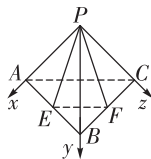


参考答案

第一章 空间向量与立体几何

1. B 解析: 根据空间中点的坐标的定义易得点 A 的坐标为 $(1, 1, \frac{1}{2})$, 故选 B.
2. A 解析: 由图可知, 与 $\overrightarrow{AA'}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, 共 3 个, 故选 A.
3. A 解析: 因为向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, x)$,
 $\therefore \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow -8 - 2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$. $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a} \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = -6$. 因此使 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 成立的 x 与使 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 成立的 x 分别是 $\frac{10}{3}$, -6 , 故选 A.
4. B 解析: 由向量的概念和性质可知选项 B 正确. 故选 B.
5. A 解析: (1) 必须 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, (2) 必须 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, (3) 不符合单位向量的定义, 单位向量的模为 1. 故选 A.
6. C 解析: 对于选项 A, 由 $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, $x + y + z = 1 \Leftrightarrow M, A, B, C$ 四点共面知, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 共面; 对于选项 B, D, 易知 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 共面, 故只有选项 C 中 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 不共面, 故选 C.
7. C 解析: $\because M$ 在 EF 上, 不妨设 ME 的长度为 x ,
 $\therefore M(\frac{\sqrt{2}}{2}x, \frac{\sqrt{2}}{2}x, 1)$. $\because A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), D(\sqrt{2}, 0, 0), E(0, 0, 1), B(0, \sqrt{2}, 0)$, $\therefore \overrightarrow{ED} = (\sqrt{2}, 0, -1), \overrightarrow{EB} = (0, \sqrt{2}, -1), \overrightarrow{AM} = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}, 1)$. 设平面 BDE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$, 易知可取 $\mathbf{n} = (1, 1, \sqrt{2})$. $\therefore$ 有 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2} + 1 = 0$. $\therefore \sqrt{2}x = \sqrt{2}$. $\therefore x = 1$. $\therefore M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, 故选 C.
8. C 解析: 如图, 以 P 为坐标原点, PA, PB, PC 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系.



设 $PA = PB = PC = 2$, 则 $P(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2), E(1, 1, 0), F(0, 1, 1)$, 所以

$\overrightarrow{PB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{PE} = (1, 1, 0), \overrightarrow{PF} = (0, 1, 1)$. 设平面 PEF 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PE} = x + y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PF} = y + z = 0, \end{cases} \text{取 } x = 1, \text{得 } \mathbf{n} = (1, -1, 1).$$

PB 与平面 PEF 所成角为 θ , 则 $\sin \theta =$

$$\frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{故选 C.}$$

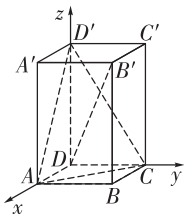
9. ABC 解析: 对于 A, $\mathbf{b} = -2\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$; 对于 B, $\mathbf{d} = -3\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{d} \parallel \mathbf{c}$; 对于 C, 零向量与任何向量都平行; 对于 D, 不满足 $\mathbf{g} = \lambda \mathbf{h}$, 所以 $\mathbf{g}$ 与 $\mathbf{h}$ 不是平行向量, 综上所述, 选 ABC.

10. AC 解析: 因为 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 2 + 4 = 0$, 所以 $AP \perp AB$, 故 A 正确; $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (3, -3, -3), \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3 + 6 - 3 = 6 \neq 0$, 故 B 不正确; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (6, 1, -4), BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{53}$, 故 C 正确; $\overrightarrow{AP} = (1, -2, 1), \overrightarrow{BC} = (6, 1, -4), \frac{6}{1} \neq \frac{1}{-2}$, 故 D 不正确. 故选 AC.

11. ACD 解析: 根据题意知, 点 B_1 的坐标为 $(4, 5, 3)$, 选项 A 正确; 点 B 的坐标为 $(4, 5, 0)$, 点 C_1 的坐标为 $(0, 5, 3)$, 故点 C_1 关于点 B 对称的点为 $(8, 5, -3)$, 选项 B 错误; 连接 AD_1, BC_1, AC_1 , 在长方体中, $AD_1 = BC_1 = \sqrt{AD^2 + AA_1^2} = 5 = AB$, 所以四边形 ABC_1D_1 为正方形, AC_1 与 BD_1 垂直且平分, 即点 A 关于直线 BD_1 对称的点为 $C_1(0, 5, 3)$, 选项 C 正确; 点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为 $(8, 5, 0)$, 选项 D 正确. 故选 ACD.

12. AC 解析: 如图, 以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DD' 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0), A(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D'(0, 0, 2), B(1, 1, 0), B'(1, 1, 2)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AD'} = (-1, 0, 2)$. 设平面 ACD' 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = -x + y = 0, \\ \overrightarrow{AD'} \cdot \mathbf{n} = -x + 2z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 则 $x = 2, y = 2$, 可得 $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$. 对于选项 A, $\overrightarrow{AB'} = (0, 1, 2), |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AB'} \rangle| = \frac{2+2}{3 \times \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$, 故选项 A 正确; 对于选项 B, $\overrightarrow{B'D} = (-1, -1, -2), |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{B'D} \rangle| = \frac{|-2-2-2|}{3 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故选项 B 错误; 对于选项 C, $\overrightarrow{B'C} = (-1, 0, -2), |\cos \langle \mathbf{n},$

$|\overrightarrow{B'C}| = \frac{|-2-2|}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, $\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 0)$, $|\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|-2-2|}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故选项 D 错误. 综上, 故选 AC.



13. $(1, 1, 1)$ (答案不唯一) 解析: 设与 $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ 垂直的向量 $\mathbf{b} = (x, y, z)$, 由 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 可得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x - z = 0$, 取 $x = 1, y = 1, z = 1$, 则 $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ 符合题意.

14. $(4, 1, 1)$ 解析: 由题意得, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, 所以 $\overrightarrow{OB}$ 在基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 下的坐标为 $(4, 1, 1)$.

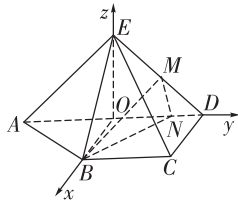
15. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 解析: 结合已知条件和题图可知, $A_1(0, 0, 1), E(0, 0, 0), D(0, 1, 0), B(1, 0, 0), C(2, 1, 0), P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{A_1C} = (2, 1, -1)$. 不妨设 $F(x_0, y_0, z_0)$, 则 $\overrightarrow{A_1F} = (x_0, y_0, z_0 - 1)$. 因为点 F 在棱 A_1C 上, 所以可设 $\overrightarrow{A_1F} = \lambda \overrightarrow{A_1C} = (2\lambda, \lambda, -\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, 解得 $x_0 = 2\lambda, y_0 = \lambda, z_0 = 1 - \lambda$, 所以点 F 的坐标为 $(2\lambda, \lambda, 1 - \lambda)$, 从而 $\overrightarrow{PF} = (2\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}, 1 - \lambda)$, 由题意可知, $\overrightarrow{EB} = (1, 0, 0)$ 为平面 A_1ED 的一个法向量, 故 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$, 即 $2\lambda - \frac{1}{2} = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$, 所以点 F 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

16. $\frac{5}{3}$ 解析: 连接 EO. 因为 $AE = DE$, 所以 $EO \perp AD$, 因为 $EO \subset$ 平面 ADE, 且平面 ADE $\perp$ 平面 ABCD, 平面 ADE $\cap$ 平面 ABCD = AD, 所以 $EO \perp$ 平面 ABCD, 又 $OB \subset$ 平面 ABCD, $OD \subset$ 平面 ABCD, 所以 $EO \perp OB, EO \perp OD$, 以 O 为原点, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $O(0, 0, 0), M(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), A(0, -1, 0), E(0, 0, 1), D(0, 1, 0), B(1, 0, 0)$, 设 $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OD}$, 则 $N(0, \lambda, 0)$, 所以 $\overrightarrow{NB} = (1, -\lambda, 0), \overrightarrow{MB} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \overrightarrow{AE} = (0, 1, 1), \overrightarrow{BE} = (-1, 0, 1)$, 设平面 BMN 的一个法

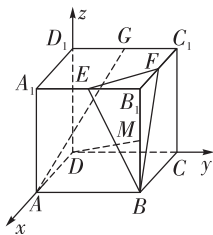
向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{NB} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 0, \\ a - \lambda b = 0, \end{cases} \text{ 令 } a = \lambda, \text{ 此时 } \mathbf{n} = (\lambda, 1, 2\lambda - 1).$$

同理可求得平面 ABE 的一个法向量 $\mathbf{m} = (1, -1, 1)$. 因为平面 BMN $\perp$ 平面 ABE, 所以 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, 即 $\lambda - 1 + 2\lambda - 1 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 所以 $AN = \frac{5}{3}$.



17. 证明: (1) 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD₁ 所在直线分别为 x 轴、y 轴和 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,



则 $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), E(1, \frac{1}{2}, 1),$

$F(\frac{1}{2}, 1, 1), G(0, \frac{1}{2}, 1),$

所以 $\overrightarrow{EF} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{BF} = (-\frac{1}{2}, 0, 1),$

$\overrightarrow{AG} = (-1, \frac{1}{2}, 1).$

所以 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF}$, 故 $\overrightarrow{AG}$ 与 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BF}$ 共面.

又因为 $AG \not\subset$ 平面 BEF,

所以 $AG \parallel$ 平面 BEF.

(2) 易知 $\overrightarrow{DM} = (1, 1, \frac{1}{2}),$

所以 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$

$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$

所以 $DM \perp EF, DM \perp BF.$

又因为 $BF \cap EF = F,$

所以 $DM \perp$ 平面 BEF.

18. 证明: 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, 0), B(0, 1, 0), D_1(1, 0, 2), F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), C_1(0, 0,$

2), $E(0,0,1), A(1,1,0)$.

(1) 由 $\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 2), \overrightarrow{BD_1} =$

$(1, -1, 2)$,

得 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0$ 且 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 0$,

故 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BD_1}$ 且 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{CC_1}$,

故 $EF \perp BD_1$ 且 $EF \perp CC_1$.

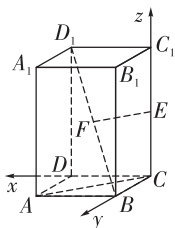
(2) 因为 $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 0), \overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

故 $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AC}$.

又 EF 与 AC 不重合,

故 $EF \parallel AC$.



19. (1) 证明: 因为平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 AB , $AD \perp AB$,

所以 $AD \perp$ 平面 $ABEF$.

又 $BF \subset$ 平面 $ABEF$,

所以 $AD \perp BF$.

(2) 解: 因为 $\angle BAF = 90^\circ$,

所以 $AF \perp AB$,

又 $AD \perp AF, AD \perp AB$,

所以以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $B(1,0,0), E(\frac{1}{2}, 0, 1), P(0, 1, \frac{1}{2}), C(1, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BE} = (-\frac{1}{2}, 0, 1), \overrightarrow{CP} = (-1, -1, \frac{1}{2})$.

所以 $\cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CP} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$,

即异面直线 BE 与 CP 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

20. (1) 证明: 如图, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 SO .

根据题意可知该四棱锥为正四棱锥,

$\therefore SO \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore SO \perp AC$.

又四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AC \perp BD$.

又 $SO \cap BD = O$,

$\therefore AC \perp$ 平面 SBD ,

$\therefore AC \perp SD$.

(2) 解: 假设存在满足条件的点 E .

以 O 为坐标原点, 分别以 OD, OA, OS 所在的直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

令 $OC = 1$,

则 $BC = \sqrt{2}, SC = 2, SO = \sqrt{3}$.

$\therefore D(1, 0, 0), B(-1, 0, 0), C(0, -1, 0), S(0, 0, \sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{CS} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (1, -1, 0), \overrightarrow{DS} = (-1, 0, \sqrt{3})$,

令 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{CS} (0 \leq \lambda \leq 1)$,

则 $\overrightarrow{CE} = (0, \lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = (1, \lambda - 1, \sqrt{3}\lambda)$.

由 $SD \perp$ 平面 PAC , 知 $\overrightarrow{DS}$ 为平面 PAC 的一个法向量.

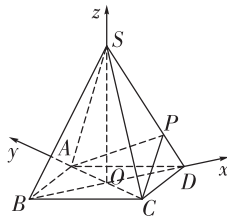
又 $BE \parallel$ 平面 PAC ,

$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DS} = 0$,

$\therefore -1 + 3\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ 存在满足条件的点 E , 点 E 为 SC 上靠近点 C 的三等分点,

$\therefore SE : EC = 2 : 1$.



21. (1) 证明: 以 B 为原点, 以 BC, BA, BB_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(0,0,0), C_1(1,0,1), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), A(0,1,0), B_1(0,0,1)$,

$\overrightarrow{BC_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{BD} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{AB_1} = (0, -1, 1)$.

设平面 BC_1D 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{BC_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x + z = 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} z = -x, \\ y = -x, \end{cases}$

令 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$ 是平面 BC_1D 的一个法向量,

因为 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n} = 0 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 0$,

$\therefore \overrightarrow{AB_1} \perp \mathbf{n}$,

又 $AB_1 \not\subset$ 平面 BC_1D ,

所以 $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D .

(2) 解: 因为 $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D ,

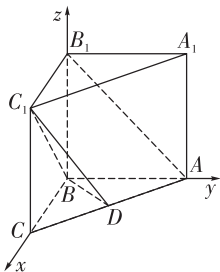
所以直线 AB_1 上任一点到平面 BC_1D 的距离都相等.

由(1)知 $\overrightarrow{BA} = (0, 1, 0)$,

设直线 AB_1 到平面 BC_1D 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以直线 AB_1 到平面 BC_1D 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



22. 解: 设 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$.

$$(1) \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{A_1C_1} - \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

$$\text{因为 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle BAA_1 = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{同理可得 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BC_1}|$$

$$= \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b})^2}$$

$$= \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}$$

$$= \sqrt{1+1+1+1-1-1}$$

$$= \sqrt{2}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{AB_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$$

$$= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 1,$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

第二章 直线和圆的方程(A卷)

1. D 解析: 解方程组 $\begin{cases} 2x+y+2=0, \\ 3x+4y-2=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2, \end{cases}$ 则两条直线的交点坐标为 $(-2, 2)$. 故选 D.

2. A 解析: 直线 l_1 的方程可化为 $4x-2y+2=0$, 则直线 l_1 与 l_2 之间的距离 $d = \frac{|7-2|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}} =$

$$\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ 故选 A.}$$

3. C 解析: 由直线的两点式方程可得, 直线 l 的方程为 $\frac{y-(-3)}{1-(-3)} = \frac{x-1}{-2-1}$, 即 $4x+3y+5=0$. 故选 C.

4. D 解析: 因为直线 l_2 经过点 $C(2, 3)$, $D(-1, a-2)$, 且 $2 \neq -1$, 所以直线 l_2 的斜率存在, 而 l_1 的斜率可能不存在. 下面对 a 进行讨论: 当 $a-2=3$, 即 $a=5$ 时, l_1 的斜率不存在, l_2 的斜率为 0, 此时满足 $l_1 \perp l_2$; 当 $a-2 \neq 3$, 即 $a \neq 5$ 时, 直线 l_1, l_2 的斜率均存在, 设直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 由 $l_1 \perp l_2$, 得 $k_1 k_2 = -1$. 即 $\frac{-3-a}{a-2-3} \times \frac{a-2-3}{-1-2} = -1$, 解得 $a = -6$, 综上, a 的值为 5 或 -6. 故选 D.

5. C 解析: 经过点 $(2, 1)$ 且与两坐标轴围成等腰三角形的直线的斜率为 ± 1 , 故所求直线方程是 $y-1 = \pm(x-2)$, 即 $x+y-3=0$ 或 $x-y-1=0$, 故选 C.

6. A 解析: 将直线 l_1, l_2 的方程化为截距式, 得 $l_1: \frac{x}{2a} + \frac{y}{-b} = 1, l_2: \frac{x}{b} + \frac{y}{-2a} = 1$, 所以直线 l_1 在 x 轴上的截距与直线 l_2 在 y 轴上的截距互为相反数, 直线 l_1 在 y 轴上的截距与直线 l_2 在 x 轴上的截距互为相反数, 故选 A.

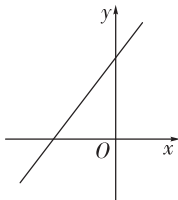
7. A 解析: 由圆 $x^2+y^2=1$ 与 y 轴的负半轴交于点 A , 可得 $A(0, -1)$, 因为 B 为圆上的一动点, 所以可设 $B(\cos \theta, \sin \theta)$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BA} = (0, -1) \cdot (-\cos \theta, -1-\sin \theta) = \sin \theta + 1$, 因为 $\sin \theta \in [-1, 1]$, 所以 $\sin \theta + 1 \in [0, 2]$. 故选 A.

8. B 解析: 圆 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 变形为 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$, 所以圆心为 $P(1, 3)$, 半径 $r = \sqrt{10}$. 因为点 $E(0, 1)$, 所以 $|PE| = \sqrt{1^2+(3-1)^2} = \sqrt{5}$. 根据题意知最长弦 AC (即圆的直径) 和最短弦 BD 垂直, 所以 $|AC| = 2r = 2\sqrt{10}$, $|BD| =$

$2\sqrt{r^2 - |PE|^2} = 2\sqrt{5}$. 所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times |AC| \times |BD| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{5} = 10\sqrt{2}$.

故选 B.

9. ABC 解析: 直线 $Ax + By + C = 0$ 在 x 轴上的截距为 $-\frac{C}{A} = -\frac{BC}{AB} < 0$, 在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B} > 0$, 如图所示:



由图象可知, 直线 $Ax + By + C = 0$ 经过第一、二、三象限. 故选 ABC.

10. AB 解析: 设 $P(a, b)$, 由点 P 在直线 $3x + y - 5 = 0$ 上, 得 $3a + b - 5 = 0$ ①, 又点 P 到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离为 $\frac{|a - b - 1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ ②, 由①与②

可得 $\begin{cases} 3a + b - 5 = 0, \\ a - b - 1 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3a + b - 5 = 0, \\ a - b - 1 = -2, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a = 2, \\ b = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \end{cases}$ 所以点 P 的坐标是 $(2, -1)$ 或

$(1, 2)$, 故选 AB.

11. ACD 解析: 当 $a = 3$ 时, $l_1: 3x + 2y + 9 = 0, l_2: 3x + 2y + 4 = 0, l_1 \parallel l_2$, A 正确; 当 $a = -2$ 时, $l_1: -x + y - 3 = 0, l_2: -x + y - 3 = 0, l_1$ 与 l_2 重合, B 错误; 设直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 当

$a = \frac{2}{5}$ 时, $k_1 = -\frac{\frac{2}{5}}{2} = -\frac{1}{5}, k_2 = -\frac{3}{\frac{2}{5}-1} = 5,$

$k_1 \cdot k_2 = -1$, 所以 $l_1 \perp l_2$, C 正确; 对于 D, $l_1: ax + 2y + 3a = 0$ 可化为 $l_1: a(x + 3) + 2y = 0$, 由 $\begin{cases} x + 3 = 0, \\ 2y = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -3, \\ y = 0. \end{cases}$ 所以 l_1 过定点 $(-3, 0)$;

$l_2: 3x + (a-1)y + 7-a = 0$ 可化为 $l_2: a(y-1) + 3x - y + 7 = 0$, 由 $\begin{cases} y-1 = 0, \\ 3x - y + 7 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$ 所以

l_2 过定点 $(-2, 1)$, D 正确. 故选 ACD.

12. ABD 解析: $\because$ 三条直线不能围成三角形, $\therefore l_1 \parallel l_3$ 或 $l_2 \parallel l_3$ 或 l_1, l_2, l_3 交于一点. ①当 $l_1 \parallel l_3$ 时, $m = \frac{2}{3}$; ②当 $l_2 \parallel l_3$ 时, $m = -\frac{4}{3}$; ③当 l_1, l_2, l_3 交

于一点时, 由 $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0, \\ 4x + 3y + 5 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -\frac{1}{3}. \end{cases} \therefore$ 交

点坐标为 $(-1, -\frac{1}{3})$, 代入 $mx - y - 1 = 0$, 得 $m = -\frac{2}{3}$. 故选 ABD.

