text{ 或 } x < -\frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore 2 < x < \frac{5}{2}.$$

$\therefore$ 不等式 $f(2x^2 - 3x - 5) < f(1 - 2x)$ 的解集为 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

期末检测卷(B卷)

1. C 解析: $\because$ 集合 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{x | x^2 - 4x + m = 0\}, A \cap B = \{1\}, \therefore x = 1$ 是方程 $x^2 - 4x + m = 0$

的解,即 $1-4+m=0$, $\therefore m=3$, $\therefore B=\{x|x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$.

2. D 解析: $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3. D 解析: 对于 A: 当 $c=0$ 时, $ac^2=bc^2=0$, A 错误; 对于 B: 当 $a=-2, b=-1$ 时, $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{b} = -1$, 此时 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, B 错误; 对于 C: $\because \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = \frac{b^2 - a^2}{ab} < 0$, $\therefore \frac{b}{a} < \frac{a}{b}$, C 错误; 对于 D: $\because a < b < 0$, $\therefore a - b < 0$, $\therefore a^2 - ab = a(a - b) > 0, ab - b^2 = b(a - b) > 0$, $\therefore a^2 > ab > b^2$, D 正确.

4. A 解析: $f[f(\log_3 2)] = f\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2}\right] = f(-3^{-\log_3 2}) = f(-3^{\log_3 2^{-1}}) = f(-2^{-1}) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. D 解析: 根据表格中的数据, 可得 y 随着 x 的增大而增大, 所以 C 选项不符合题意; 分别将 x 的值代入给定的函数的解析式, 求得相应的 y 的值, 可判断函数 $y=2+\ln x$ 最符合题意. 故选 D.

6. C 解析: $\because f(x)=a^{x-2}+1(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 恒过定点 $(2, 2)$, $\therefore m=n=2$, $\therefore g(x)=2-2^x$, $\therefore g(x)$ 为减函数, 且过点 $(0, 1)$, $\therefore g(x)$ 的函数图象不经过第三象限. 故选 C.

7. C 解析: 因为函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 所以 $\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$, 所以 $\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi=k\pi-\frac{13\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$, 所以 $|\varphi|_{\min}=\frac{\pi}{6}$.

8. C 解析: 设经过 n 年后的投入资金为 y 万元, 则 $y=500(1+20\%)^n$. 令 $y\geq 1\ 600$, 即 $500(1+20\%)^n\geq 1\ 600$, 所以 $1.2^n\geq \frac{16}{5}$, 所以 $n\geq \log_{1.2} \frac{16}{5} = \frac{\lg \frac{16}{5}}{\lg 1.2} = \frac{\lg 2^4 - \lg 5}{\lg 6 - \lg 5} = \frac{4\lg 2 - (1 - \lg 2)}{\lg 2 + \lg 3 - (1 - \lg 2)} = \frac{5\lg 2 - 1}{2\lg 2 + \lg 3 - 1} \approx \frac{5 \times 0.301 - 1}{2 \times 0.301 + 0.477 - 1} \approx 6.39$. 所以第 7 年, 即 2027 年该地用于垃圾分类的资金开始不低于 1 600 万元. 故选 C.

9. AC 解析: 由题意可知, 原命题为特称量词命题且为假命题. 选项 A: 原命题为特称量词命题, $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, 所以原命题为假命题, 所以

选项 A 满足条件. 选项 B: 原命题是全称量词命题, 所以选项 B 不满足条件. 选项 C: 原命题为特称量词命题, 在方程 $x^2+2x+2=0$ 中, $\Delta=4-4\times 2<0$, 所以方程无实数根, 所以原命题为假命题, 所以选项 C 满足条件. 选项 D: 当 $x=-1$ 时, 命题成立. 所以原命题为真命题, 所以选项 D 不满足条件. 故选 AC.

10. CD 解析: 在 A 中, 二次方程有实数根, 等价于判别式 $\Delta=(m-3)^2-4m\geq 0$, 解得 $m\leq 1$ 或 $m\geq 9$, 即二次方程有实数根的充要条件是 $m\in\{m|m\leq 1 \text{ 或 } m\geq 9\}$, 故 A 错误;

在 B 中, 二次方程有一正一负根, 等价于 $\begin{cases} (m-3)^2-4m>0, \\ m<0, \end{cases}$ 解得 $m<0$, 方程有一正一负根的充要条件是 $m\in\{m|m<0\}$, 故 B 错误;

在 C 中, 方程有两正实数根, 等价于 $\begin{cases} \Delta=(m-3)^2-4m\geq 0, \\ 3-m>0, \\ m>0, \end{cases}$ 解得 $0<m\leq 1$, 故方程有两正实数根的充要条件是 $m\in\{m|0<m\leq 1\}$, 故 C 正确;

在 D 中, 方程无实数根, 等价于 $\Delta=(m-3)^2-4m<0$, 解得 $1<m<9$, 而 $\{m|1<m<9\}\subseteq\{m|m>1\}$, 故 $m\in\{m|m>1\}$ 是方程无实数根的必要条件, 故 D 正确. 故选 CD.

11. BC 解析: 由函数图象, 知 $\frac{T}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 所以选项 A 错误, 当 $x = \frac{\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12}$ 时, $y = -1$, 所以 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k\in\mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi (k\in\mathbf{Z})$, 即函数的解析式为 $y = \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$. 而 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$. 故选 BC.

12. BC 解析: $\because g(1) = [f(1)] = \left[\frac{2}{1+2} - \frac{1}{2}\right] = 0$, $g(-1) = [f(-1)] = \left[\frac{2^{-1}}{1+2^{-1}} - \frac{1}{2}\right] = -1$, $\therefore g(-1) \neq g(1)$, 则 $g(x)$ 不是偶函数, 故 A 错误; $\because f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) + f(x) = \frac{2^{-x}}{1+2^{-x}} + \frac{2^x}{1+2^x} - 1 = \frac{2^x \cdot 2^{-x}}{2^x(1+2^{-x})} +$

$\frac{2^x}{1+2^x} - 1 = \frac{1+2^x}{1+2^x} - 1 = 0$, $\therefore f(x)$ 为奇函数, 故 B

正确; $\because f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2} = \frac{1+2^x-1}{1+2^x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^x}$, 又 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $\therefore f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 故 C 正确; $\because 2^x > 0$, $\therefore 1+2^x > 1$, 则 $0 < \frac{1}{1+2^x} < 1$, 可得 $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^x} < \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$. $\therefore g(x) = [f(x)] \in (-1, 0)$, 故 D 错误. 故选 BC.

13. -7 解析: 原式 $= -9 + (2^3)^{\frac{1}{3}} = -9 + 2 = -7$.

14. $\frac{2}{3}$ 解析: 由题意, 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x+4) = f(x)$ 成立, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, 所以 $f(2\ 020) + f(2\ 021) + f(2\ 022) = f(0) + f(1) + f(2)$. 又由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $x \in (-2, 0)$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则 $f(0) = 0$, $f(1) = -f(-1) = -(3^{-1} - 1) = \frac{2}{3}$, 因为 $f(x+4) = f(x)$, 令 $x = -2$, 可得 $f(2) = f(-2) = -f(2)$, 解得 $f(2) = 0$. 所以 $f(2\ 020) + f(2\ 021) + f(2\ 022) = 0 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$.