13. 相交 解析: 将圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y = 6$ 化为 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$, $\therefore$ 圆心 $C(1, -3)$, 半径 $r = 4$, $\therefore$ 圆心 $C(1, -3)$ 到直线 $3x - 4y + 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 \times 1 - 4 \times (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{16}{5} < 4$, $\therefore$ 直线 $3x - 4y + 1 = 0$ 和圆 C 的位置关系为相交.

14. $(x-2)^2 + y^2 = 1$ (答案不唯一, 只要圆心 C 在直线 $2x - y - 4 = 0$ 上, 半径为 1 即可) 解析: 由题可知, 圆 C 关于直线 $2x - y - 4 = 0$ 对称, 半径为 1, 则圆心 C 在直线 $2x - y - 4 = 0$ 上, 则当 $x = 2$ 时, $y = 0$, 所以当圆心 C 为 $(2, 0)$ 时, 圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

15. $2\sqrt{2}$ 解析: 点 $(0, 0)$ 到直线 $mx - y + 2n = 0$ 的距离为 $d = \frac{|m \cdot 0 - 0 + 2n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|2n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|2n|}{\sqrt{(1-n)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2-2n+n^2}{n^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\frac{1}{n} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{2}.$

16. $(\frac{1}{10}, 0)$ 解析: 设 $P(x, 0)$, 点 A 关于 x 轴对称的点为 A' , 则 $A'(-2, -3)$, 则 $k_{A'P} = \frac{0 - (-3)}{x - (-2)} = \frac{3}{x+2}, k_{A'B} = \frac{7 - (-3)}{5 - (-2)} = \frac{10}{7}$. 由题意可知 A', B, P 三点共线, $\therefore k_{A'P} = k_{A'B}$, 即 $\frac{3}{x+2} = \frac{10}{7}$, 解得 $x = \frac{1}{10}$, 故点 P 的坐标为 $(\frac{1}{10}, 0)$.

17. 解: (1) 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 则其圆心坐标为 $(1, 2)$.

(2) 由(1)知圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 而点 $(3, 1)$ 恰好在圆上,

又由点 A 与圆心的连线的斜率为 $\frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2}$,

所以所求切线的斜率 $k = 2$,

故切线的方程为 $y - 1 = 2(x - 3)$,

即 $2x - y - 5 = 0$.

18. 解: (1) $\because$ 点 $A(8, -6), B(2, 2)$,

$\therefore k_{AB} = \frac{-6-2}{8-2} = -\frac{4}{3}$,

∴ 直线 l 的方程为 $y+3=-\frac{4}{3}(x-2)$,

即 $4x+3y+1=0$.

(2) ∵ 点 $A(8, -6), B(2, 2)$,

∴ 线段 AB 的中点坐标为 $(5, -2)$.

∵ $k_{AB} = -\frac{4}{3}$,

∴ 线段 AB 的垂直平分线的斜率为 $\frac{3}{4}$,

∴ 线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y+2=\frac{3}{4}(x-5)$,

即 $3x-4y-23=0$.

19. 解: (1) 由 $\begin{cases} 2x+y-5=0, \\ x-2y=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

所以 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(2, 1)$,

① 当 l 的斜率不存在时, 直线 $l: x=2$,

此时点 $A(5, 0)$ 到直线 l 的距离为 3,

所以直线 $l: x=2$ 符合题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y-1=k(x-2)$,

整理可得 $kx-y-2k+1=0$,

所以点 $A(5, 0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|5k-2k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 3$,

解得 $k = \frac{4}{3}$.

此时直线 $l: 4x-3y-5=0$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $4x-3y-5=0$.

(2) 设直线 l 上任一点 $M(x, y)$,

M 关于直线 $l_2: x-2y=0$ 的对称点为 $M'(x_1, y_1)$,

则 $\begin{cases} \frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{1}{2} = -1, \\ \frac{x+x_1}{2} - 2 \times \frac{y+y_1}{2} = 0, \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} x_1 = \frac{4y+3x}{5}, \\ y_1 = \frac{4x-3y}{5}, \end{cases} (*)$

因为点 M' 在直线 $l_1: 2x+y-5=0$ 上,

所以将 $(*)$ 式代入得 $2 \times \frac{4y+3x}{5} + \frac{4x-3y}{5} - 5 = 0$,

化简得 $2x+y-5=0$,

即直线 l 与直线 l_1 重合.

所以直线 l 的方程为 $2x+y-5=0$.

20. (1) 证明: ∵ $A(1, 2), B(2, 1), C(5, 4), D(4, 5)$,

∴ $k_{AB} = \frac{2-1}{1-2} = -1, k_{BC} = \frac{4-1}{5-2} = 1$,

∴ $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$,

∴ $AB \perp BC$,

即平行四边形 $ABCD$ 为矩形.

(2) 解: ∵ 点 P 在矩形 $ABCD$ 的边界及内部运动,

∴ $\frac{y}{x}$ 的几何意义为直线 OP 的斜率.

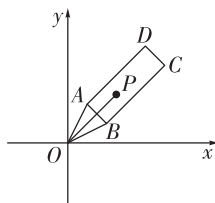
作出大致图象, 如图所示.

由图可知 $k_{OB} \leq k_{OP} \leq k_{OA}$,

∴ $k_{OB} = \frac{1}{2}, k_{OA} = 2$,

∴ $\frac{1}{2} \leq k_{OP} \leq 2$.

∴ $\frac{y}{x}$ 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, 2]$.



21. 解: (1) 设圆心 $C(a, 0) (a > -\frac{5}{2})$,

则 $\frac{|4a+10|}{5} = 2$,

解得 $a=0$ 或 $a=-5$ (舍去),

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2=4$.

(2) 当直线 $AB \perp x$ 轴时, 对 x 轴正半轴上任一点 N , x 轴平分 $\angle ANB$.

当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1), N(t, 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=k(x-1), \end{cases}$ 得 $(k^2+1)x^2-2k^2x+k^2-4=0$,

所以 $x_1+x_2 = \frac{2k^2}{k^2+1}, x_1x_2 = \frac{k^2-4}{k^2+1}$.

若 x 轴平分 $\angle ANB$,

则 $k_{AN} = -k_{BN}$,

即 $\frac{y_1}{x_1-t} + \frac{y_2}{x_2-t} = 0$,

即 $\frac{k(x_1-1)}{x_1-t} + \frac{k(x_2-1)}{x_2-t} = 0$,

整理, 得 $2x_1x_2 - (t+1)(x_1+x_2) + 2t = 0$,

所以 $\frac{2(k^2-4)}{k^2+1} - \frac{2k^2(t+1)}{k^2+1} + 2t = 0$,

解得 $t=4$.

综上所述, 存在点 $N(4, 0)$, 使得 x 轴恒平分 $\angle ANB$.

22. 解: (1) 设点 P 的坐标为 (x, y) , 点 A 的坐标为 (x_0, y_0) ,

由于点 B 的坐标为 $(6, 5)$, 且点 P 是线段 AB 的

中点,

$$\text{所以 } x = \frac{x_0 + 6}{2}, y = \frac{y_0 + 5}{2}.$$

于是有 $x_0 = 2x - 6, y_0 = 2y - 5$. ①

因为点 A 在圆 $C_1: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ 上运动,

所以点 A 的坐标满足方程 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$,

即 $(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 3)^2 = 4$. ②

把①代入②, 得 $(2x - 6 - 4)^2 + (2y - 5 - 3)^2 = 4$,

整理, 得 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$,

所以点 P 的轨迹 C_2 的方程为 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$.

(2) 圆 C_1 的圆心为 $(4, 3)$, 半径 $r_1 = 2$,

圆 C_2 的圆心为 $(5, 4)$, 半径 $r_2 = 1$,

所以 $|QA| + |QC| \geq |QC_1| - r_1 + |QC_2| - r_2 = |QC_1| + |QC_2| - 3$.

当且仅当 A 在线段 QC_1 上且 C 在线段 QC_2 上时, 取等号.

取 $C_1(4, 3)$ 关于 x 轴的对称点 $C_3(4, -3)$,

当点 Q 为直线 C_2C_3 与 x 轴的交点时, $|QC_1| + |QC_2|$ 取得最小值,

则 $(|QC_1| + |QC_2|)_{\min} = |C_2C_3| = 5\sqrt{2}$,

所以 $|QA| + |QC|$ 的最小值为 $5\sqrt{2} - 3$.

第二章 直线和圆的方程(B卷)

1. A 解析: $|AB| = \sqrt{a^2 + (-8)^2} = 10$, 解得 $a = \pm 6$. 故选 A.

2. B 解析: 由 $\begin{cases} 2x + 3y + 8 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \end{cases}$

$\therefore k_l = 2$. $\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = 2x$, 即 $2x - y = 0$. 故选 B.

3. D 解析: 因为点 $M(a, b)$ 在直线 $3x - 4y + c = 0$ 上, $(a - 2)^2 + (b - 1)^2$ 的最小值为 4, 所以点 $(2, 1)$ 到直线 $3x - 4y + c = 0$ 的距离 $d = \frac{|6 - 4 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$, 解得 $c = 8$ 或 $c = -12$. 故选 D.

4. B 解析: $\because$ 两圆的半径相等, $\therefore$ 两圆必是外切.

$\therefore \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2} = 2c$, 即 $(a-b)^2 = 2c^2$.

故选 B.

5. B 解析: 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ 可化为 $(x+1)^2 + y^2 = 5$, 所以当两条平行直线 l_1, l_2 和圆相离时, 有

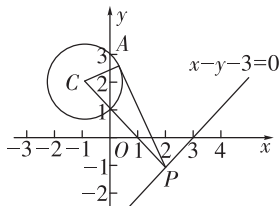
$$\begin{cases} \frac{|2 \times (-1) + a|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, \\ \frac{|2 \times (-1) + a^2 + 1|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, \end{cases} \text{解得 } a < -3 \text{ 或 } a > 7.$$

故选 B.

6. B 解析: 由题意知, 直线 $2ax + by + 6 = 0$ 过圆心 $C(-1, 2)$, 即 $-2a + 2b + 6 = 0$, 化简得 $a - b - 3 = 0$.

如图, 为使 $|PA|$ 最小, 只需圆心 $C(-1, 2)$ 与直线 $x - y - 3 = 0$ 上的点的距离最小, 所以 $|PA|$ 的最小

值为 $\sqrt{\left(\frac{|-1-2-3|}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2} = 4$, 故选 B.

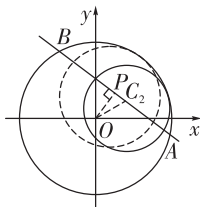


7. D 解析: 设 $A(x_0, x_0 + 2)$, 由题意, 知圆心 $M(2, 2)$, 半径 $r = \sqrt{10}$, 圆心 M 到直线 AC 的距离 $d = |AM| \sin 45^\circ \leq \sqrt{10}$, 即 $(x_0 - 2)^2 + x_0^2 \leq 20$, 解得 $x_0 \in [-2, 4]$, 故点 A 的横坐标的最大值为 4, 故选 D.

8. B 解析: 因为直线 l 与两坐标轴分别交于 $(0, \frac{5}{4}), (\frac{5}{3}, 0)$, 所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{4}} = 1$,

即 $3x + 4y - 5 = 0$. 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 9$ 的圆心为原点 $O(0, 0)$, 半径 $r_1 = 3$, 依题意, 圆 C_2 的圆心 C_2 在圆 C_1 内, 设半径为 r_2 , 如图, 连接 OC_2 . 因为圆 C_2 与圆 C_1 内切, 所以 $|OC_2| = r_1 - r_2$, 即 $r_2 = r_1 - |OC_2|$, 而点 C_2 在线段 AB 上, 过 O 作 $OP \perp AB$ 于点 P , 则 $|OP| = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$, 显然 $|OC_2| \geq |OP|$,

当且仅当点 C_2 与点 P 重合时取 “=”, 所以 $(r_2)_{\max} = r_1 - |OP| = 3 - 1 = 2$, 所以圆 C_2 半径的最大值是 2. 故选 B.



9. AC 解析: 设 $B(x, y)$, 根据题意可得 $\begin{cases} k_{AC} \cdot k_{BC} = -1, \\ |BC| = |AC|, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{3-4}{3-0} \cdot \frac{y-3}{x-3} = -1, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-3)^2}, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 6. \end{cases}$ 所以 $B(2, 0)$ 或 $B(4, 6)$. 故

选 AC.

10. BC 解析:由题意知,点 M 到直线的距离不大于 4,则该直线为“切割型直线”.对于 A,点 $M(5,0)$ 到直线 $y=x+1$ 的距离为 $d_1 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} > 4$,故 A 错误;对于 B,点 $M(5,0)$ 到直线 $y=2$ 的距离为 $d_2 = 2 < 4$,故 B 正确;对于 C,点 $M(5,0)$ 到直线 $y = \frac{4}{3}x$ 的距离为 $d_3 = \frac{\frac{4}{3} \times 5}{\sqrt{(-1)^2 + (\frac{4}{3})^2}} = 4$,故 C 正确;对于 D,点 $M(5,0)$ 到直线 $y=2x+1$ 的距离为 $d_4 = \frac{2 \times 5 + 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} > 4$,故 D 错误. 故选 BC.

11. AD 解析:直线 l_1, l_2 之间的距离为 $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$,设直线 m 与直线 l_1, l_2 分别相交于点 A, B ,则 $|AB| = 2\sqrt{2}$,过点 A 作 $AC \perp l_2$,垂足为 C ,则 $|AC| = \sqrt{2}$. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\sin \angle ABC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,所以 $\angle ABC = 30^\circ$. 又直线 l_2 的倾斜角为 45° ,所以直线 m 的倾斜角为 $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ 或 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. 故选 AD.

12. ABD 解析:因为圆心坐标为 (k, k) ,所以圆心 C 始终在直线 $y=x$ 上, A 正确;由 $(3-k)^2 + (0-k)^2 = 4$,化简得 $2k^2 - 6k + 5 = 0$,因为 $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$,所以 $2k^2 - 6k + 5 = 0$ 无实数根,所有圆 C_k 均不经过点 $(3, 0)$, B 正确;由 $(2-k)^2 + (2-k)^2 = 4$,化简得 $k^2 - 4k + 2 = 0$,因为 $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$,所以 $k^2 - 4k + 2 = 0$ 有两个不等实根,所以经过点 $(2, 2)$ 的圆 C_k 有两个, C 错误;由圆的半径为 2,得圆的面积为 4π , D 正确. 故选 ABD.

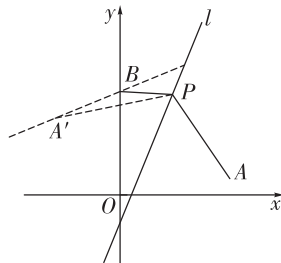
13. $\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一,符合 $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 即可) 解析:根据两点间的距离公式,得 $\sqrt{(\cos \alpha + \sqrt{3})^2 + \sin^2 \alpha} = 2$,即 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 3 + 2\sqrt{3} \cos \alpha = 4$,所以 $\cos \alpha = 0$,所以 α 可以为 $\frac{\pi}{2}$.

14. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 解析:直线的倾斜角为 45° 时,其斜率为 1;直线的倾斜角为 135° 时,其斜率为 -1. 因为 $k = \tan \alpha$ 在 $[0^\circ, 90^\circ)$ 上是增函数,在 $(90^\circ, 180^\circ)$ 上也是增函数,所以当 $45^\circ < \alpha < 135^\circ$ 时, k 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

15. 4 (答案不唯一) 解析:圆 C_1 的圆心 $C_1(0, a)$,半径 $r_1 = 3$,圆 C_2 的圆心 $C_2(a, 0)$,半径 $r_2 = 1$,因为两圆有四条公切线,所以两圆外离,又两圆的圆心

距 $d = \sqrt{2}|a|$,所以 $\sqrt{2}|a| > 3 + 1$,解得 $a < -2\sqrt{2}$ 或 $a > 2\sqrt{2}$,所以实数 a 的可能取值为 4.

16. (2, 5) 解析:设点 $A'(m, n)$ 是点 $A(4, 1)$ 关于直线 l 对称的对称点, 则 $\begin{cases} 3 \times \frac{m+4}{2} - \frac{n+1}{2} - 1 = 0, \\ \frac{n-1}{m-4} \times 3 = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = -2, \\ n = 3, \end{cases}$ 所以点 $A'(-2, 3)$, 根据题意,作图如图所示:



所以 $|PA| = |PA'|$, 由图可知, $|PA| - |PB| = |PA'| - |PB| \leq |A'B|$, 当 A', B, P 三点共线时, 差值最大, 且最大值为 $|A'B|$. 因为 $A'(-2, 3)$, $B(0, 4)$, 所以直线 $A'B$ 的方程为 $x - 2y + 8 = 0$, 联立 $\begin{cases} x - 2y + 8 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 5, \end{cases}$ 所以 $P(2, 5)$. 所以当 P 到 $A(4, 1)$ 和 $B(0, 4)$ 的距离之差最大时, 点 P 的坐标为 $(2, 5)$.

17. 解:由题意知直线 l 的斜率存在.

设直线 l 的斜率为 k , 点 A, B 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2 .

$\because$ 直线 l 过点 $P(2, -5)$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y + 5 = k(x - 2)$,

即 $kx - y - 2k - 5 = 0$.

点 A 到直线 l 的距离 $d_1 = \frac{|3k - (-2) - 2k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k - 3|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

点 B 到直线 l 的距离 $d_2 = \frac{|-k - 6 - 2k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|3k + 11|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

又 $d_1 : d_2 = 1 : 2$,

$\therefore \frac{|k - 3|}{|3k + 11|} = \frac{1}{2}$,

化简得 $k^2 + 18k + 17 = 0$,

解得 $k = -1$ 或 $k = -17$.

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $x + y + 3 = 0$ 或 $17x + y - 29 = 0$.

18. 解:(1) 根据题意知 $D^2 + E^2 - 4F = (2m)^2 + (-2)^2 - 4(m^2 + 5m) > 0$,

即 $4m^2 + 4 - 4m^2 - 20m > 0$,

解得 $m < \frac{1}{5}$,

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{5})$.

(2) 将方程 $x^2 + y^2 + 2mx - 2y + m^2 + 5m = 0$ 化为标准方程,

得 $(x+m)^2 + (y-1)^2 = 1-5m$,

故圆心坐标为 $(-m, 1)$, 半径为 $\sqrt{1-5m}$.

19. 解: (1) 设 l_2 的方程为 $x-y+m=0$,

因为 l_2 在 y 轴上的截距为 -1 ,

所以 $0 - (-1) + m = 0$,

解得 $m = -1$,

所以 $l_2: x - y - 1 = 0$.

由 $\begin{cases} x+y+2=0, \\ x-y-1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{3}{2}, \end{cases}$

所以直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

(2) ① 当 l_3 过原点时, l_3 的方程为 $y = 3x$.

② 当 l_3 不过原点时, 设 l_3 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{3a} = 1$,

又直线 l_3 经过 l_1 与 l_2 的交点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$,

所以 $\frac{-\frac{1}{2}}{a} + \frac{-\frac{3}{2}}{3a} = 1$,

解得 $a = -1$,

则 l_3 的方程为 $3x + y + 3 = 0$.

综上所述, l_3 的方程为 $y = 3x$ 或 $3x + y + 3 = 0$.

20. 解: (1) 设圆心 $E(0, b)$,

由题意可知 $B(6, 0), C(2\sqrt{6}, 6)$,

由 $|EB| = |EC|$,

得 $\sqrt{6^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (6-b)^2}$,

解得 $b = 2$,

所以半径 $r = |EB| = 2\sqrt{10}$,

所以圆 E 的方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 40$.

(2) 设 $P(x_0, y_0)$,

由于 P 是线段 MN 的中点, 由中点坐标公式,

得 $M(2x_0 - 10, 2y_0 - 4)$,

代入 $x^2 + (y-2)^2 = 40$,

化简得 $(x_0 - 5)^2 + (y_0 - 3)^2 = 10$,

即中点 P 的轨迹方程为 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

21. 解: (1) 因为点 M, N 在圆 C 上, 且关于直线 $x - y - 1 = 0$ 对称,

所以圆心 $C(-\frac{k}{2}, 1)$ 在直线 $x - y - 1 = 0$ 上.

则 $-\frac{k}{2} - 1 - 1 = 0$,

解得 $k = -4$,

则圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$,

即 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$,

所以圆 C 的圆心坐标为 $(2, 1)$, 半径为 $\sqrt{5}$.

(2) 由题意得直线 AB 的方程为 $x - y + 2 = 0$,

则圆心 C 到直线 AB 的距离为 $\frac{|2-1+2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} <$

$\sqrt{5}$,

故圆 C 上的点到直线 AB 的最大距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2} +$

$\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{2}$,

又 $|AB| = 2\sqrt{2}$,

所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times$

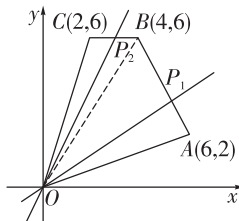
$\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{10}$.

22. 解: (1) 如图所示, 由题意得 $k_{OA} = \frac{1}{3}, k_{OB} = \frac{3}{2}$,

$k_{OC} = 3$,

$l_{OA}: x - 3y = 0$,

$l_{AB}: 2x + y = 14, l_{BC}: y = 6$.



① 当 $\frac{1}{3} < k < \frac{3}{2}$ 时, 直线 $y = kx$ 与线段 AB 相交,

设交点为 P_1 ,

由 $\begin{cases} y=kx, \\ 2x+y=14, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{14}{k+2}, \\ y=\frac{14k}{k+2}, \end{cases}$

故 $P_1(\frac{14}{k+2}, \frac{14k}{k+2})$,

所以点 P_1 到直线 OA 的距离 $d = \frac{14}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3k-1}{k+2}$,

$|OA| = 2\sqrt{10}$,

所以 $S = \frac{1}{2} |OA| \cdot d = \frac{14(3k-1)}{k+2}$.

② 当 $\frac{3}{2} \leq k < 3$ 时, 直线 $y = kx$ 与线段 BC 交于点

$P_2(\frac{6}{k}, 6)$,

$$\text{所以 } S_{\triangle OP_2C} = \frac{1}{2} |P_2C| \times 6 = \frac{6(3-k)}{k},$$

$$\text{又因为 } S_{\text{四边形OABC}} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OBC} = 14 + 6 = 20,$$

$$\text{所以 } S = S_{\text{四边形OABC}} - S_{\triangle OP_2C} = 26 - \frac{18}{k}.$$

$$\text{故 } S = f(k) = \begin{cases} \frac{14(3k-1)}{k+2}, & \frac{1}{3} < k < \frac{3}{2}, \\ 26 - \frac{18}{k}, & \frac{3}{2} \leq k < 3. \end{cases}$$

(2)若要直线 $y=kx$ ($\frac{1}{3} < k < 3$) 将四边形 OABC 分为面积相等的两部分,

$$\text{结合(1)知只需 } \frac{14(3k-1)}{k+2} = 10 \left(\frac{1}{3} < k < \frac{3}{2} \right),$$

$$\text{解得 } k = \frac{17}{16}.$$

第三章 圆锥曲线的方程(A卷)

1. A 解析:由题意可知在双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 中, $a =$

$$2, b = \sqrt{2}, \text{ 则其渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

故选 A.

2. D 解析:易知方程 $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 10$ 表示的是平面内到定点 $F_1(0, -2), F_2(0, 2)$ 的距离之和是常数 10 ($10 > 4$) 的点的轨迹, 该轨迹是以点 F_1, F_2 为焦点, 长轴长 $2a = 10$, 焦距 $2c = 4$ 的椭圆, $\therefore a = 5, c = 2$, 则 $b = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$, $\therefore$ 椭圆的方程是 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{21} = 1$, 故选 D.

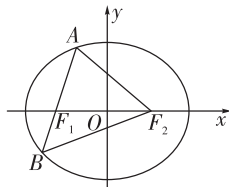
3. B 解析:设 $M(x, y)$, 则根据题意及抛物线的定义可得 $x = \frac{1}{5}(x+4)$, 解得 $x = 1$, 代入抛物线方程得 $y = \pm 4$. 又因为点 M 在第四象限, 所以 $y = -4$, 故 $M(1, -4)$. 故选 B.

4. A 解析:若曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 则 $a^2 = 1, b^2 = 3, c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 3 = 4$, 即 $c = 2$, 所以双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$, 所以“曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ”是“曲线 C 的离心率为 2”的充分条件. 若曲线 C 的离心率为 2, 则 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$, 所以 $b^2 = 3a^2$, 当 $a^2 = 2, b^2 = 6$ 时, 曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$, 所以“曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ”是“曲线 C 的离心率为 2”的不必要条件, 故选 A.

5. A 解析:设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由题意可得 $y_1 + y_2 = 2 \times 1 = 2$. 将点 A, B 的坐标代入抛物线方程中得 $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1, \\ y_2^2 = 4x_2, \end{cases}$ 所以 $y_1^2 - y_2^2 = 4(x_1 - x_2)$, 所以

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2} = \frac{4}{2} = 2, \text{ 所以直线 } l \text{ 的方程为 } y - 1 = 2(x - 2), \text{ 即 } 2x - y - 3 = 0. \text{ 故选 A.}$$

6. D 解析:因为焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的焦距为 8, 所以 $a^2 - 25 = 4^2$, 解得 $a = \sqrt{41}$. 如图, 根据椭圆的定义可得 $|AF_1| + |AF_2| = 2a, |BF_1| + |BF_2| = 2a$, 所以 $\triangle ABF_2$ 的周长 $C = |AB| + |AF_2| + |BF_2| = |AF_1| + |BF_1| + |AF_2| + |BF_2| = 4a = 4\sqrt{41}$, 故选 D.



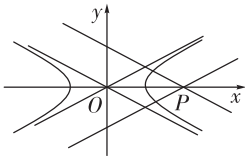
7. B 解析:因为双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线互相垂直, 所以 $a = b$, 又焦距为 $2\sqrt{6}$, 所以 $a^2 + b^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6$, 解得 $a = b = \sqrt{3}$, 所以 $y^2 = 2\sqrt{3}x$, 所以抛物线的准线方程为 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 B.

8. B 解析:易知原点 O 是线段 AB 的中点, 也是线段 F_1F_2 的中点, $\therefore$ 四边形 AF_1BF_2 为平行四边形, 又 $\because |AB| = |F_1F_2|$, $\therefore$ 四边形 AF_1BF_2 为矩形. 又 $\because$ 四边形 AF_1BF_2 的面积为 6, $\therefore |AF_1| \cdot |AF_2| = 6$, 又 $\because |AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 16, |AF_1| - |AF_2| = 2a, \therefore 4a^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| = 16 - 12 = 4$, 解得 $a^2 = 1, \therefore b^2 = c^2 - a^2 = 3$, 故双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 故选 B.

9. ACD 解析:由椭圆的焦点坐标可得 $c = 1$ 且焦点在 y 轴上, 则 $\begin{cases} m^2 - 1 - m = 1, \\ m > 0, \\ m^2 - 1 > 0, \end{cases}$ 解得 $m = 2$, 所以 $a = \sqrt{m^2 - 1} = \sqrt{3}, b = \sqrt{m} = \sqrt{2}$, 所以椭圆的长轴长为 $2\sqrt{3}$, 短轴长为 $2\sqrt{2}$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 ACD.

10. AC 解析:由题可知 $F(1, 0)$, 由抛物线的定义得 $|MF| = x_0 + 1 = 4$, 又 $y_0^2 = 4x_0$, 所以 $x_0 = 3, y_0 = \pm 2\sqrt{3}$. 所以 $|OM| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{9 + 12} = \sqrt{21}$. 故选 AC.

11. AB 解析: 如图所示, 易知点 P 位于双曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的内部.



由双曲线的几何性质可知, 当直线 l 与渐近线平行时, 直线 l 与双曲线 C 有唯一公共点, 易知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 故直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x-2)$ 或 $y = -\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x-2y-2=0$ 或 $x+2y-2=0$. 故选 AB.

12. BCD 解析: 因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2}$, 所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 故 A 错误; 易知 $c = \sqrt{5}$, 则 $a = 2$, $b^2 = 1$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 故 B 正确; 设 $P(x, y)$, 易知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, $y^2 = \frac{x^2}{4} - 1$, 所以 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = \frac{y^2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$, 故 C 正确; $k_1 + k_2 = \frac{y}{x+2} + \frac{y}{x-2} = \frac{2xy}{x^2-4} = \frac{2y^2}{x^2-4} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y}$, 因为点 P 在第一象限, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 所以 $0 < k_{OP} < \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{x}{y} > 2$, 所以 $k_1 + k_2 > 1$, 所以存在点 P , 使得 $k_1 + k_2 = 2$, 故 D 正确. 故选 BCD.

13. $(0, 1) \cup (1, 2)$ 解析: 由题易知, $\begin{cases} m > 0, \\ 2-m > 0, \\ m \neq 2-m, \end{cases}$ 解得 $0 < m < 2$ 且 $m \neq 1$.

14. 4 解析: 由抛物线 $x^2 = ay (a > 0)$ 可得准线方程为 $y = -\frac{a}{4}$. 因为点 $M(m, 1)$ 到其准线 l 的距离为 2, 所以 $1 + \frac{a}{4} = 2$, 解得 $a = 4$.

15. $\sqrt{3}$ 解析: 由题意可知, 动点 M 在以 $F(3, 0)$ 为圆心, 1 为半径的圆上运动, 且 PM 为圆的一条切线, 当 $|PF|$ 最小时, 切线长 $|PM|$ 取得最小值, 易知当 P 在右顶点时, $|PF|$ 取得最小值, 此时 $|PF| = 5 - 3 = 2$, 故 $|PM|_{\min} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

16. $y = \pm 2\sqrt{2}x$ 解析: 由对称性不妨设点 M 在第二象限, 延长 F_1N 交 MF_2 于点 P , $\because MN$ 是 $\angle F_1MF_2$ 的平分线, 且 $MN \perp F_1N$, $\therefore |MP| = |MF_1|$, $|NP| = |NF_1|$, 又 O 是 F_1F_2 的中点, $\therefore PF_2 \parallel ON$, 且 $|PF_2| = 2|ON| = 2 \times \frac{2c}{6} = \frac{2c}{3}$. 又 $|PF_2| = |MF_2| - |MP| = |MF_2| - |MF_1| = 2a$, $\therefore 2a = \frac{2c}{3}$, 即 $c = 3a$. 又 $\because c^2 - a^2 = b^2$, $\therefore b^2 = 8a^2$, $\therefore b = 2\sqrt{2}a$. $\therefore$ 双曲线 E 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2\sqrt{2}x$.

17. 解: (1) 由椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, 得双曲线 C 的焦点为 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,

即 $c = 2$,

由等轴双曲线的性质 $a = b$ 及 $c^2 = a^2 + b^2, c = 2$,

得 $a = \sqrt{2}$,

所以所求双曲线 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 2$.

(2) 当 AB 所在直线的斜率不存在时, 直线方程为 $x = 1$, 易知不满足题意;

当 AB 所在直线的斜率存在时,

设 AB 所在直线的方程为 $y = kx + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - y^2 = 2, \end{cases}$$

$$\text{得} (1 - k^2)x^2 - 2kmx - (m^2 + 2) = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{2km}{1 - k^2} = 2. \quad ①$$

点 $P(1, 2)$ 在 AB 所在的直线 $y = kx + m$ 上,

$$\text{即 } 2 = k + m. \quad ②$$

$$\text{联立} ①② \text{ 两式, 解得 } k = \frac{1}{2}, m = \frac{3}{2},$$

经检验, 直线方程 $x - 2y + 3 = 0$ 即为所求.

18. 解: (1) 由椭圆定义知 $|AF_2| + |AB| + |BF_2| = 8$.

$$\text{又 } |AF_2| + |BF_2| = 2|AB|,$$

$$\text{所以 } |AB| = \frac{8}{3}.$$

(2) 由题意, 得直线 l 的方程为 $y = x + c$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = x + c, \end{cases}$$

$$\text{消去 } y, \text{ 得 } (4 + b^2)x^2 + 8cx + 4c^2 - 4b^2 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8c}{4 + b^2}, x_1 x_2 = \frac{4c^2 - 4b^2}{4 + b^2},$$

因为直线 AB 的斜率为 1,

所以 $|AB| = \sqrt{2} |x_1 - x_2|$,

即 $\frac{8}{3} = \sqrt{2} |x_2 - x_1|$,

即 $\frac{32}{9} = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{64(4-b^2)}{(4+b^2)^2} -$

$$\frac{4[4(4-b^2)-4b^2]}{4+b^2} = \frac{32b^4}{(4+b^2)^2},$$

解得 $b^2 = 2$,

故椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

19. 解: (1) 选①, 由抛物线的定义可得 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$,

又因为 $|PF| = x_0 + 2$,

所以 $x_0 + \frac{p}{2} = x_0 + 2$,

解得 $p = 4$.

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

选②, 因为 $y_0 = 2x_0 = 4$,

所以 $x_0 = 2, y_0 = 4$,

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 C 上,

所以 $y_0^2 = 2px_0$, 即 $16 = 4p$,

解得 $p = 4$,

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

选③, $PF \perp x$ 轴时, 由抛物线的定义及 $|PF| = 4$

可得 $|PF| = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 4$,

所以 $p = 4$.

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由(1)可知 $F(2, 0)$.

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$$

消去 y 得 $x^2 - 10x + 1 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = 10, x_1x_2 = 1$,

所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$,

因为 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1$,

所以 $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$,

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \\ &= \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

点 $F(2, 0)$ 到直线 $l: x - y - 1 = 0$ 的距离 $d =$

$$\frac{|2 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\triangle ABF$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

20. 解: (1) 依题意可知抛物线的焦点坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$,

故直线 AB 的方程为 $y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}p$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}p, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

得 $4x^2 - 5px + p^2 = 0$.

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{5p}{4}, x_1x_2 = \frac{p^2}{4},$$

又 $\because x_1 < x_2, p > 0$,

$$\therefore x_1 = \frac{p}{4}, x_2 = p.$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{9}{4}p = 9,$$

解得 $p = 4$.

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2 = 8x$.

(2) 由(1)知, $x_1 = 1, x_2 = 4$,

分别将 x_1, x_2 代入直线 $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$,

得 $y_1 = -2\sqrt{2}, y_2 = 4\sqrt{2}$,

即 $A(1, -2\sqrt{2}), B(4, 4\sqrt{2})$,

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB} = (1, -2\sqrt{2}) + \lambda(4, 4\sqrt{2}) =$$

$$(4\lambda + 1, 4\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2}),$$

$$\therefore C(4\lambda + 1, 4\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2}),$$

$\because C$ 点在抛物线上,

$$\therefore (4\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2})^2 = 8(4\lambda + 1),$$

$$\text{即 } \lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 2$.

21. 解: (1) 连接 PF_1, PF_2, OP ,

由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形可知, $|OP| = |OF_2| = |OF_1|$,

则在 $\triangle F_1PF_2$ 中, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$,

$$|PF_2| = c, |PF_1| = \sqrt{3}c,$$

$$\text{所以 } 2a = |PF_1| + |PF_2| = c + \sqrt{3}c,$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

(2) 设 $P(x, y)$,

$$\text{则 } \frac{1}{2} |y| \cdot 2c = 16,$$

$$\frac{y}{x+c} \cdot \frac{y}{x-c} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{即 } c|y| = 16, \quad \text{①}$$

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad \text{②}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{③}$$

$$\text{由 ②③ 以及 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 得 } y^2 = \frac{b^4}{c^2}, \quad \text{④}$$

$$\text{又由 ① 知 } y^2 = \frac{16^2}{c^2}, \text{ 所以 } b = 4.$$

$$\text{由 ③④, 得 } x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - b^2),$$

所以 $c^2 \geq b^2$,

所以 $a^2 = b^2 + c^2 \geq 2b^2 = 32$,

故 $a \geq 4\sqrt{2}$.

所以 $b=4$, a 的取值范围为 $[4\sqrt{2}, +\infty)$.

22. 解: (1) 依题意, $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$,

结合题意得 $\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{1+a} \times \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{1-a} = -\frac{1}{3}$,

解得 $a^2 = 3$,

由点 E 在椭圆上可得 $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{3b^2} = 1$,

解得 $b^2 = 1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 由(1)知, A 点坐标为 $(0, -1)$,

设 $P(x_P, y_P)$, $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$, P 为弦 MN 的中点,

因为 $|AM| = |AN|$,

所以 $AP \perp MN$.

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases}$

得 $(3k^2 + 1)x^2 + 6mkx + 3(m^2 - 1) = 0$.

因为直线与椭圆相交,

所以 $\Delta = (6mk)^2 - 4(3k^2 + 1) \cdot 3(m^2 - 1) > 0$,

即 $m^2 < 3k^2 + 1$. ①

故 $x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{3mk}{3k^2 + 1}$,

$y_P = kx_P + m = \frac{m}{3k^2 + 1}$,

所以 $k_{AP} = \frac{y_P + 1}{x_P} = -\frac{m + 3k^2 + 1}{3mk}$,

则 $-\frac{m + 3k^2 + 1}{3mk} = -\frac{1}{k}$,

即 $2m = 3k^2 + 1$. ②

把②代入①得 $m^2 < 2m$,

解得 $0 < m < 2$,

由②得 $k^2 = \frac{2m-1}{3} > 0$,

解得 $m > \frac{1}{2}$,

综上所述, m 的取值范围是 $\frac{1}{2} < m < 2$.

第三章 圆锥曲线的方程(B卷)

1. D 解析: 抛物线 $x^2 = -2y$ 是顶点在原点, 开口向下的抛物线, 则 $2p=2$, 即 $p=1$, $\therefore$ 准线方程为 $y =$

$\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$, 故选 D.

2. C 解析: 在椭圆 $\frac{x^2}{m^2+1} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 中, $a =$

$\sqrt{m^2+1}$, $b = m$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, 因为椭圆

$\frac{x^2}{m^2+1} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的上顶点为 A , 焦点为 F_1 ,

F_2 , 所以 $|AF_1| = |AF_2| = a$, 又因为 $\angle F_1AF_2 =$

$\frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle F_1AF_2$ 为等边三角形. 所以 $|AF_1| =$

$|F_1F_2|$, 即 $\sqrt{m^2+1} = a = 2c = 2$, 因此 $m = \sqrt{3}$. 故选 C.

3. A 解析: 因为双曲线的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{m} = 1 (m \neq$

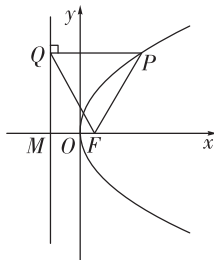
$0)$, 所以 $a^2 = 1$, $b^2 = -m$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 1 - m$,

因为该双曲线的一个焦点为 $F(3, 0)$, 所以 $c = 3$. 所以

$3^2 = 1 - m$, 解得 $m = -8$, 所以 $b^2 = 8$, 所以渐近

线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2\sqrt{2}x$. 故选 A.

4. D 解析: 设准线与 x 轴交于点 M , 如图所示, 由抛物线的定义可得 $|PF| = |PQ|$, 又 $\angle FPQ = 60^\circ$, 所以 $\triangle FPQ$ 为等边三角形, 则 $\angle PQF = 60^\circ$, 则 $\angle MQF = 30^\circ$, 易知 $|MF| = 2$, 所以 $|QF| = 4$, 则 $|PF| = |QF| = 4$. 故选 D.



5. B 解析: 由 $mx^2 + ny = 0 (mn \neq 0, m \neq n)$, 得 $x^2 =$

$-\frac{n}{m}y$, 表示抛物线, 方程 $mx^2 + ny^2 = 1 (mn \neq 0, m \neq$

$n)$ 表示椭圆或双曲线. 当 m 和 n 同号时, 抛物线开

口向下, 方程 $mx^2 + ny^2 = 1 (mn \neq 0, m \neq n)$ 表示椭圆,

无符合条件的选项. 当 m 和 n 异号时, 抛物线开

口向上, 方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示双曲线. 故选 B.