15. $(-\infty, \frac{4}{3}]$ 解析: 依题意, 得 $a-2 < 0$, 即 $a < 2$. 又因为关于 x 的不等式 $(a-2)x^2 + (4a-10)x + 4a-12 = (x+2)[(a-2)x + 2a-6] = 0$, 方程实根为 $x = -2$ 或 $x = \frac{2a-6}{2-a}$. 又因为 $x = \frac{2a-6}{2-a} = \frac{2a-4-2}{2-a} = -2 - \frac{2}{2-a} < -2$, 又关于 x 的不等式 $(a-2)x^2 + (4a-10)x + 4a-12 > 0$ 的解集中至多包含两个整数, 所以 $\frac{2a-6}{2-a} \geq -5$, 解得 $a \leq \frac{4}{3}$. 所以实数 a 的取值范围是 $a \leq \frac{4}{3}$.

16. $\frac{27}{8}$ 解析: 根据题意, 设 $BE = m$, 根据 $\sin \angle EPB = \frac{1}{3}$, 得 $PE = 3m$. 因为 $\cos \angle PEB = \sin \angle EPB = \frac{1}{3}$, 所以 $\cos \angle B'EA = \cos(\pi - 2\angle PEB) = -\cos 2\angle PEB = 1 - 2\cos^2 \angle PEB = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. 根据翻折, 可得 $B'E = BE = m$. 又 $AE = 2 - m$, 在 $\text{Rt}\triangle B'AE$ 中, $\cos \angle B'EA = \frac{2-m}{m} = \frac{7}{9}$, 解得 $m =$

$\frac{9}{8}$. 所以折痕 $PE = 3m = \frac{27}{8}$.

17. 解: 由图可知, 函数 $y = (\frac{b}{a})^x$ 在定义域上单调递减,

$$\therefore 0 < \frac{b}{a} < 1,$$

$$\because y = ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a},$$

$$\therefore \text{顶点的横坐标为 } -\frac{b}{2a},$$

$$\because 0 < \frac{b}{a} < 1, \therefore 0 < \frac{b}{2a} < \frac{1}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0,$$

故顶点的横坐标的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 0)$.

18. 解: (1) 由 α, β 均为锐角, $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,

得 $\alpha - \beta$ 在第四象限,

$$\text{则 } \cos(\alpha - \beta) = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = -\frac{1}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \text{ 得 } \cos \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) +$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{3}{5} \times$$

$$\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{9\sqrt{10}}{50}.$$

19. 解: (1) 根据题意, 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -2^x -$

$$\frac{1}{2^x} + 1 = -\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) + 1,$$

$$\text{设 } t = 2^x, x \in [-1, 1], \text{ 则 } t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right],$$

$$\text{所以 } t + \frac{1}{t} \in \left[2, \frac{5}{2}\right],$$

$$\text{故 } f(x) \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right].$$

$$(2) f(x) = a \cdot 2^{x+1} - \frac{1}{2^x} + 1 = 0,$$

$$\text{即 } 2a \cdot (2^x)^2 + 2^x - 1 = 0.$$

$$\text{令 } 2^x = t, \text{ 所以 } 2a \cdot t^2 + t - 1 = 0 \text{ 有正根,}$$

当 $a < 0$ 时, $\Delta \geq 0$ 即可,

$$\text{即 } 1 + 8a \geq 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{8} \leq a < 0.$$

当 $a = 0$ 时, $t = 1$ 符合题意.

当 $a > 0$ 时, 设其两根分别为 t_1, t_2 ,

$$\text{则 } t_1 \cdot t_2 = -\frac{1}{2a} < 0, \text{ 显然符合题意.}$$

故实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$.

20. 解: (1) 由题意, 函数 $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) +$

$$\sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right).$$

因为函数 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 可得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2,$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$\text{即 } \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{解得 } \omega = \frac{2}{3} + 4k, k \in \mathbf{Z}.$$

又因为 $0 < \omega < 1$, 所以 $\omega = \frac{2}{3}$.

$$\text{所以函数 } f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right).$$

故函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3\pi$.