6. C 解析: 如图, 设 A, B 在准线 l 上的射影分别为 M, N , 准线 l 与 x 轴交于 H , 则 $|HF| = p$. 由于点 F 是 AC 的中点, 且 $|AF| = 4$, 所以由抛物线的定义及中位线定理, 可得 $|AM| = |AF| = 2|HF| = 2p = 4$,

所以 $p = 2$. 设 $|BF| = |BN| = m$, 则 $\frac{|BN|}{|HF|} = \frac{|BC|}{|CF|}$,

即 $\frac{m}{2} = \frac{4-m}{4}$, 解得 $m = \frac{4}{3}$. 所以 $|AB| = |AF| +$

$|BF| = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$, 即 AB 的长为 $\frac{16}{3}$. 故选 C.

即 $a^2 + a - 2 = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = -2$ (舍去). 故实数 $a = 1$.

14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 解析: $\because e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$,

则 $b^2 = \frac{3}{4}a^2$, 将点 $P(1, \frac{3}{2})$ 的坐标代入椭圆 C 的

方程, 得 $\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}a^2} = 1$, 解得 $a^2 = 4$, 则 $b^2 = 3$, 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

15. 2 或 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ 解析: 双曲线的渐近线方程为 $y =$

$\sqrt{3}x$ 和 $y = -\sqrt{3}x$, 设直线 AB 的方程为 $y = kx - 2k (k > 0, k \neq \sqrt{3})$, 不妨设直线 AB 与渐近线 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ 的交点分别为 A, B , 由

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x, \\ y = kx - 2k \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} y = -\sqrt{3}x, \\ y = kx - 2k \end{cases} \text{ 分别解得 } y_A =$$

$$\frac{2\sqrt{3}k}{k - \sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}k}{k + \sqrt{3}}. \text{ 因为 } \triangle OAB \text{ 的面积为 } 16\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times 2 |y_A - y_B| = 16\sqrt{3}, \text{ 即 } |y_A - y_B| =$$

$$\left| \frac{4\sqrt{3}k^2}{k^2 - 3} \right| = 16\sqrt{3}, \text{ 解得 } k = 2 \text{ 或 } k = \frac{2\sqrt{15}}{5}. \text{ 故答案}$$

$$\text{为 } 2 \text{ 或 } \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

16. $\frac{3}{16}$ 或 0 解析: 由题可知, 直线 AB 与直线 $y = x + m$ 垂直, 所以可设直线 $AB: y = -x + t$, 线段 AB

$$\text{的中点 } P(x_0, y_0), \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = -x + t, \end{cases} \text{ 整理得}$$

$$7x^2 - 6tx + 3t^2 - 12 = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{则有 } x_1 + x_2 = \frac{6t}{7}, \text{ 所以 } x_0 = \frac{3t}{7}, y_0 = -x_0 + t =$$

$$\frac{4t}{7}, \text{ 得 } P\left(\frac{3t}{7}, \frac{4t}{7}\right), \text{ 又点 } P \text{ 在抛物线 } y^2 = x \text{ 上, 所以}$$

$$\left(\frac{4t}{7}\right)^2 = \frac{3t}{7}, \text{ 解得 } t = 0 \text{ 或 } t = \frac{21}{16}, \text{ 所以}$$

$$P\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right) \text{ 或 } P(0, 0), \text{ 因为点 } P \text{ 在直线 } y = x + m$$

$$\text{上, 所以可得 } m = \frac{3}{16} \text{ 或 } m = 0. \text{ 故答案为 } \frac{3}{16} \text{ 或 } 0.$$

17. 解: (1) 由题可知, 椭圆的长轴端点坐标分别为 $(5, 0), (-5, 0)$,

$$\text{焦点坐标分别为 } (3, 0), (-3, 0),$$

$$\text{设所求双曲线方程为 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0),$$

$$\text{则 } a = 3, c = 5,$$

$$\text{所以 } b^2 = c^2 - a^2 = 16,$$

$$\text{所以所求双曲线方程为 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$(2) \text{ 由抛物线定义知 } |AF| = 2 + \frac{p}{2} = 4,$$

$$\text{所以 } p = 4,$$

$$\text{所以抛物线的方程为 } y^2 = 8x.$$

18. 解: (1) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$,

$$\text{所以 } c = 1,$$

$$\text{因为椭圆的离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{即 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } a = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 3 - 1 = 2,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$(2) \text{ 当过抛物线焦点的直线斜率不存在时,}$$

$$|MN| = 4, \text{ 显然不符合题意, 舍去.}$$

$$\text{故可设过抛物线焦点的直线方程为 } y = k(x - 1),$$

$$\text{显然 } k \neq 0,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x - 1), \end{cases}$$

$$\text{整理得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2},$$

$$\text{根据焦点弦公式可得 } |MN| = x_1 + x_2 + p =$$

$$\frac{2k^2 + 4}{k^2} + 2 = 8,$$

$$\text{解得 } k^2 = 1, k = \pm 1,$$

$$\text{所以直线方程为 } y = x - 1 \text{ 或 } y = -x + 1.$$

19. 解: (1) $\because$ 双曲线 C 的焦点在坐标轴上, 其渐近线

$$\text{方程为 } y = \pm \sqrt{2}x,$$

$$\text{设双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = \lambda (\lambda \neq 0),$$

$$\text{由双曲线过点 } P\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right),$$

$$\text{可得 } \lambda = 1,$$

$$\therefore \text{ 所求双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$(2) \text{ 假设存在被点 } B \text{ 平分的弦 } MN, \text{ 该弦所在直线 } l \text{ 的斜率为 } k,$$

$$\text{则 } B(1, 1) \text{ 是弦 } MN \text{ 的中点,}$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2.$$

$$\therefore M, N \text{ 均在双曲线上,}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \begin{cases} 2x_1^2 - y_1^2 = 2, \\ 2x_2^2 - y_2^2 = 2, \end{cases} \\ \therefore & 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0, \\ \therefore & 4(x_1 - x_2) = 2(y_1 - y_2), \\ \therefore & k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2, \\ \therefore & \text{直线 } l \text{ 的方程为 } y - 1 = 2(x - 1), \\ \text{即 } & 2x - y - 1 = 0, \\ \text{联立 } & \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ 2x - y - 1 = 0, \end{cases} \\ \text{整理得 } & 2x^2 - 4x + 3 = 0, \\ \therefore \Delta & = 16 - 4 \times 3 \times 2 = -8 < 0, \\ \therefore & \text{直线 } l \text{ 与双曲线无交点,} \\ \therefore & \text{不存在被点 } B \text{ 平分的弦.} \end{aligned}$$

20. 解: (1) 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,

当直线 l 的斜率是 $\frac{1}{2}$ 时, 直线 l 的方程为 $x = 2y - 4$.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 2py, \\ x = 2y - 4, \end{cases} \text{ 得 } 2y^2 - (8 + p)y + 8 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 y_2 = 4, \text{ ①} \\ y_1 + y_2 = \frac{8 + p}{2}, \text{ ②} \end{cases}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}, A(-4, 0),$$

$$\therefore y_2 = 4y_1, \text{ ③}$$

由 ①②③ 及 $p > 0$,

得 $y_1 = 1, y_2 = 4, p = 2$,

$\therefore$ 抛物线 G 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 易知直线 l 的斜率一定存在且不为 0,

设 $l: y = k(x + 4)$, 线段 BC 的中点坐标为 (x_0, y_0) ,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = k(x + 4), \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4kx - 16k = 0, \text{ ④}$$

$$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2k,$$

$$y_0 = k(x_0 + 4) = 2k^2 + 4k.$$

$$\therefore \text{线段 } BC \text{ 的中垂线方程为 } y - 2k^2 - 4k = -\frac{1}{k}(x - 2k).$$

$$\therefore \text{线段 } BC \text{ 的中垂线在 } y \text{ 轴上的截距 } b = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k + 1)^2,$$

对于 ④, 由 $\Delta = 16k^2 + 64k > 0$,

解得 $k > 0$ 或 $k < -4$.

$$\therefore b \in (2, +\infty).$$

21. (1) 解: 由已知可得 $e = \frac{c}{a} = 2$,

$$\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 4,$$

解得 $b^2 = 3a^2$. ①

$\therefore$ 点 $P(2, 3)$ 在 E 上,

$$\therefore \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \text{ ②}$$

由 ①② 可得 $a^2 = 1, b^2 = 3$.

$\therefore$ 双曲线 E 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 由题易知 $Q(-1, 0)$,

当直线 l 的斜率为 0 时, A, B 中有一点与 Q 重合, 不符合题意.

故直线 l 的斜率不为 0,

设 $l: x = ty + 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = ty + 2, \\ 3x^2 - y^2 = 3, \end{cases}$$

$$\text{得 } (3t^2 - 1)y^2 + 12ty + 9 = 0,$$

$$\text{易知 } \begin{cases} \Delta = 36t^2 + 36 > 0, \\ 3t^2 - 1 \neq 0, \end{cases}$$

$$\therefore t^2 \neq \frac{1}{3}, y_1 + y_2 = \frac{-12t}{3t^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3t^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} &= (x_1 + 1, y_1) \cdot (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + 1) \cdot \\ & (x_2 + 1) + y_1 y_2 = (ty_1 + 3)(ty_2 + 3) + y_1 y_2 = (t^2 + \\ & 1) y_1 y_2 + 3t(y_1 + y_2) + 9 = \frac{9(t^2 + 1)}{3t^2 - 1} + \end{aligned}$$

$$\frac{3t \cdot (-12t)}{3t^2 - 1} + 9 = 0,$$

$$\therefore QA \perp QB,$$

则 $\triangle QAB$ 是直角三角形, AB 是斜边,

又点 M 是斜边 AB 的中点,

$$\therefore |MQ| = \frac{1}{2} |AB|,$$

$$\text{即 } |AB| = 2|MQ|.$$

22. (1) 解: 设椭圆的半焦距为 c ,

$$\text{由题意可得 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } b = \frac{1}{2}a,$$

由短轴长为 2, 可得 $b = 1$,

所以 $a = 2$,

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 证明: 由题意, 可得 $A(-2, 0), B(2, 0), D(0, -1)$,

设 $P(s, t)$, 则 $s^2 + 4t^2 = 4$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{s+2}(x+2), \\ y = \frac{1}{2}x-1, \end{cases}$$

$$\text{可得 } x_M = \frac{4t+2s+4}{s+2-2t} = \frac{2(s+2+2t)}{s+2-2t},$$

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{t}{s-2}(x-2), \\ y = -\frac{1}{2}x-1, \end{cases}$$

$$\text{可得 } x_N = \frac{4+4t-2s}{s-2+2t} = \frac{2(2-s+2t)}{s-2+2t},$$

$$\text{所以 } x_M - x_N = \frac{2(s+2+2t)}{s+2-2t} - \frac{2(2-s+2t)}{s-2+2t} = \frac{2(s+2+2t)(s-2+2t) - 2(s+2-2t)(2-s+2t)}{(s+2-2t)(s-2+2t)}.$$

上式分子为 $2(s+2+2t)(s-2+2t) - 2(s+2-2t)(2-s+2t) = 2(s^2 + 4st + 4t^2 - 4 + s^2 + 4t^2 - 4st - 4) = 2(2s^2 + 8t^2 - 8) = 2 \times (8 - 8) = 0$, 所以 M, N 的横坐标相等, 故直线 MN 与 x 轴垂直.

专题一 空间向量与立体几何

1. D 解析: $\because \mathbf{a} = (0, 2, 1), \mathbf{b} = (0, -1, 1), \therefore \mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, 1, 2), |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5}, \therefore$ 与向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 方向相反的单位向量 $\mathbf{e}$ 的坐标是 $-\frac{1}{\sqrt{5}} \times (0, 1, 2) = (0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$, 故选 D.

2. C 解析: 因为 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(1, 1, 0), B(0, 1, 2), C(2, 1, 1)$, 所以 BC 的中点坐标为 $(1, 1, \frac{3}{2})$, 所以 BC 边上中线的长度为 $\sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (\frac{3}{2}-0)^2} = \frac{3}{2}$, 故选 C.

3. D 解析: 由题意知, 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 点 $A(2, 1, 3)$ 关于平面 xOz 的对称点为 $B(2, -1, 3)$, 所以 $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 3), \overrightarrow{OB} = (2, -1, 3)$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times 3 = 12$, 故选 D.

4. D 解析: 因为 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 即 $1 \times 3 + 5 \times 1 - 2z = 0$, 所以 $z = 4$. 因为 $BP \perp$ 平面 ABC , 所以 $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{AB}$, 且 $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{BC}$, 所以 $1 \times (x-1) + 5y + (-2) \times (-3) = 0$, 且 $3(x-1) + y + 4 \times (-3) = 0$, 解得 $x = \frac{40}{7}, y = -\frac{15}{7}$, 所以 $\overrightarrow{BP} = (\frac{33}{7}, -\frac{15}{7}, -3)$. 故选 D.

5. C 解析: 设 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角为 θ , $\because \mathbf{m} = (1, 0, -1), \mathbf{n} = (0, -1, 1), \therefore \cos \theta = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$. $\because 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \therefore \theta = 120^\circ, \therefore$ 二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小可能为 60° 或 120° . 故选 C.

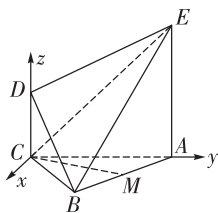
6. B 解析: 因为 $\mathbf{a} = (1, 2, 2), \mathbf{b} = (-2, 1, 1)$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = 2$, 所以向量 $\mathbf{b}$ 在向量

量 $\mathbf{a}$ 上的投影向量的模为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} =$

$\frac{2}{3}$. 设向量 $\mathbf{b}$ 在向量 $\mathbf{a}$ 上的投影向量为 $\mathbf{m}$, 则 $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{a}$ ($\lambda > 0$) 且 $|\mathbf{m}| = \frac{2}{3}$, 所以 $\mathbf{m} = (\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$, 且 $\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 = (\frac{2}{3})^2$, 解得 $\lambda = \frac{2}{9}$, 所以 $\mathbf{m} = (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$, 故选 B.

7. C 解析: 对于 A, 由线面垂直的性质可知, 只要 $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 都有 $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{n}_2$, 并不能说明 $\alpha \parallel \beta$, 故 A 错误; 对于 B, $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 且 $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 B 错误; 对于 C, $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{n}_2$, 且 $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$, 则 $\alpha \parallel \beta$, 故 C 正确; 对于 D, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{n}_2$, 且 $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 D 错误. 故选 C.

8. C 解析: 如图, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$, 则 $C(0, 0, 0), E(0, 1, k), B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 则 $\overrightarrow{CE} = (0, 1, k)$, 取 AB 的中点 M , 连接 CM , 则 $M(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 0)$, 则 $CM \perp AB$. 又 $AE \perp$ 平面 ABC , 所以 $CM \perp AE$, 所以 $CM \perp$ 平面 ABE , 则平面 ABE 的一个法向量为 $\overrightarrow{CM} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 0)$. 由题意知 $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\overrightarrow{CM}|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+k^2}}$, 又由 $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, 得 $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+k^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq k \leq \sqrt{2}$, 所以 k 的最大值为 $\sqrt{2}$, 故选 C.



9. BC 解析: 平面 α 过点 $A(1, -1, 2)$, 其法向量 $\mathbf{n} = (2, -1, 2)$. 对于 A, $(2, 3, 3) - (1, -1, 2) = (1, 4, 1)$, $\because (2, -1, 2) \cdot (1, 4, 1) = 2 - 4 + 2 = 0, \therefore$ 点 $(2, 3, 3)$ 在平面 α 内; 对于 B, $(3, -3, 4) - (1, -1, 2) = (2, -2, 2)$, $\because (2, -1, 2) \cdot (2, -2, 2) = 4 + 2 + 4 = 10 \neq 0, \therefore$ 点 $(3, -3, 4)$ 不在平面 α 内; 对于 C, $(-1, 2, 0) - (1, -1, 2) = (-2, 3, -2)$, $\because (2, -1, 2) \cdot (-2, 3, -2) = -11 \neq 0, \therefore$ 点 $(-1, 2, 0)$ 不在平面 α 内; 对于 D, $(2, -1, 1) - (1, -1, 2) = (1, 0, -1)$, $\because (2, -1, 2) \cdot (1, 0, -1) = 0, \therefore$ 点 $(2, -1, 1)$ 在平面 α 内. 故选 BC.

10. BC 解析: 因为 $A(1,0,0), B(1,2,0), C(0,0,1), D(1,0,1), E(5,6,-4)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (0,2,0), \overrightarrow{AC} = (-1,0,1), \overrightarrow{AE} = (4,6,-4)$, 所以 $4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 4(0,2,0) - 3(-1,0,1) = (3,8,-3) \neq \overrightarrow{AE}$, 故 A

错误; 设 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 即 $\begin{cases} 4 = -y, \\ 6 = 2x, \\ -4 = y, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} y = -4, \\ x = 3, \end{cases}$ 即 $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, 即

$(-1,0,1) = \lambda(0,2,0)$, 即 $\begin{cases} -1 = \lambda \times 0, \\ 0 = 2\lambda, \\ 1 = \lambda \times 0, \end{cases}$ 显然无解,

即 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线, 所以 A, B, C, E 四点共面, 故 B 正确; 因为 $\overrightarrow{OD} = (1,0,1)$, 所以 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$, 所以 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}$, 所以向量 $\overrightarrow{OD}$ 是平面 ABC 的一个法向量, 故 C

正确; 设平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 所以

$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2y_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 4x_1 + 6y_1 - 4z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 1$,

则 $z_1 = 1, y_1 = 0$, 所以 $\mathbf{n} = (1,0,1)$, 设 OE 与平面

ABE 所成角为 θ , $\overrightarrow{OE} = (5,6,-4)$, 所以 $\sin \theta =$

$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OE}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{OE}|} = \frac{|5 \times 1 + 0 \times 6 + 1 \times (-4)|}{\sqrt{2} \times \sqrt{5^2 + 6^2 + (-4)^2}} =$

$\frac{\sqrt{154}}{154}$, 即 OE 与平面 ABE 所成角的正弦值为

$\frac{\sqrt{154}}{154}$, 故 D 错误. 故选 BC.

11. BC 解析: 因为 $\overrightarrow{A_1E} = 2\overrightarrow{ED_1}, \overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$, 所以

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A_1F} - \overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{5}\overrightarrow{A_1C} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{A_1A} +$

$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{2}{5}\overrightarrow{A_1A} + \frac{2}{5}\overrightarrow{A_1B_1} -$

$\frac{4}{15}\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1} +$

$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1B_1}$, 其中 $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1}$ 是空间的一个

基底, 因为 $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EB}$, 所以 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 共线, 所以

E, F, B 三点共线, A 正确; A_1 显然在平面 $ABCD$ (即平面 BCD) 外, 因此 A_1, B, C, D 四点不共面, B

错误; $0^\circ < \angle FA_1E < 180^\circ$, 因此 A_1, E, F 三点不可能共线, C 错误; 因为 $A_1D_1 \parallel BC$, 所以 A_1D_1, BC

共面, 而 A_1, E, F, B 四点都在这个平面内, 所以 A_1, E, F, B 四点共面, D 正确. 故选 BC.

12. ABC 解析: 分别以 $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1A}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A_1 - xyz$ (图略), 则由已知得 $A_1(0,0,0), B_1(1,0,$

$0), B(1,0,1), D(0,1,\frac{1}{2}), P(0,2,0)$, 则 $\overrightarrow{A_1B} =$

$(1,0,1), \overrightarrow{A_1D} = (0,1,\frac{1}{2}), \overrightarrow{B_1P} = (-1,2,0),$

$\overrightarrow{DB_1} = (1,-1,-\frac{1}{2})$. 设平面 A_1BD 的一个法向

量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = y + \frac{1}{2}z = 0, \end{cases}$ 取

$z = -2$, 则 $x = 2, y = 1$, 所以平面 A_1BD 的一个法

向量为 $\mathbf{n} = (2,1,-2)$. 假设 $DQ \perp$ 平面 A_1BD , 且

$\overrightarrow{B_1Q} = \lambda \overrightarrow{B_1P} = \lambda(-1,2,0) = (-\lambda, 2\lambda, 0)$, 则 $\overrightarrow{DQ} =$

$\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{B_1Q} = (1-\lambda, -1+2\lambda, -\frac{1}{2})$, 因为 $\overrightarrow{DQ}$ 也

是平面 A_1BD 的法向量, 所以 $\mathbf{n}$ 与 $\overrightarrow{DQ}$ 共线, 于是

有 $\frac{1-\lambda}{2} = \frac{-1+2\lambda}{1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$ 成立, 此时 λ 无解,

故在直线 B_1P 上不存在点 Q , 使得 $DQ \perp$ 平面 A_1BD , 则 A, B, C 不正确; D 正确. 故选 ABC.