(2) 由(1)知, 函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$,

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内不存在零点,

$$\text{则 } \left(\omega\pi + \frac{\pi}{6}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{6}\right) \subseteq (k\pi, k\pi + \pi),$$

$$\text{即 } \begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq k\pi, \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq k\pi + \pi, \end{cases}$$

$$\text{则 } k - \frac{1}{6} \leq \omega \leq \frac{k}{2} + \frac{5}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{由于 } k - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{2} + \frac{5}{12}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } k \leq \frac{7}{6} \text{ 且 } k \in \mathbf{Z}.$$

又因为 $\omega > 0$, 所以 $k = 0$ 或 $k = 1$,

$$\text{所以正实数 } \omega \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right).$$

21. 解: (1) 因为每件产品售价为 10 元,

所以 x 万件产品销售收入为 $10x$ 万元.

依题意得, 当 $0 < x < 8$ 时,

$$P(x) = 10x - \left(\frac{1}{2}x^2 + 4x\right) - 5 = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 5.$$

$$\text{当 } x \geq 8 \text{ 时, } P(x) = 10x - \left(11x + \frac{49}{x} - 33\right) - 5 =$$

$$28 - \left(x + \frac{49}{x}\right).$$

$$\text{所以 } P(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 5, & 0 < x < 8, \\ 28 - \left(x + \frac{49}{x}\right), & x \geq 8. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } 0 < x < 8 \text{ 时, } P(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 13,$$

$$P(x)_{\max} = P(6) = 13.$$

当 $x \geq 8$ 时, 由双勾函数的单调性可知,

函数 $P(x)$ 在区间 $[8, +\infty)$ 上为减函数.

$$P(x)_{\max} = P(8) = \frac{111}{8}.$$

由 $13 < \frac{111}{8}$, 则可知当年产量为 8 万件时, 小李在这一产品的生产中所获年利润最大, 最大年利润为 $\frac{111}{8}$ 万元.

22. 解: (1) 因为函数 $f(x) = \ln(x+a)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 $(1, 0)$,

所以 $\ln(1+a) = 0$, 解得 $a = 0$,

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \ln x$.

(2) 由(1)可知, $y = \ln x + \ln(2x-k) = \ln(2x^2 - kx)$, $x \in (1, 2)$.

$$\text{令 } \ln(2x^2 - kx) = 0, \text{ 得 } 2x^2 - kx - 1 = 0,$$

$$\text{设 } h(x) = 2x^2 - kx - 1,$$

则函数 $y = f(x) + \ln(2x-k)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有零点,

等价于函数 $y = h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点,

$$\text{所以 } \begin{cases} h(1) = 1 - k < 0, \\ h(2) = 7 - 2k > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < k < \frac{7}{2},$$

因为 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 k 的值为 2 或 3.

(3) 因为 $m > 0$, 且 $m > \frac{1}{m}$,

$$\text{所以 } m > 1, \text{ 则 } 0 < \frac{1}{m} < 1.$$

$$\text{因为 } g(x) = x^2 - 2e^{f(x)} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1,$$

所以 $g(x)$ 的最大值可能是 $g(m)$ 或 $g\left(\frac{1}{m}\right)$.

$$\text{因为 } g(m) - g\left(\frac{1}{m}\right) = m^2 - 2m - \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right) =$$

$$m^2 - \frac{1}{m^2} - \left(2m - \frac{2}{m}\right) = \left(m - \frac{1}{m}\right)\left(m + \frac{1}{m} - 2\right) =$$

$$\left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{(m-1)^2}{m} > 0,$$

$$\text{所以 } g(x)_{\max} = g(m) = m^2 - 2m.$$

$$\text{只需 } g(x)_{\max} < -\ln(m-1),$$

$$\text{即 } m^2 - 2m < -\ln(m-1),$$

$$\text{设 } h(m) = m^2 - 2m + \ln(m-1) (m > 1),$$

易知 $h(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } h(2) = 0,$$

$$\text{所以 } m^2 - 2m + \ln(m-1) < 0,$$

$$\text{即 } h(m) < h(2), \text{ 所以 } 1 < m < 2,$$

所以 m 的取值范围是 $(1, 2)$.