13. 2 $\frac{\pi}{6}$ 解析: $\because \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + n = 3, \therefore n = 2$, 又 $|\mathbf{a}| =$

$\sqrt{2}, \mathbf{b} = (1,1,2), \therefore \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{6}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi], \therefore$ 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

14. $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ 解析: 设 $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$, 因为 $\overrightarrow{OP} = (1,$

$1,2)$, 所以 $\overrightarrow{OQ} = (t, t, 2t)$, 所以点 Q 的坐标为 $(t, t,$

$2t)$. 又 $\overrightarrow{QA} = (1-t, 2-t, 3-2t), \overrightarrow{QB} = (2-t, 1-t,$

$2-2t)$, 所以 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 2(1-t)(2-t) + (3-$

$2t) \cdot (2-2t) = 6t^2 - 16t + 10$, 所以当 $t = \frac{4}{3}$ 时,

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 取得最小值, 此时点 Q 的坐标为 $(\frac{4}{3},$

$\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

15. 7 解析: 因为四棱锥 $P - ABCD$ 的各棱长均为

13, 所以四棱锥 $P - ABCD$ 是正四棱锥, 易证

$PA \perp BD, \angle PAB = 60^\circ, \angle ABD = 45^\circ$. 又 M, N 分

别是 PA, BD 上的点, 且 $PM : MA = BN : ND =$

$5 : 8$, 所以 $MA = 8, BN = 5\sqrt{2}$. 又 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} +$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, 所以 $|\overrightarrow{MN}|^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BN}|^2 +$

$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} = 8^2 +$

$13^2 + (5\sqrt{2})^2 + 2 \times 8 \times 13 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times 8 \times$

$5\sqrt{2} \times 0 + 2 \times 13 \times 5\sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 49$, 所以

$MN = |\overrightarrow{MN}| = 7$.

16. $(1, 2 - \sqrt{3}, 0)$ $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ 解析: 设 $AE = \lambda (0 \leq \lambda \leq 2)$, 平面 D_1EC 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$.

由题可知 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 1), C(0, 2, 0), E(1, \lambda, 0)$, 则 $\overrightarrow{D_1C} = (0, 2, -1), \overrightarrow{CE} = (1, \lambda - 2, 0)$. 易知平面 ECD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. $\therefore \mathbf{m} = (x, y, z)$ 为平面 D_1EC 的法向量,

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{D_1C} = 2y - z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = x + (\lambda - 2)y = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = 1, \text{ 则 } \mathbf{m} =$$

$(2 - \lambda, 1, 2)$, 又二面角 $D_1 - EC - D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$,

$$\therefore \cos \frac{\pi}{4} = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{(2 - \lambda)^2 + 1 + 4}},$$

解得 $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ 或 $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ (舍去), $\therefore E(1, 2 - \sqrt{3}, 0), \mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, 2)$, 又 $\overrightarrow{AE} = (0, 2 - \sqrt{3}, 0)$, $\therefore d =$

$$\frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|2 - \sqrt{3}|}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

17. 解: (1) 依题意, AB, AD, AA_1 两两互相垂直,

以 A 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), A_1(0, 0, 1), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), B_1(1, 0, 1)$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0), \overrightarrow{B_1D} = (-1, 1, -1).$$

设直线 BC 与直线 B_1D 所成的角为 α ,

$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{B_1D}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{B_1D}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即直线 BC 与直线 B_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 由 (1) 知, $\overrightarrow{B_1C} = (0, 1, -1), \overrightarrow{B_1D} = (-1, 1, -1), \overrightarrow{AB_1} = (1, 0, 1)$.

设平面 B_1CD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

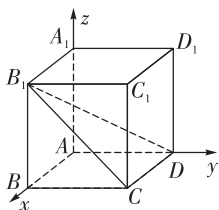
$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y - z = 0, \\ -x + y - z = 0, \end{cases}$$

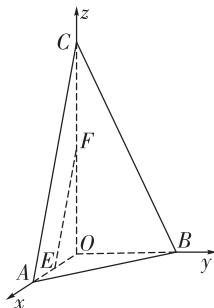
令 $z = 1$, 则 $x = 0, y = 1$, 此时 $\mathbf{n} = (0, 1, 1)$,

$$\therefore \text{点 } A \text{ 到平面 } B_1CD \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



18. 解: 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2)$.



(1) 由于 OA, OC 的中点分别为 E, F ,

因此 $E(\frac{1}{2}, 0, 0), F(0, 0, 1)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{EF} = (-\frac{1}{2}, 0, 1).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

即 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{OB}$, 故 EF 与 OB 垂直.

(2) 设 $D(x, y, z)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{BD} = (x, y - 1, z), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2),$$

$$\overrightarrow{DC} = (-x, -y, 2 - z), \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0),$$

$$\text{由 } BD \parallel AC, DC \parallel AB \Rightarrow \overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB},$$

因此存在实数 k_1, k_2 , 使得 $\overrightarrow{BD} = k_1 \overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{DC} = k_2 \overrightarrow{AB},$$

$$\text{即 } \begin{cases} (x, y - 1, z) = k_1(-1, 0, 2), \\ (-x, -y, 2 - z) = k_2(-1, 1, 0), \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = 2. \end{cases} \quad \text{即点 } D \text{ 的坐标为 } (-1, 1, 2).$$

19. 解: (1) 由已知得, 翻折后 AB 与 CD 所成的角为 60° ,

$$\text{所以 } \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos 60^\circ = 2 \text{ 或 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos 120^\circ = -2.$$

(2) 翻折后连接 BD ,

$$\text{由已知得 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{BD}|^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 2^2 + 1^2 + 2^2 + 0 + 0 + 2 \times 2 \times 2 \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD} \rangle,$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{BD}|^2 = 13 \text{ 或 } |\overrightarrow{BD}|^2 = 5,$$

$$\text{解得 } |BD| = \sqrt{13} \text{ 或 } |BD| = \sqrt{5},$$

即 B, D 两点间的距离为 $\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{5}$.

20. (1) 证明: 结合图形, 知 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$,

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DC})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}) \\
 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AD},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DM} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right) \\
 &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP}|^2 = 0,
 \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{DM}$, 即 $PB \perp DM$.

(2) 解: 设 $PA = AD = AB = 2BC = 2a$,

由于 $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}$,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD},$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此 } |\overrightarrow{PD}|^2 &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - 2 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} + |\overrightarrow{AP}|^2 = 8a^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{PD}| = 2\sqrt{2}a.$$

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AD}|^2 = 5a^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}a.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) = 2a^2,$$

$$\text{故 } \cos \langle \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{2a^2}{2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{则 } AC \text{ 与 } PD \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

21. (1) 证明: 如图, 连接 OC_1, A_1B ,

在矩形 AA_1C_1C 中, $AA_1 = 2AC = 2$, O 为 AA_1 的中点,

易证 $OC \perp OC_1$.

$$\text{因为 } AA_1 = AB, \angle BAA_1 = \frac{\pi}{3},$$

所以 $\triangle AA_1B$ 为正三角形,

又 O 为 AA_1 的中点,

所以 $OB \perp AA_1$,

又平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 AA_1B_1B ,

平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $AA_1B_1B = AA_1$,

$OB \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

所以 $OB \perp$ 平面 AA_1C_1C .

又 $OC \subset$ 平面 AA_1C_1C ,

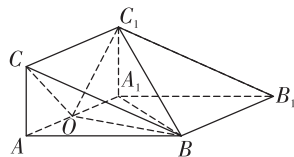
所以 $OB \perp OC$,

又 $OB \cap OC_1 = O$,

所以 $OC \perp$ 平面 BOC_1 ,

又 $BC_1 \subset$ 平面 BOC_1 ,

所以 $OC \perp BC_1$.



(2) 解: 取 CC_1 的中点 E , 连接 OE , 则 $OE \perp AA_1$,

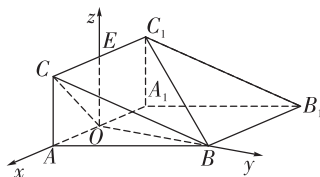
所以 OA, OB, OE 两两垂直,

如图, 以 O 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0), C(1,0,1), C_1(-1,0,1), B(0,\sqrt{3},0)$,

$$\overrightarrow{OC} = (1,0,1), \overrightarrow{OB} = (0,\sqrt{3},0),$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{CC_1} = (-2,0,0).$$



设平面 OBC 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \sqrt{3}y = 0, \\ x + z = 0, \end{cases}$$

令 $x=1$, 得 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, -1)$ 是平面 OBC 的一个法向量,

同理可求得平面 BCB_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0, 1, \sqrt{3})$,

$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

由图知二面角 $O-BC-B_1$ 为锐二面角,

所以二面角 $O-BC-B_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

22. 解: 由题意可知 AB, AD, AP 两两垂直,

以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$.

(1) 易知 $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$ 是平面 PAB 的一个法向量.

$$\text{易知 } \overrightarrow{PC} = (1, 1, -2), \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2),$$

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2y - 2z = 0, \end{cases}$$

令 $y=1$, 则 $z=1, x=1$,

所以 $\mathbf{m}=(1,1,1)$ 是平面 PCD 的一个法向量.

因为 $\cos\langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m}}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\sin\langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以平面 PAB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) $\overrightarrow{CB}=(0, -1, 0)$, $\overrightarrow{BP}=(-1, 0, 2)$,

取 PB 上任意一点 Q , 连接 CQ ,

设 $\overrightarrow{BQ}=\lambda \overrightarrow{BP}=(-\lambda, 0, 2\lambda)$,

又 $\overrightarrow{CD}=(-1, 1, 0)$,

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}=(-\lambda, -1, 2\lambda)$,

所以点 Q 到直线 CD 的距离 $d =$

$$\sqrt{|\overrightarrow{CQ}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} \right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2}}.$$

因为 $\frac{9}{2}\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \left(\lambda + \frac{1}{9} \right)^2 + \frac{4}{9} \geq \frac{4}{9}$,

所以 $d \geq \frac{2}{3}$.

所以直线 PB 与 CD 之间的距离为 $\frac{2}{3}$.

专题二 直线和圆(A卷)

1. C 解析: 易知圆 $x^2+y^2=8$ 与直线 $x-y=0$ 相交, 故 $A \cap B$ 有 2 个元素, 故选 C.

2. B 解析: 因为圆 C 与圆 O 外切, 所以两圆的圆心距等于两圆的半径之和, 即 $\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2} = 1 + \sqrt{25-m}$, 解得 $m=9$. 故选 B.

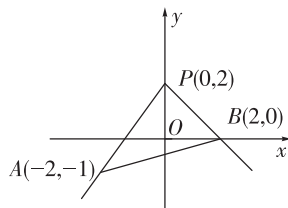
3. B 解析: 当直线 $y=x+1$ 上的点与圆心距离最小时切线长取得最小值, 圆心 $(3,0)$ 到直线 $y=x+1$ 的距离为 $d = \frac{|3-0+1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 圆的半径为 $r=1$, 故切线长的最小值为 $\sqrt{d^2-r^2} = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$, 故选 B.

4. A 解析: “点 $A(1,2), B(3,4)$ 到直线 $l: y=kx$ 的距离相等” $\Leftrightarrow$ “ $l \parallel AB$ 或 l 过 AB 的中点”. 当 $l \parallel AB$ 时, 由 $k_{AB} = \frac{4-2}{3-1} = 1$, 得 $k=1$; 当 l 过 AB 的中点时, 由 AB 的中点为 $(2,3)$, 得 $k = \frac{3}{2}$. 所以“ $k=1$ ”是“点 $A(1,2), B(3,4)$ 到直线 $l: y=kx$ 的距离相等”的充分不必要条件, 故选 A.

5. C 解析: $\because |AB| = \sqrt{(0-3)^2+(5-2)^2} = \sqrt{18}$, $|AC| = \sqrt{(4-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{17}$, $|BC| =$

$\sqrt{(4-0)^2+(6-5)^2} = \sqrt{17}$, $\therefore |AC| = |BC| \neq |AB|$, 且 $|AC|^2 + |BC|^2 \neq |AB|^2$, $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形, 故选 C.

6. D 解析: 易知直线 $ax+y-2=0$ 经过定点 $P(0, 2)$, 直线的斜率为 $-a$. 如图所示, $k_{PA} = \frac{2+1}{0+2} = \frac{3}{2}$, $k_{PB} = \frac{2-0}{0-2} = -1$. 若直线 $ax+y-2=0$ 与线段 AB 相交, 由图可知, $-a \geq \frac{3}{2}$ 或 $-a \leq -1$, 解得 $a \leq -\frac{3}{2}$ 或 $a \geq 1$. 故选 D.



7. A 解析: 因为点 $A(1,1)$ 关于直线 $y=kx+b$ 的对称点是 $B(-3,3)$, 所以 AB 的中点 $(-1,2)$ 在直线 $y=kx+b$ 上, 即 $2 = -k+b$ ①, 又直线 AB 的斜率为 $\frac{3-1}{-3-1} = -\frac{1}{2}$, 则 $k=2$. 代入①得, $b=4$. 所以直线 $y=kx+b$ 的方程为 $y=2x+4$, 令 $x=0$ 得 $y=4$. 所以直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距是 4. 故选 A.

8. D 解析: 因为平面上三条直线 $x-2y+1=0$, $x-1=0$, $x+ky=0$ 将平面划分为六个部分, 所以这三条直线中有两条直线平行或三条直线交于一点. 易知直线 $x-2y+1=0$ 与 $x-1=0$ 不平行, 当直线 $x+ky=0$ 与直线 $x-2y+1=0$ 平行时, $\frac{1}{1} = \frac{k}{-2}$, 解得 $k=-2$; 当直线 $x+ky=0$ 与直线 $x-1=0$ 平行时, 可得 $k=0$; 当直线 $x+ky=0$ 经过直线 $x-2y+1=0$ 与直线 $x-1=0$ 的交点 $(1,1)$ 时, $1+k=0$, 解得 $k=-1$. 所以 $k=-2$ 或 $k=0$ 或 $k=-1$. 故选 D.

9. AD 解析: 令 $x=0$, 则 $y=4$; 令 $y=0$, 则 $x=2$. 不妨设直线 $2x+y-4=0$ 与两坐标轴的交点分别为 $A(0,4), B(2,0)$, 所以 $|AB| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$. 以 A 为圆心, 过 B 点的圆的方程为 $x^2+(y-4)^2=20$; 以 B 为圆心, 过 A 点的圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=20$. 故选 AD.

10. ABC 解析: 圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 的圆心为 $C_1(0, 0)$, 半径 $r_1=1$, 圆 $C_2: (x-m)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C_2(m, 1)$, 半径 $r_2=2$, 则 $|C_1C_2| = \sqrt{m^2+1^2} \geq 1$, $|r_1-r_2|=1$, $r_1+r_2=3$, 当

$|C_1C_2|=1$ 时,两圆内切;当 $1<|C_1C_2|<3$ 时,两圆相交;当 $|C_1C_2|=3$ 时,两圆外切;当 $|C_1C_2|>3$ 时,两圆外离,结合选项可知圆 C_1, C_2 的位置关系可能是外离、外切、相交. 故选 ABC.

11. AC 解析:对于 A,直线 $y=ax+b$ 中的斜率 $a>0$,截距 $b>0$,圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 的圆心 (a,b) 在第一象限, A 正确;对于 B, C, 直线 $y=ax+b$ 中的斜率 $a<0$,截距 $b<0$,圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 的圆心 (a,b) 在第三象限, B 不正确, C 正确;对于 D, 直线 $y=ax+b$ 中的斜率 $a>0$,截距 $b<0$,圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 的圆心 (a,b) 在第四象限,此时直线 $y=ax+b$ 在 y 轴上的截距 b 与圆心的纵坐标 b 相同,由图知 D 不正确. 故选 AC.

12. ABD 解析:由方程组 $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y=0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases} \text{ 即点 } A(-1,0). \text{ 又 } B(1,2), \text{ 所以直线}$$

AB 的斜率为 1,又 $\angle A$ 的平分线所在直线的方程为 $y=0$,故直线 AC 的斜率为 -1,所以 AC 所在直线的方程为 $y=-(x+1)$,即 $x+y+1=0$,所以 A 正确;已知 BC 边上的高所在直线的方程为 $x-2y+1=0$,故直线 BC 的斜率为 -2,故 BC 所在直线的方程为 $y-2=-2(x-1)$,由 $\begin{cases} y=-(x+1), \\ y-2=-2(x-1), \end{cases}$ 得点 C 的坐标为 $(5,-6)$,所以 B 正确;因为 $B(1,2), C(5,-6)$,所以 $|BC|=\sqrt{(1-5)^2+[2-(-6)]^2}=4\sqrt{5}$,所以 C 错误;点 $A(-1,0)$ 到直线 $BC: y-2=-2(x-1)$ 的距离为 $d=\frac{|2\times(-1)-4|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=12$,所以 D 正确. 故选 ABD.

13. (5,5) 解析:设点 $P(x,y)$,由题意知 $x>0, y>0$.

$$\because \text{点 } P \text{ 在直线 } 2x-3y+5=0 \text{ 上}, \therefore y=\frac{2x+5}{3},$$

$$\because |PA|=\sqrt{13}, \therefore (x-2)^2+\left(\frac{2x+5}{3}-3\right)^2=13,$$

即 $(x-2)^2=9$,解得 $x=-1$ (舍去)或 $x=5$. 当 $x=5$ 时, $y=5$,满足题意. $\therefore$ 点 P 的坐标为 $(5,5)$.

14. $2\sqrt{3}\pi$ 解析:由 $|y|-1=\sqrt{3-(x-2)^2}$,得 $|y|-1\geq 0$,所以 $y\geq 1$ 或 $y\leq -1$. 将原式变形可得 $(x-2)^2+(|y|-1)^2=3$. 所以该曲线为两个半圆,半径为 $\sqrt{3}$,所以曲线的长度为 $2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$.

15. $\frac{12}{5}$ 解析:由题意圆 L 与圆 S 关于原点对称,设 $S(a,0)(a>0)$,则 $|SQ|=\sqrt{a^2+3^2}=2+3$,解得

$a=4$,即 $S(4,0)$,所以 $L(-4,0)$. 当直线 l 的斜率不存在时,不符合题意. 设直线 l 的方程为 $y=kx(k\neq 0)$,则点 L, S, Q 到该直线的距离分别为 $d_1=\frac{|-4k|}{\sqrt{1+k^2}}, d_2=\frac{|4k|}{\sqrt{1+k^2}}, d_3=\frac{|3|}{\sqrt{1+k^2}}$,则 $4-d_1^2=4-d_2^2=9-d_3^2$. 即 $4-\left(\frac{|-4k|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=4-\left(\frac{|4k|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=9-\left(\frac{3}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2$,解得 $k^2=\frac{4}{21}$,则 $d^2=4\times\left(9-\frac{9}{1+\frac{4}{21}}\right)=\frac{144}{25}$,即 $d=\frac{12}{5}$.

16. $(-4,0)$ 解析:设 $C(m,n)$,则 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 $\left(\frac{2+m}{3}, \frac{4+n}{3}\right)$,代入欧拉线方程 $x-y+2=0$

$$\text{得 } \frac{2+m}{3}-\frac{4+n}{3}+2=0, \text{ 整理得 } m-n+4=0 \quad ①.$$

$$AB \text{ 的中点坐标为 } (1,2), k_{AB}=\frac{4-0}{0-2}=-2, \therefore AB$$

$$\text{的垂直平分线方程为 } y-2=\frac{1}{2}(x-1), \text{ 即 } x-$$

$$2y+3=0. \text{ 联立 } \begin{cases} x-2y+3=0, \\ x-y+2=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-1, \\ y=1, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的外心为 } (-1,1). \therefore (m+1)^2+(n-1)^2=[2-(-1)]^2+(0-1)^2, \text{ 整理得 } m^2+n^2+$$

$$2m-2n=8 \quad ②, \text{ 联立 } ① \text{ ② 得 } \begin{cases} m=-4, \\ n=0 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} m=0, \\ n=4. \end{cases} \text{ 当 } \begin{cases} m=0, \\ n=4 \end{cases} \text{ 时,点 } B, C \text{ 重合,舍去,} \therefore \text{ 顶点}$$

C 的坐标是 $(-4,0)$.

17. 解:(1)因为点 $M(6,9)$ 在圆 N 上,

$$\text{所以 } (6-5)^2+(9-6)^2=a^2,$$

$$\text{即 } a^2=10,$$

$$\text{又 } a>0, \text{ 所以 } a=\sqrt{10}.$$

$$(2) \text{ 因为 } |PN|=\sqrt{(5-3)^2+(6-3)^2}=\sqrt{13},$$

$$|QN|=\sqrt{(5-5)^2+(6-3)^2}=3,$$

$$\text{所以 } |PN|>|QN|,$$

故点 P 在圆 N 外,点 Q 在圆 N 内,

$$\text{所以 } 3<a<\sqrt{13},$$

故实数 a 的取值范围是 $(3, \sqrt{13})$.

18. 解:(1)设 $M(0,a), N(b,0), C(m,n)$.

$$\because A(5,-2), B(7,3),$$

又 M 是 AC 的中点,

$$\therefore 5+m=0,$$

$$\therefore m=-5,$$

又 N 是 BC 的中点,

$$\therefore 3+n=0,$$

$$\therefore n=-3,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-5, -3)$.

(2) 设 AB 的中点为 P , 则点 P 的坐标为 $(6, \frac{1}{2})$,

由两点式得 AB 边上的中线所在的直线方程为

$$\frac{y+3}{\frac{1}{2}+3} = \frac{x+5}{6+5},$$

整理, 得 $7x-22y-31=0$.

$\therefore AB$ 边上的中线所在的直线方程为 $7x-22y-31=0$.

19. 解: 建立如图所示的平面直角坐标系,

则 $E(30, 0), F(0, 20)$,

线段 EF 的方程为 $\frac{x}{30} + \frac{y}{20} = 1 (0 \leq x \leq 30)$.

设点 $P(m, n)$, 矩形草坪 $PQCR$ 的面积为 $S \text{ m}^2$,

则 $S = PQ \cdot PR = (100-m) \cdot (80-n)$.

$$\text{又 } \frac{m}{30} + \frac{n}{20} = 1 (0 \leq m \leq 30),$$

$$\text{所以 } n = 20 - \frac{2}{3}m,$$

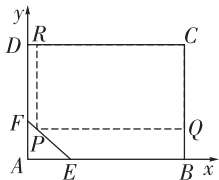
$$\text{于是 } S = (100-m) \left(80 - 20 + \frac{2}{3}m \right) = -\frac{2}{3}(m-5)^2 + \frac{18050}{3} (0 \leq m \leq 30).$$

$$\text{所以当 } m=5 \text{ 时, } S_{\max} = \frac{18050}{3},$$

$$\text{此时 } EP = \frac{30-5}{5}PF = 5PF.$$

故当 $\frac{EP}{PF} = 5$ 时, 矩形草坪的面积最大, 最大面积为

$$\frac{18050}{3} \text{ m}^2.$$



20. 解: (1) 由题意可得 $\begin{cases} 4+16-4m > 0, \\ 4+4-4-8+m \geq 0, \end{cases}$

解得 $4 \leq m < 5$,

即 m 的最小值为 4.

(2) $\because$ 方程 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + m = 0$ 可化为

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5-m (4 \leq m < 5),$$

$\therefore$ 当 $m=4$ 时, 圆的面积最大,

即圆 $C_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

由 $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 0$ 得 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2$,

又 $a > 0$,

$\therefore$ 圆 C_2 的圆心为 (a, a) , 半径为 $\sqrt{2}a$.

若圆 C_1 与 C_2 相交, 则必有 $|\sqrt{2}a - 1| < \sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} < \sqrt{2}a + 1$ 成立,

$$\text{解得 } \frac{2(3-\sqrt{2})}{7} < a < \frac{2(3+\sqrt{2})}{7},$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{2(3-\sqrt{2})}{7}, \frac{2(3+\sqrt{2})}{7} \right)$.

21. 解: (1) 因为点 (a, b) 在直线 $3x+2y+1=0$ 上,

$$\text{所以 } 3a+2b+1=0, \text{ 即 } a = -\frac{2b+1}{3},$$

代入直线 $ax+by+2=0$,

$$\text{得 } -\frac{2b+1}{3}x + by + 2 = 0,$$

整理得 $6-x+b(3y-2x)=0$,

$$\text{令 } \begin{cases} 6-x=0, \\ 3y-2x=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=6, \\ y=4, \end{cases}$$

所以定点 M 的坐标为 $(6, 4)$.

(2) 设 $A(m, n) (m > 0, n > 0), B(c, 0) (c > 0)$,

由题意知 M, A, B 三点共线,

当 l_1 与 x 轴垂直时, $A(6, 24), B(6, 0)$,

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |OB| = \frac{1}{2} \times 24 \times 6 = 72.$$

当 l_1 与 x 轴不垂直时, $k_{AM} = k_{BM}$,

$$\text{即 } \frac{n-4}{m-6} = \frac{4-0}{6-c},$$

$$c = \frac{6n-4m}{n-4},$$

因为 A 在直线 $l_2: y=4x$ 上,

所以 $n=4m$,

$$\text{所以 } c = \frac{6n-4m}{n-4} = \frac{5m}{m-1},$$

因为 $m > 0, c > 0$,

$$\text{所以 } c = \frac{5m}{m-1} > 0,$$

$$\text{所以 } m > 1. S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times n \times \frac{5m}{m-1} = \frac{10m^2}{m-1} =$$

$$10 \left(m-1 + \frac{1}{m-1} + 2 \right) \geq 10 \times (2+2) = 40,$$

当且仅当 $m-1 = \frac{1}{m-1}$, 即 $m=2$ 时等号成立,

此时 $n=4m=8$,

所以 $A(2, 8)$,

因为 $72 > 40$,

所以 $\triangle OAB$ 面积最小时直线 l_1 与 x 轴不垂直,

且 l_1 的斜率为 $k_{AM} = \frac{8-4}{2-6} = -1$,

所以直线 l_1 的方程为 $y-8 = -(x-2)$,

即为 $x+y-10=0$.

22. 解: (1) 若切线的斜率存在, 可设切线的方程为 $y-6=k_0(x-4)$,

则圆心 $C_1(0,0)$ 到切线的距离 $d=\frac{|4k_0-6|}{\sqrt{1+k_0^2}}=4$,

解得 $k_0=\frac{5}{12}$,

所以切线的方程为 $5x-12y+52=0$;

若切线的斜率不存在, 则切线方程为 $x=4$, 此时也符合题意.

综上所述, 过点 $(4,6)$ 的圆 C_1 的切线方程为 $5x-12y+52=0$ 或 $x=4$.

(2) 设点 $P(a,b)$ 满足条件,

不妨设直线 l_1 的方程为 $y-b=k(x-a)$,

即 $kx-y+b-ak=0$.

则直线 l_2 的方程为 $x+ky-bk-a=0$.

因为圆 C_1 的半径是圆 C_2 的半径的 2 倍, 且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长是直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长的 2 倍,

所以 C_1 到直线 l_1 的距离是 C_2 到直线 l_2 的距离的 2 倍,

$$\text{即 } \frac{|b-ak|}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \cdot \frac{|7+4k-bk-a|}{\sqrt{1+k^2}},$$

整理得 $|ak-b| = |2a-14+(2b-8)k|$,

从而 $ak-b=2a-14+(2b-8)k$ 或 $b-ak=2a-14+(2b-8)k$,

即 $(a-2b+8)k=2a+b-14$ 或 $(a+2b-8)k=-2a+b+14$.

因为 k 的取值有无穷多个,

$$\text{所以 } \begin{cases} a-2b+8=0, \\ 2a+b-14=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a+2b-8=0, \\ -2a+b+14=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=4, \\ b=6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{36}{5}, \\ b=\frac{2}{5}. \end{cases}$$

所以点 P 的坐标为 $(4,6)$ 或 $(\frac{36}{5}, \frac{2}{5})$.

专题二 直线和圆(B卷)

1. A 解析: 因为直线 $l_1: x+my+1=0$ 和 $l_2: mx+4y+2=0$ 互相平行, 所以 $1 \times 4 - m^2 = 0$, 解得 $m=2$ 或 $m=-2$. 当 $m=2$ 时, $l_1: x+2y+1=0$ 与 $l_2: 2x+4y+2=0$ 重合, 不符合题意, 故 $m=-2$. 故选 A.

2. A 解析: 设圆心坐标为 $(0, b)$, 则由题意知 $\sqrt{(0-1)^2 + (b-2)^2} = 1$, 解得 $b=2$, 故圆的方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 1$. 故选 A.

3. D 解析: 因为圆 $x^2 + y^2 - ax + 2y + 1 = 0$ 的圆心坐标为 $(\frac{a}{2}, -1)$, 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 所以两圆心的中点坐标为 $(\frac{a}{4}, -\frac{1}{2})$. 又两圆关于直线 $x-y=1$ 对称, 所以点 $(\frac{a}{4}, -\frac{1}{2})$ 在直线 $x-y=1$ 上, 所以 $\frac{a}{4} + \frac{1}{2} = 1$. 解得 $a=2$. 故选 D.

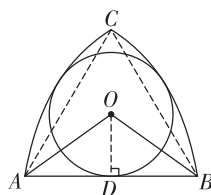
4. A 解析: 直线方程整理为 $k(x-1) - y + 1 = 0$, 即直线 l 过定点 $P(1,1)$, 而 $1^2 + 1^2 - 4 \times 1 = -2 < 0$, 所以点 P 在圆 C 内, 所以直线 l 与圆 C 相交. 故选 A.

5. C 解析: 由 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, 得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, 设原点 $O(0,0)$, 圆心 $C(1, -2)$, 因为 $x^2 + y^2$ 为圆上的点与原点距离的平方, 所以 $x^2 + y^2$ 的最小值是 $(5 - |OC|)^2 = (5 - \sqrt{5})^2 = 30 - 10\sqrt{5}$. 故选 C.

6. A 解析: 如图, 连接 AC, BC , 由题可知, $\triangle ABC$ 为正三角形, 设其边长为 a , 圆 O 的半径为 r , 过 O 作 $OD \perp AB$, 垂足为 D , 则 $(a-r)^2 = (\frac{a}{2})^2 + r^2$, 解得

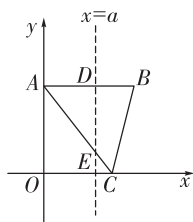
$$r = \frac{3a}{8}, \text{ 则 } \tan \angle AOD = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{8}} = \frac{4}{3}, \text{ 所以}$$

$$\tan \angle AOB = \tan 2 \angle AOD = \frac{2 \tan \angle AOD}{1 - \tan^2 \angle AOD} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 - (\frac{4}{3})^2} = -\frac{24}{7}.$$



7. A 解析: 如图所示, 易知直线 AB 的方程是 $y=3$, 直线 AC 的方程是 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, 即 $3x+2y-6=0$, 且直线 $x=a$ 只与边 AB, AC 相交. 设直线 $x=a$ 与 AB 交于点 D , 与 AC 交于点 E , 则点 D, E 的坐标分别为 $(a, 3)$, $(a, \frac{6-3a}{2})$, 从而 $|DE| = 3 - \frac{6-3a}{2} = \frac{3}{2}a$. $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |DE| = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3}{2} a = \frac{3}{4} a^2$ ①. 又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$, 所以 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4}$ ②, 由①②得 $\frac{3}{4} a^2 = \frac{9}{4}$, 解得 $a =$

$\sqrt{3}$ 或 $a = -\sqrt{3}$ (舍去), 故选 A.



8. B 解析: 直线 l 可化为 $3x - y - 1 - t(2x - y - 2) = 0$,

令 $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0, \\ 2x - y - 2 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -4, \end{cases}$ 所以点 A 的坐标为 $(-1, -4)$.

设点 $A(-1, -4)$ 关于直线 $x - y - 5 = 0$ 的对称点为 $B(a, b)$, 则

$$\begin{cases} \frac{b+4}{a+1} = -1, \\ \frac{a-1}{2} - \frac{b-4}{2} - 5 = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = -6, \end{cases} \quad \text{所以点 B 的坐标为 } (1, -6).$$

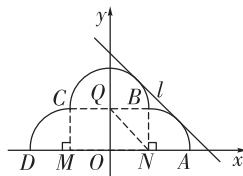
由线段垂直平分线的性质可知, $|AM| = |BM|$, 所以 $|AM| + |MN| = |BM| + |MN| \geq |BN| \geq |BC| - 2 = 6 - 2 = 4$ (当且仅当 B, M, N, C 四点共线时等号成立), 所以 $|AM| + |MN|$ 的最小值为 4.

9. BD 解析: 对于 A, 当 $k = 0$ 时, $l_2: x = 0$, 符合倾斜角为 90° , 故 A 错误; 对于 B, $l_2: (k+1)x + ky + k = k(x+y+1) + x = 0$ 过定点 $(0, -1)$, 而点 $(0, -1)$ 也在 $l_1: x - y - 1 = 0$ 上, 所以对任意的 k , l_1 与 l_2 都有公共点, 故 B 正确; 对于 C, 当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $l_2: \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - y - 1) = 0$, 显然与 $l_1: x - y - 1 = 0$ 重合, 故 C 错误; 对于 D, 要使 l_1 与 l_2 垂直, 则 $(k+1) \times 1 + (-1) \times k = 0$, 即 $k+1-k=0$, 显然不存在这样的 k 值, 故 D 正确. 故选 BD.

10. BC 解析: 对于 A, 当 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ 时, 过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 两点的直线方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, 所以 A 不正确; 对于 B, 点 $(0, 2)$ 与点 $(1, 1)$ 连线的中点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 满足直线方程 $y = x + 1$, 并且两点所在直线的斜率为 -1 , 该直线与直线 $y = x + 1$ 垂直, 所以点 $(0, 2)$ 关于直线 $y = x + 1$ 的对称点为 $(1, 1)$, 所以 B 正确; 对于 C, 直线 $x - y - 2 = 0$ 在两坐标轴上的截距分别为 $2, -2$, 故直线 $x - y - 2 = 0$ 与坐标轴围成的三角形的面积是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$, 所以 C 正确; 对于 D, 经过点 $(1, 1)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x + y - 2 = 0$ 或 $y = x$, 所以 D 不正确. 故选 BC.

11. AC 解析: 由圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$, 得 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$, 由圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0$, 得 $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 50$, $\therefore C_1(-1, -1)$, 圆 C_1 的半径 $r_1 = \sqrt{10}$, $C_2(1, -5)$, 圆 C_2 的半径 $r_2 = 5\sqrt{2}$. 两圆的圆心距 $|C_1C_2| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+5)^2} = 2\sqrt{5}$, 故 A 正确; $\because 5\sqrt{2} - \sqrt{10} < |C_1C_2| < \sqrt{10} + 5\sqrt{2}$, $\therefore$ 两圆相交, 公切线有 2 条, 故 B 错误; 两圆方程作差, 可得 $x - 2y + 4 = 0$, 即公共弦所在的直线方程为 $x - 2y + 4 = 0$, 故 C 正确; 圆心 $C_1(-1, -1)$ 到直线 $x - 2y + 4 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-1+2+4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, $r_1 = \sqrt{10}$, 则公共弦的长度为 $2\sqrt{10-5} = 2\sqrt{5}$, 故 D 错误.

12. BC 解析: 连接 BC 交 y 轴于点 Q, 过点 B 作 $BN \perp x$ 轴于点 N, 过点 C 作 $CM \perp x$ 轴于点 M, $\widehat{CD}, \widehat{CB}, \widehat{BA}$ 所在圆的方程分别为 $(x+1)^2 + y^2 = 1, x^2 + (y-1)^2 = 1, (x-1)^2 + y^2 = 1$. 由题知曲线 Ω 与 x 轴围成的图形是一个半圆, 一个矩形和两个四分之一圆. 所以其面积为 $2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2 = \pi + 2$, 故 A 错误; 连接 QN, 易知直线 QN: $y = -x + 1$, $\widehat{CB}$ 与 $\widehat{BA}$ 的公切线 l 平行于 QN, 且两直线间的距离为 1, 设直线 $l: y = -x + b (b > 0 \text{ 且 } b \neq 1)$, 所以 $\frac{|b-1|}{\sqrt{2}} = 1$, 解得 $b = \sqrt{2} + 1$, 所以直线 $l: x + y - \sqrt{2} - 1 = 0$, 故 B 正确; 将 $\widehat{AB}$ 所在圆与 $\widehat{CB}$ 所在圆方程相减, 得公共弦所在直线的方程为 $x - y = 0$, 故 C 正确; $\widehat{CD}$ 所在圆的圆心 $(-1, 0)$ 到直线 $y = x$ 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以弦长为 $2\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{2}$, 故 D 错误. 故选 BC.



13. 3 解析: 由题意, 得圆的标准方程为 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$, 所以圆心为 $(2, -2)$, 半径为 1. 所以圆心到直线的距离 $d = \frac{|2-2-4\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4$, 所以动点 P 到直线的最短距离为 $4 - 1 = 3$.

14. $\frac{4}{5}$ 解析: 因为 $l_1 \perp l_2$, 所以 $b + a - 4 = 0$, 即 $b +$

$a=4, a>0, b>0$, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b} \right) \cdot (b+a+1) = \frac{1}{5} \left(2 + \frac{b}{a+1} + \frac{a+1}{b} \right) \geq \frac{1}{5} \left(2 + 2\sqrt{\frac{b}{a+1} \cdot \frac{a+1}{b}} \right) = \frac{4}{5}$, 当且仅当 $\frac{b}{a+1} = \frac{a+1}{b}$ 且 $a+b=4$, 即 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}$ 时取等号, 此时 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b}$ 取得最小值, 为 $\frac{4}{5}$.

15. $x=5$ 或 $4x+3y-23=0$ 解析: 将圆 C 的方程化为 $(x-2)^2 + y^2 = 9$, 得圆心 $C(2, 0)$, 半径 $r=3$. 当直线 l 的斜率不存在时, $l: x=5$, 此时圆心 C 到直线 l 的距离等于半径, 满足题意; 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-5)$, 即 $kx-y+1-5k=0$, 所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2k+1-5k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$, 解得 $k = -\frac{4}{3}$, 所以直线 l 的方程为 $4x+3y-23=0$, 故直线 l 的方程为 $x=5$ 或 $4x+3y-23=0$.

16. 2 解析: 根据题意, 已知 O 为原点, $|OP|=3$, 则点 P 的轨迹为圆 $x^2+y^2=9$. 由点 $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 可得 $|OM|^2 = \left(-\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2 = 1$, 即 $|OM|=1$, 又 $1<3$, 所以点 M 在圆内, 所以 $|PM| \geq 3 - |OM| = 2$, 即线段 PM 长的最小值为 2.

17. 解: (1) 因为直线 l 的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以其倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$.

又因为直线 l_1 的倾斜角是直线 l 的倾斜角的两倍,

所以 l_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$.

因为直线 $l: x-\sqrt{3}y-2=0$ 与直线 $x-y=2$ 的交点为 $(2, 0)$,

所以直线 l_1 的方程为 $y-0 = \tan \frac{\pi}{3}(x-2)$,

即 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$.

(2) 因为直线 l_2 与直线 l 平行,

所以设直线 l_2 的方程为 $x-\sqrt{3}y+c=0 (c \neq -2)$.

因为 l_2 与 l 的距离为 3,

所以 $\frac{|c+2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = 3$,

解得 $c=4$ 或 $c=-8$,

所以直线 l_2 的方程为 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-8=0$.

18. 解: (1) 由直线 l_1 与 l_2 垂直得 $a^2+a=0$.

解得 $a=0$ 或 $a=-1$.

(2) 圆 $C: x^2+y^2-6y+5=0$ 的圆心为 $C(0, 3)$, 半径为 2,

设圆心 $C(0, 3)$ 到直线 l_2 的距离为 d ,

则 $d = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$,

又 $d = \frac{|3a+1|}{\sqrt{1+a^2}}$,

所以 $\frac{|3a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{2}$,

所以 $7a^2+6a-1=0$,

所以 $a = \frac{1}{7}$ 或 $a = -1$,

当 $a = \frac{1}{7}$ 时, $l_2: x + \frac{1}{7}y + 1 = 0$,

由 $x=0$ 得 $y = -7 < 3$,

此时圆心 C 在直线 l_2 的右上方, 不符合题意;

当 $a = -1$ 时, $l_2: x - y + 1 = 0$,

由 $x=0$ 得 $y = 1 < 3$,

此时圆心 C 在直线 l_2 的左上方.

故直线 l_2 的方程为 $x - y + 1 = 0$.

19. 解: (1) 因为直线 $l: mx - y + 1 = 0$ 恒过定点 $N(0, 1)$, 且点 $N(0, 1)$ 在圆 $C: x^2 + (y-2)^2 = 5$ 的内部, 所以直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点.

(2) 由题意知 $C(0, 2)$, 设动点 $M(x, y)$,

当 $x=0$ 时, $M(0, 1)$;

当 $x \neq 0$ 时, 由垂径定理, 知 $MN \perp MC$,

所以 $\frac{y-2}{x} \cdot \frac{y-1}{x} = -1$,

整理得 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

又 $(0, 1)$ 满足此方程,

所以弦 AB 的中点 M 的轨迹方程是 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

20. 解: (1) 依题意, 得直线 AC 的斜率 $k_{AC} = -1$,

$\therefore$ 设直线 AC 的方程为 $y-4 = -(x-2)$,

即 $x+y-6=0$.

易知直线 OA 的斜率 $k_{OA} = \frac{4}{2} = 2$,

$\therefore$ 线段 OA 的垂直平分线的方程为 $y-2 =$

$-\frac{1}{2}(x-1)$,

即 $x+2y-5=0$.

由 $\begin{cases} x+y-6=0, \\ x+2y-5=0, \end{cases}$ 得圆心 C 的坐标为 $(7, -1)$.

$\therefore$ 圆 C 的半径 $r = |AC| = \sqrt{(7-2)^2 + (-1-4)^2} = 5\sqrt{2}$,

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 50$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = -x + m$,

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = -x + m, \\ (x-7)^2 + (y+1)^2 = 50, \end{cases}$

消去 y 得 $2x^2 - (2m+16)x + m^2 + 2m = 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = m + 8, x_1 x_2 = \frac{m^2 + 2m}{2}$.

$\therefore \vec{AM} \cdot \vec{AN} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + (y_1 - 4)(y_2 - 4) = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + (-x_1 + m - 4)(-x_2 + m - 4) = 2x_1 x_2 - (m - 2)(x_1 + x_2) + (m - 4)^2 + 4 = m^2 + 2m - (m - 2)(m + 8) + (m - 4)^2 + 4 = m^2 - 12m + 36 = (m - 6)^2$.

$\therefore$ 直线 l 与圆 C 相交于不同两点,

$\therefore \frac{|7-1-m|}{\sqrt{2}} < 5\sqrt{2}$, 解得 $-4 < m < 16$.

$\therefore 0 \leq (m - 6)^2 < 100$,

$\therefore \vec{AM} \cdot \vec{AN}$ 的取值范围是 $[0, 100)$.

21. 解: (1) 易知直线 l 的倾斜角为 $180^\circ - \theta$,

且 $\tan \theta = 2$,

所以 $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta = -2$,

故直线 l 的斜率为 -2 ,

所以直线 l 的方程为 $y - 0 = -2(x - 40)$,

即 $2x + y - 80 = 0$.

当台风中心在 O 地时, 台风危险区域是一个以 O 为圆心, $12\sqrt{5}$ km 为半径的圆,

因为台风中心从 O 地以每小时 $20\sqrt{2}$ km 的速度向东北方向移动,

所以 $|OM| = 20\sqrt{2}t$ (km),

设 $M(a, a)$ ($a > 0$), 则有 $a^2 + a^2 = (20\sqrt{2}t)^2$,

解得 $a = 20t$,

所以 $M(20t, 20t)$,

所以移动后的圆心为 $(20t, 20t)$,

故 t 时刻台风危险区域边界轨迹 C 的方程为

$(x - 20t)^2 + (y - 20t)^2 = (12\sqrt{5})^2$,

即 $(x - 20t)^2 + (y - 20t)^2 = 720$.

(2) 台风路径满足的方程为 $y = x$,

设 t_1 时高速公路 l 恰好进入危险区域内, t_2 时高速公路 l 恰好离开危险区域,

t_1 时台风中心为 $O_1(x_1, y_1)$, t_2 时台风中心为 $O_2(x_2, y_2)$,

① t_1 时台风中心到高速公路 l 的距离恰好为半径 $12\sqrt{5}$ km,

则有 $\frac{|2x_1 + x_1 - 80|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 12\sqrt{5}$,

解得 $x_1 = \frac{20}{3}$ 或 $x_1 = \frac{140}{3}$ (舍),

所以台风中心为 $O_1(\frac{20}{3}, \frac{20}{3})$.

② t_2 时台风中心到高速公路 l 的距离也恰好为半径 $12\sqrt{5}$ km,

则有 $\frac{|2x_2 + x_2 - 80|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 12\sqrt{5}$,

解得 $x_2 = \frac{140}{3}$ 或 $x_2 = \frac{20}{3}$ (舍),

所以台风中心为 $O_2(\frac{140}{3}, \frac{140}{3})$.

则 $|OO_1| = \sqrt{(\frac{20}{3})^2 + (\frac{20}{3})^2} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ (km),

$|OO_2| = \sqrt{(\frac{140}{3})^2 + (\frac{140}{3})^2} = \frac{140\sqrt{2}}{3}$ (km),

故 $|O_1O_2| = |OO_2| - |OO_1| = 40\sqrt{2}$ (km),

则时间长 $t' = \frac{40\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = 2$ (小时),

所以高速公路 l 处于危险区域内的时长为 2 小时.

22. 解: (1) 设 $M(a, b)$,

则 $\begin{cases} \frac{b-4}{a+1} = -1, \\ \frac{a-1}{2} - \frac{b+4}{2} + 1 = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = 0. \end{cases}$

因为圆 M 与 y 轴相切于原点,

所以圆 M 的半径为 3,

所以圆 M 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

(2) 由 (1) 知圆 M 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

设 OA 所在的直线方程为 $y = kx$,

联立 $\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 9, \\ y = kx, \end{cases}$

得到 $x_A = \frac{6}{1+k^2}, y_A = \frac{6k}{1+k^2}$,

同理把 k 换为 $-\frac{1}{2k}$,

可得 $x_B = \frac{24k^2}{1+4k^2}, y_B = \frac{-12k}{1+4k^2}$,

所以 AB 所在的直线方程为 $y - \frac{6k}{1+k^2} = \frac{3k}{1-2k^2} \cdot$

$(x - \frac{6}{1+k^2})$.

当 $y = 0$ 时, 可得 $x = 4$,

故直线 AB 过定点 $C(4,0)$.

由于 OC 为定值,且 $\triangle ODC$ 为直角三角形, OC 为斜边,

所以 OC 的中点 P 满足 $|DP| = \frac{|OC|}{2}$ 为定值.

由 $O(0,0), C(4,0)$, 及中点坐标公式可得 $P(2,0)$,

故存在 $P(2,0)$, 使得 $|DP|$ 为定值.

专题三 圆锥曲线(A卷)

1. D 解析:双曲线 $C: y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$ 的虚半轴长 $b = \sqrt{2}$,

所以该双曲线的虚轴长为 $2\sqrt{2}$. 故选 D.

2. A 解析:由题意知椭圆中, $a = \sqrt{6k}, b = \sqrt{2k}, c = \sqrt{6k - 2k} = 2\sqrt{k}$, 故离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{6k}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.

3. C 解析:抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$. 在双曲线 $\frac{x^2}{3p} - \frac{y^2}{p} = 1$ 中, $a^2 = 3p, b^2 = p$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 3p + p = 4p$, 所以双曲线的焦点为 $(-2\sqrt{p}, 0), (2\sqrt{p}, 0)$, 根据题意可得 $2\sqrt{p} = \frac{p}{2}$, 解得 $p = 16$. 故选 C.

4. C 解析:依题意可知直线 l 恒过点 $(\sqrt{2}, 0)$, 即双曲线的右焦点, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm x$. 要使直线 l 与双曲线只有一个公共点, 则该直线与渐近线平行, 所以 $k = \pm 1$. 故选 C.

5. A 解析:因为抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 所以 $\frac{p}{2} = 1$, 由抛物线的定义得, $|\overrightarrow{FA}| = 1 + 1 = 2, |\overrightarrow{FB}| = x_1 + 1, |\overrightarrow{FC}| = x_2 + 1$, 因为 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = 10$, 所以 $2 + x_1 + 1 + x_2 + 1 = 10$, 即 $x_1 + x_2 = 6$. 故选 A.

6. A 解析: $\because$ 焦点为 $F(4,0), \therefore c = 4, \therefore OAFB$ 为矩形, $\therefore \angle AOB = 90^\circ$, 根据双曲线的对称性, 可得 $\frac{b}{a} = \tan 45^\circ = 1$, 又 $a^2 + b^2 = c^2, \therefore a^2 = b^2 = 8$, 则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$. 故选 A.

7. C 解析:椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中, $a^2 = 9, b^2 = 5$, 则 $c^2 = 4, \therefore a = 3, c = 2, \therefore |F_1F_2| = 2c = 4. \therefore |PF_1| + |PF_2| = 2a = 6, \therefore |PF_1| = |F_1F_2|, \therefore |PF_2| = 2. \therefore S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}, \therefore S_{\triangle PF_1F_2} =$

$\frac{1}{2}(|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|)r = \sqrt{15}$, 解得 $r = \frac{\sqrt{15}}{5}$. 故选 C.

8. B 解析:设 $|PF_2| = m$, 则 $m \geq c - a$, 由双曲线的定义知, $|PF_1| - |PF_2| = 2a, \therefore |PF_1| = m + 2a$,

$\therefore \frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2} = \frac{(m+2a)^2}{m^2} = m + \frac{4a^2}{m} + 4a \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{4a^2}{m}} + 4a = 8a$, 当且仅当 $m = \frac{4a^2}{m}$, 即 $m = 2a$

时, 等号成立, $\therefore$ 当 $\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2}$ 的最小值为 $8a$ 时, $|PF_1| = 4a, |PF_2| = 2a$, 此时 $m = 2a \geq c - a$, 解得 $e = \frac{c}{a} \leq 3$, 又 $e > 1, \therefore e \in (1, 3]$. 故选 B.

9. BD 解析:因为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 M 到其准线及对称轴的距离分别为 3 和 $2\sqrt{2}$, 所以

$\begin{cases} |y_M| = 2\sqrt{2}, \\ x_M + \frac{p}{2} = 3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} |y_M| = 2\sqrt{2}, \\ x_M = 3 - \frac{p}{2}, \end{cases}$ 代入抛物线方程可

得 $8 = 2p(3 - \frac{p}{2})$, 整理得 $p^2 - 6p + 8 = 0$, 解得 $p = 2$ 或 $p = 4$. 故选 BD.

10. BC 解析:因为 $a^2 = 1, b^2 = 6$, 所以 $c^2 = 1 + 6 = 7$, $c = \sqrt{7}$, 焦距为 $2\sqrt{7}$, A 错误; 由 $2a = 2, 2b = 2\sqrt{6}$, 得 $\frac{2b}{2a} = \sqrt{6}$, B 正确; 双曲线 $\frac{y^2}{6} - x^2 = 1$ 与 C 的渐近线

均为 $y = \pm\sqrt{6}x$, C 正确; 由 $\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 - \frac{y^2}{6} = 1, \end{cases}$ 得 $x^2 -$

$\frac{9x^2}{6} = 1$, 即 $-\frac{x^2}{2} = 1$, 此方程无解, 所以直线 $y = 3x$ 上不存在点在 C 上, D 错误. 故选 BC.

11. AB 解析:对于 A, 当 $k = 4$ 时, 曲线 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 2$, 此时曲线 C 表示圆心在原点, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆, 所以 A 正确; 对于 B, 当 $k = 0$ 时, 曲线 C 为双曲线, 其方程为 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = 1$, 可得 $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{2}$, 此时双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 所以 B 正确; 对于 C, 当曲线 C 的方程 $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{6-k} = 1 (k \in \mathbf{R}, k \neq 2, k \neq 6)$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线时, 则满足 $\begin{cases} k-2 > 0, \\ 6-k < 0, \end{cases}$ 解得 $k > 6$, 所以“ $k > 4$ ”是“曲线 C 为焦点在 x 轴上的双曲线”的必要不充分条件, 所以 C 不正确; 对于 D, 当曲线 C 的方程 $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{6-k} = 1$ 表示双曲线, 且离心率为 $\sqrt{2}$ 时, 此

时双曲线的实半轴长等于虚半轴长,此时 $|k-2|=|6-k|$,解得 $k=4$,此时曲线 C 为圆,所以 D 不正确. 故选 AB.

12. ABD 解析:由椭圆 II 的右顶点为椭圆 I 的中心,可得 $2a_2=a_1$,由椭圆 I 与椭圆 II 有公共的左顶点和左焦点,可得 $a_2+c_2=c_1$. 因为 $a_1+c_1=2a_2+a_2+c_2$,且 $a_2>c_2$,所以 $a_1+c_1=2a_2+a_2+c_2>2(a_2+c_2)$,所以 A 正确;因为 $a_1-c_1=2a_2-(a_2+c_2)=a_2-c_2$,所以 B 正确;因为 $a_1c_2=2a_2c_2$, $a_2c_1=a_2(a_2+c_2)=a_2^2+a_2c_2$,所以 $a_1c_2-a_2c_1=2a_2c_2-a_2^2-a_2c_2=a_2(c_2-a_2)<0$,所以 C 错误;因为 $e_1=\frac{c_1}{a_1}=\frac{a_2+c_2}{2a_2}=\frac{e_2+1}{2}$,所以 D 正确. 故选 ABD.

13. 5 解析:由题意,知抛物线的准线方程为 $x=2$,点 A 到准线的距离为 $2-(-3)=5$,因为 AF 的长度等于点 A 到准线的距离,所以 $|AF|=5$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: $A(2,\sqrt{2})$ 是椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1$ 上一点,代入可得, $\frac{4}{m}+\frac{2}{4}=1$,解得 $m=8$, $\therefore c=\sqrt{8-4}=2$, $\therefore F(2,0)$, $\therefore |AF|=\sqrt{(2-2)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{2}$,点 F 到直线 $x=4$ 的距离 $d=2$, $\therefore \frac{|AF|}{d}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 8 解析:设过抛物线的焦点 F 的直线方程为 $x=my+\frac{p}{2}$,与抛物线方程 $y^2=2px(p>0)$ 联立得 $y^2-2pmy-p^2=0$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),y_1>0,y_2<0$,则 $y_1y_2=-p^2$,又因为 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,所以 $y_1=-2y_2$,解得 $y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}p$,所以 $S_{\triangle CBF}=\frac{1}{2}|CF|\times|y_2|=\frac{1}{2}\times p\times\frac{\sqrt{2}}{2}p=4\sqrt{2}$,解得 $p=4$,所以 $2p=8$,所以 T 的通径长为 8.

16. 4 4 解析:因为 $\triangle PQF_2$ 的周长为 16,所以 $\triangle ABF_2$ 的周长为 32. 因为 AB 垂直于 x 轴,所以 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$. 因为 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=32$, $|AF_2|+|BF_2|-|AB|=4a$,所以 $\frac{4b^2}{a}=32-4a$,所以 $b^2=a(8-a)$,所以 $a\in(0,8)$,则 $\frac{b^2}{a+1}=\frac{8a-a^2}{a+1}=-(a+1+\frac{9}{a+1}-10)\leq 4$,当且仅当 $a+1=\frac{9}{a+1}$,即 $a=2$ 时等号成立,所以当双曲线的实轴长为 4 时, $\frac{b^2}{a+1}$ 取得最大值 4.

17. 解:(1)由题意知, $c=1,b=\sqrt{3}$,

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$,

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由已知得 $F_1(-1,0),PF_1\perp x$ 轴,

将 $x=-1$ 代入椭圆 C 的方程得 $y=\pm\frac{3}{2}$,

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|PF_1|=\frac{1}{2}\times 2\times$

$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$,

即 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

18. 解:(1)抛物线的焦点为 $F(\frac{p}{2},0)$,

过点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线方程是 $y=x-\frac{p}{2}$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=x-\frac{p}{2}, \end{cases}$ 得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$,

$\therefore x_1+x_2=3p$,

$\therefore |AB|=x_1+x_2+p=4p$.

(2)由(1)知 $x_1x_2=\frac{p^2}{4},x_1+x_2=3p$,

$\therefore y_1y_2=(x_1-\frac{p}{2})(x_2-\frac{p}{2})=x_1x_2-\frac{p}{2}(x_1+$

$x_2)+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-\frac{3p^2}{2}+\frac{p^2}{4}=-p^2$,

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{p^2}{4}-p^2=-\frac{3p^2}{4}=-3$,

解得 $p^2=4,\therefore p=2$.

$\therefore$ 这条抛物线的方程为 $y^2=4x$.

19. 解:如图所示,以 AB 的中点 O 为原点,AB 所在的直线为 x 轴,建立平面直角坐标系 xOy,

则 $C(3,\sqrt{3}),A(-2,0),B(2,0)$.

连接 AM,AC.

$\therefore |MA|-|MB|=2<|AB|$,

$\therefore$ 点 M 的轨迹是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右支.

$\therefore |MB|+|MC|=|MA|-2+|MC|\geq|AC|-2=2\sqrt{7}-2$,

当 M,A,C 三点共线时等号成立,

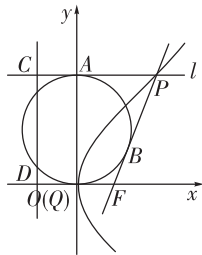
$\therefore a\cdot|MB|+a\cdot|MC|=a(|MB|+|MC|)\geq(2\sqrt{7}-2)a$,

$\therefore$ 修建这两条公路的最低总费用为 $(2\sqrt{7}-2)a$ 万元.

5. D 解析:由题意可设 $A(m, n), B(-m, -n), P(x, y)$, 则 $m^2 - n^2 = 6, x^2 - y^2 = 6$, 即 $y^2 - n^2 = x^2 - m^2$, 即 $\frac{y^2 - n^2}{x^2 - m^2} = 1$. 由 $k_{PA} = \frac{y-n}{x-m}, k_{PB} = \frac{y+n}{x+m}$, 可得 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y^2 - n^2}{x^2 - m^2} = 1$. 又因为 $k_{PA} = 2$, 所以 $k_{PB} = \frac{1}{2}$. 故选 D.

6. A 解析:由题意, 得在双曲线中 $a^2 = (\sqrt{5} - 1)^2, b^2 = m, \therefore c^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 + m$. $\therefore$ 双曲线的实轴长与焦距的比值为黄金分割数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \therefore \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \therefore \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 即 $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}-1)^2 + m} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 解得 $m = 2\sqrt{5} - 2$. 故选 A.

7. B 解析:设抛物线的准线与 x 轴、直线 l 分别交于点 D, C , 圆与直线 l 、直线 PF 分别切于点 A, B , 如图所示. 由抛物线的定义, 知 $|PC| = |PF|$. 由切线性质, 知 $|PA| = |PB|$, 于是 $|AC| = |BF|$. 又 $|AC| = |DQ|, |BF| = |FQ|$, 所以 $|DQ| = |FQ|$, 而 $|DO| = |FO|$, 所以 O, Q 重合, 故选 B.



8. D 解析:由直线 l 与圆 O 没有交点, 得 $\frac{|0+0-4|}{\sqrt{m^2+n^2}} > 2$, 即 $m^2 + n^2 < 4, \therefore$ 点 $P(m, n)$ 在圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 内切于椭圆, $\therefore$ 点 P 是椭圆内的点, $\therefore$ 过点 $P(m, n)$ 的一条直线与椭圆的交点个数为 2. 故选 D.

9. AC 解析:由已知得 $b^2 = c^2 - a^2 = 12$. 当焦点在 x 轴上时, 双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$; 当焦点在 y 轴上时, 双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$. 故选 AC.

10. ACD 解析:易知椭圆 C 关于原点、 x 轴、 y 轴对称. 对于 A 选项, 直线 $y = 2x - 3$ 与直线 l 平行, 且关于原点对称, 则直线 $y = 2x - 3$ 被椭圆 C 截得的弦长为 7, A 选项符合题意; 对于 B 选项, 直线 $y = 2x + 1$ 与直线 l 平行, 直线 $y = 2x + 1$ 被椭圆 C 截

得的弦长大于 7, B 选项不符合题意; 对于 C 选项, 直线 $y = -2x - 3$ 与直线 l 关于 x 轴对称, 则直线 $y = -2x - 3$ 被椭圆 C 截得的弦长为 7, C 选项符合题意; 对于 D 选项, 直线 $y = -2x + 3$ 与直线 l 关于 y 轴对称, 则直线 $y = -2x + 3$ 被椭圆 C 截得的弦长为 7, D 选项符合题意. 故选 ACD.

11. AC 解析:双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为

$$y = \pm \frac{b}{a}x, \text{离心率为 } \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{则 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} =$$

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{3}, \text{所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}, \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{故渐近线方程}$$

$$\text{为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{A 正确, B 错误; 易知 } A(a, 0), \text{取}$$

MN 的中点 P , 连接 AP , 利用点到直线的距离公

$$\text{式可得, } |AP| = \frac{ab}{c}, \text{则 } \cos \angle PAN = \frac{|AP|}{|AN|} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{c}{b}} =$$

$$\frac{a}{c}, \text{所以 } \cos \angle MAN = \cos 2\angle PAN = 2 \times \frac{a^2}{c^2} - 1 =$$

$$\frac{1}{2}, \text{所以 } \angle MAN = 60^\circ, \text{故 C 正确, D 错误. 故}$$

选 AC.

12. BCD 解析:设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), x^2 + y^2 -$

$$2x = 0 \text{ 可化为 } (x-1)^2 + y^2 = 1, \text{所以圆的半径 } r =$$

$$1, \text{圆心 } (1, 0). \text{由 } y^2 = 4x, \text{知焦点 } F(1, 0). \text{当过点}$$

$$F \text{ 的直线的斜率不存在时, 易知 } |PM| = |QN| =$$

$$1, \text{此时 } \frac{1}{|PM|} + \frac{4}{|QN|} = 5. \text{当过点 } F \text{ 的直线的斜}$$

$$\text{率存在时, 可设该直线方程为 } y = k(x-1), \text{代入抛}$$

$$\text{物线方程 } y^2 = 4x \text{ 并消去 } y, \text{得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x +$$

$$k^2 = 0, \text{所以 } x_1 x_2 = 1. \text{由抛物线的定义可知,}$$

$$|PM| + r = x_1 + 1, |QN| + r = x_2 + 1. \text{因为 } r = 1,$$

$$\text{所以 } |PM| = x_1, |QN| = x_2, \text{所以 } |PM| \cdot |QN| =$$

$$x_1 x_2 = 1, \text{故 } \frac{1}{|PM|} + \frac{4}{|QN|} \geq 2\sqrt{\frac{1}{|PM|} \cdot \frac{4}{|QN|}} =$$

$$4, \text{当且仅当 } |QN| = 4|PM| \text{ 时等号成立. 故}$$

$$\text{选 BCD.}$$

13. 1 解析:由题意知 $c = 2$, 即 $c^2 = 4. \therefore b^2 = 3, c^2 = b^2 + a^2, \therefore a^2 = 1$, 又 $a > 0, \therefore a = 1$.

14. 5 (答案不唯一) 解析:由题意 $|FA| = 3, |FB| = 2$. A, B 两点不可能同时是短轴上的两个顶点. 当 F, A, B 三点均在长轴上时, 则 $\begin{cases} a+c=3, \\ a-c=2, \end{cases}$ 解得 $a =$

$$\frac{5}{2}, \text{此时 } |AB| = 2a = 5. \text{当 } F \text{ 与 } A \text{ 均在长轴上, 且}$$

$$\text{分布在 } y \text{ 轴两侧, } B \text{ 在短轴上时, 则}$$

$$\begin{cases} |FB|=a=2, \\ |FA|=a+c=3, \end{cases} \text{ 解得 } a=2, c=1, b^2=a^2-c^2=$$

3, 此时 $|AB|=\sqrt{2^2+3}=\sqrt{7}$. 当 F 与 B 均在长轴上, 且分布在 y 轴同一侧, A 在短轴上时, 则

$$\begin{cases} |FB|=a-c=2, \\ |FA|=a=3, \end{cases} \text{ 解得 } a=3, c=1, b^2=a^2-c^2=$$

8, 此时 $|AB|=\sqrt{3^2+8}=\sqrt{17}$.

15. $x=-\frac{3}{2}$ 解析: 由题易得 $|OF|=\frac{p}{2}$, $|PF|=p$, $\angle OPF=\angle PQF$, 所以 $\tan \angle OPF=\tan \angle PQF$,

所以 $\frac{|OF|}{|PF|}=\frac{|PQ|}{|FQ|}$, 即 $\frac{\frac{p}{2}}{p}=\frac{p}{6}$, 解得 $p=3$, 所以 C 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

16. $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ 解析: $\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 (a>0, b>0)$ 的一条渐近线方程为 $x-2y=0$, $\therefore a=2b$,

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 (b>0)$. 设 $A(x_1, y_1), M(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_1, -y_1)$, 联立

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1, \\ \frac{x_0^2}{4b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1, \end{cases} \text{ 得 } \frac{(x_1+x_0)(x_1-x_0)}{4b^2} =$$

$$\frac{(y_1+y_0)(y_1-y_0)}{b^2}, \therefore \frac{(y_1+y_0)(y_1-y_0)}{(x_1+x_0)(x_1-x_0)} = \frac{1}{4}, \text{ 即}$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4}, \therefore k_2 = \frac{1}{4k_1}. \because k_1 \in [1, 2],$$

$$\therefore k_2 \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right].$$

17. 解: (1) 因为双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 (a>0, b>0)$ 的

离心率为 $\frac{\sqrt{17}}{4}$,

$$\text{所以 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$\text{解得 } \frac{b}{a} = \frac{1}{4}, \text{ 可得 } \frac{a}{b} = 4,$$

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 4x$.

(2) 由抛物线 $D: y^2 = 2px (p>0)$,

可得其准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

代入双曲线 C 的渐近线方程得 $y = \pm 2p$,

则不妨取 $M(-\frac{p}{2}, -2p), N(-\frac{p}{2}, 2p)$,

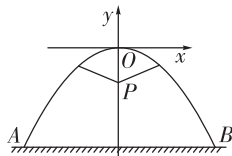
所以 $|MN| = 4p$,

$$\text{则 } S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} \times 4p \cdot p = 8,$$

解得 $p=2$.

所以抛物线 D 的方程为 $y^2 = 4x$.

18. 解: (1) 建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $A(-4, -6), B(4, -6)$,

设抛物线的标准方程为 $x^2 = -2py (p>0)$,

$\because$ 点 B 在抛物线上,

$$\therefore 4^2 = -2p \times (-6), \text{ 解得 } p = \frac{4}{3}.$$

$\therefore$ 抛物线的方程为 $x^2 = -\frac{8}{3}y$.

(2) 易知 $P(0, -2)$,

设 $Q(x, y)$ 为抛物线上设置牵引绳的点,

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{4}{3}y + 4} \quad (-6 \leq y \leq 0).$$

当 $y = -\frac{2}{3}$ 时, $|PQ|$ 取得最小值, 为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore$ 一根牵引绳长度的最小值为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

19. 解: $\because |AB| = 4\sqrt{3}, \triangle ABC$ 的周长为 $4\sqrt{3} + 8$.

$$\therefore |AC| + |BC| = 8 > |AB|,$$

结合题意可知, C 点的轨迹即曲线 Q 是以 A, B 为焦点的椭圆 (不包含椭圆与 x 轴的交点),

设曲线 Q 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0, y \neq 0)$,

易知 $2a=8, 2c=4\sqrt{3}$,

解得 $a=4, c=2\sqrt{3}$,

$$\therefore b^2 = 16 - 12 = 4,$$

$\therefore$ 曲线 Q 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y \neq 0)$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

由题可知 $x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1, \\ \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{4} = 1, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x_1^2 - x_2^2}{16} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{4} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{16} +$$

$$\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{4} = 0,$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = -\frac{1}{2},$$

即直线 l 的斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}$.

由直线的点斜式方程可知, 所求直线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

$$\text{即 } x+2y-4=0.$$

20. 解: (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} y_1^2=3x_1, \\ y_2^2=3x_2, \end{cases}$$

$$\text{两式相减得 } (y_1+y_2)(y_1-y_2)=3(x_1-x_2).$$

因为线段 AB 中点 M 的纵坐标为 1,

$$\text{所以 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3}{2}.$$

$$\text{又 } |AF|+|BF|=x_1+x_2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2},$$

$$\text{所以 } x_1+x_2=2,$$

$$\text{所以线段 } AB \text{ 的中点为 } M(1, 1),$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } y-1=\frac{3}{2}(x-1),$$

$$\text{即 } 3x-2y-1=0.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可设 } l \text{ 的方程为 } y=\frac{3}{2}x+t,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y=\frac{3}{2}x+t, \\ y^2=3x, \end{cases} \text{ 整理得 } y^2-2y+2t=0,$$

$$\text{则 } y_1+y_2=2, y_1y_2=2t.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}, \text{ 且 } l \text{ 与 } x \text{ 轴交于点 } P,$$

$$\text{所以 } y_1=-\frac{1}{3}y_2,$$

$$\text{则 } y_1=-1, y_2=3, x_1=\frac{1}{3}, x_2=3,$$

$$\text{故 } |AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

21. 解: (1) 易知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 (a>0, b>0)$ 的渐近

$$\text{线方程为 } y=\pm\frac{b}{a}x,$$

$$\therefore \text{若双曲线的一条渐近线方程为 } y=x,$$

$$\text{可得 } \frac{b}{a}=1, \text{ 解得 } a=b,$$

$$\text{又 } \because c=\sqrt{a^2+b^2}=2,$$

$$\therefore a=b=\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1.$$

$$(2) \text{ 设 } A \text{ 的坐标为 } (m, n) (m>0, n>0),$$

$$\text{易得直线 } AO \text{ 的斜率为 } \frac{n}{m}=\frac{-1}{-\sqrt{3}}, \text{ 即 } m=\sqrt{3}n,$$

$$\text{易知以点 } O \text{ 为圆心, } c \text{ 为半径的圆的方程为 } x^2+y^2=c^2,$$

$$\therefore m^2+n^2=c^2,$$

$$\text{即 } 3n^2+n^2=c^2,$$

$$\text{则 } n=\frac{c}{2}, m=\frac{\sqrt{3}c}{2},$$

$$\text{将 } \left(\frac{\sqrt{3}c}{2}, \frac{c}{2}\right) \text{ 代入双曲线方程,}$$

$$\text{得 } \frac{\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b^2}=1,$$

$$\text{化简得 } \frac{3}{4}c^2b^2-\frac{1}{4}c^2a^2=a^2b^2,$$

$$\text{将 } b^2=c^2-a^2 \text{ 代入上式,}$$

$$\text{化简整理得 } \frac{3}{4}c^4-2c^2a^2+a^4=0,$$

$$\text{两边同时除以 } a^4, \text{ 整理得 } 3e^4-8e^2+4=0,$$

$$\text{解得 } e^2=\frac{2}{3} \text{ 或 } e^2=2,$$

$$\text{又 } \because \text{双曲线的离心率 } e>1,$$

$$\therefore \text{该双曲线的离心率为 } \sqrt{2}.$$

22. 解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$(1) \text{ 由题意知 } e=\frac{\sqrt{3}}{3}, 2c=2,$$

$$\therefore a=\sqrt{3}, c=1,$$

$$\text{则 } b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1, \\ y=-x+1, \end{cases} \text{ 消去 } y,$$

$$\text{得 } 5x^2-6x-3=0,$$

$$\text{则 } x_1+x_2=\frac{6}{5}, x_1x_2=-\frac{3}{5},$$

$$\therefore |AB|=\sqrt{1+(-1)^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\frac{12}{5}}=\frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

$$(2) \because \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB},$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=0,$$

$$\text{即 } x_1x_2+y_1y_2=0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ y=-x+1, \end{cases} \text{ 消去 } y,$$

$$\text{得 } (a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2(1-b^2)=0,$$

$$\text{则 } \Delta=(-2a^2)^2-4a^2(a^2+b^2)(1-b^2)>0,$$

$$\text{整理得 } a^2+b^2>1,$$

$$\text{又 } x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2+b^2},$$

$$x_1x_2=\frac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2},$$

$$y_1y_2=(-x_1+1)(-x_2+1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1,$$

$$\text{又 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\therefore 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 0,$$

$$\therefore \frac{2a^2(1-b^2)}{a^2+b^2} - \frac{2a^2}{a^2+b^2} + 1 = 0,$$

$$\text{整理得 } a^2 + b^2 - 2a^2 b^2 = 0 \quad ①,$$

$$\text{易知 } b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 e^2 \quad ②,$$

$$\text{将②代入①得 } 2a^2 = 1 + \frac{1}{1-e^2},$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-e^2} \right),$$

$$\therefore e \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right],$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq e^2 \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq 1 - e^2 \leq \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{4}{3} \leq \frac{1}{1-e^2} \leq 2,$$

$$\therefore \frac{7}{6} \leq a^2 \leq \frac{3}{2}, \text{ 满足 } \Delta > 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{42}}{6} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{42}}{3} \leq 2a \leq \sqrt{6},$$

故长轴长的最大值为 $\sqrt{6}$.

期末检测卷

1. C 解析: 斜率 $k = \frac{2-3}{1-4} = \frac{1}{3}$, 故选 C.

2. B 解析: 根据斜率公式有直线 AB 的斜率 $k = \frac{0-t}{-2-0} = \tan 45^\circ = 1$, 解得 $t=2$, 故选 B.

3. C 解析: 由题意可得圆的半径为 1, 则方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 故选 C.

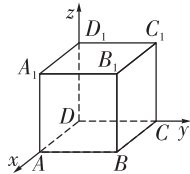
4. C 解析: 由题意 $a^2 = 1$, 则 $c^2 = 1 + b^2$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+b^2} = 2$, $b > 0$, 解得 $b = \sqrt{3}$, 故选 C.

5. A 解析: 对于直线 $l: x - 2y + 2 = 0$, 令 $x=0$, 解得 $y=1=b$; 令 $y=0$, 解得 $x=-2$, 故 $c=2$, $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{5}$, 椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故选 A.

6. C 解析: 由于直线恒过点 $(0, 1)$, 若恒有交点, 所以 $m \geq 1$, 但是当 $m=5$ 时曲线表示的是圆, 故选 C.

7. C 解析: 如图, 以 D 为原点, 分别以 DA, DC, DD₁ 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 D-xyz, 则 D₁(0, 0, 2), C(0, 2, 0), 设 P(x, y, 0) ($x > 0, 0 \leq y \leq 2$), 则 $\overrightarrow{D_1 P} = (x, y, -2)$, $\overrightarrow{PC} = (-x, 2-y, 0)$, 因为 $\overrightarrow{D_1 P} \perp \overrightarrow{PC}$, 所以 $\overrightarrow{D_1 P} \cdot \overrightarrow{PC} = -x^2 +$

$y(2-y) = 0$, 即 $x = \sqrt{2y-y^2}$ ($0 \leq y \leq 2$), 所以 $x \in (0, 1]$, 故选 C.



8. A 解析: 设 $\mathbf{n} = (x, y, 1)$ 是平面 ABC 的一个法向量. $\therefore \overrightarrow{AB} = (-5, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, -2, -1)$,

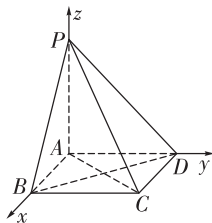
$$\therefore \begin{cases} -5x - y + 1 = 0, \\ -4x - 2y - 1 = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{3}{2}, \end{cases}$$

$\therefore \mathbf{n} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right)$. 又 $\overrightarrow{AD} = (-2, -1, 3)$, 设 AD

与平面 ABC 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} =$

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}, \therefore \theta = 30^\circ, \text{ 故选 A.}$$

9. BCD 解析: 设 AB 长为 a, AD 长为 b, AP 长为 c, 建立如图所示的空间直角坐标系, 即可解决问题, 故选 BCD.



10. BC 解析: 易知 P 点坐标为 $(-1, 2)$, 故以 $P(-1, 2)$ 为圆心, $\sqrt{5}$ 为半径的圆的方程是 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 即 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, 故选 BC.

11. ABD 解析: 对于选项 A, 若 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ 成立, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 即 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 而 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不一定垂直, 所以等式不一定成立; 对于选项 B, 因为 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 不一定相等, 所以等式不一定成立; 对于选项 C, 由向量的运算法则知等式一定成立; 对于选项 D, 只有当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 才存在实数 λ 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 所以等式不一定成立. 故选 ABD.

12. AD 解析: 由题意知 $k_{OP} = \frac{b}{a}$. 因为 $l \perp OP$, 所以

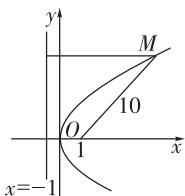
$$k_l = -\frac{a}{b}. \text{ 又 } k_m = -\frac{a}{b}, \text{ 所以 } m \parallel l, \text{ 故选项 A 正确; 选项 B 错误; 因为点 } P(a, b) \text{ 在圆外, 所以 } a^2 + b^2 > r^2, \text{ 所以圆心 } (0, 0) \text{ 到直线 } m \text{ 的距离 } d = \frac{|r^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < \frac{r^2}{r} = r, \text{ 所以直线 } m \text{ 与圆相交, 故选项}$$

C 错误,选项 D 正确. 故选 AD.

- 13.4 解析: 点 M 到圆心 O 的距离 $MO=5$, 则点 M 到圆上点的距离的最小值是 $5-1=4$.

- 14.5 解析: 由两平行线间的距离公式可得 $\left| \frac{a}{2} - 1 \right| = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, 解得 $a=5$ 或 $a=-1$ (舍去), 故 $a=5$.

- 15.9 解析: 因为抛物线 $y^2=4x$ 上的点 M 到焦点的距离为 10, 所以抛物线 $y^2=4x$ 上的点 M 到准线 $x=-1$ 的距离为 10 (如图所示), 所以 M 到 y 轴的距离是 9.



16. $-\frac{1}{12}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD}$ 解析: $\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{AD} + \vec{DE} = -\frac{2}{3}\vec{AM} + \vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{DB} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) + \vec{AD} + \frac{1}{4}(\vec{AB} - \vec{AD}) = -\frac{1}{12}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD}$, 故 $\vec{GE} = -\frac{1}{12}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD}$.

17. 解: $\vec{OG} = \vec{OM} + \vec{MG}$
 $= \vec{OM} + \frac{2}{3}\vec{MN}$
 $= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN})$
 $= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})\right]$
 $= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$
 $= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

18. 解: (1) $\because$ 直线 l 经过点 $P(-2, 5)$, 且斜率为 $-\frac{3}{4}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-5 = -\frac{3}{4}(x+2)$,

即 $3x+4y-14=0$.

(2) 过点 $(2, 2)$ 且与直线 l 垂直的直线方程为 $4x-3y-2=0$,

$$\text{由 } \begin{cases} x+y-11=0, \\ 4x-3y-2=0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=5, \\ y=6, \end{cases}$$

即圆心为 $(5, 6)$, 半径为 $\sqrt{(5-2)^2 + (6-2)^2} = 5$, 故所求圆的方程为 $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$.

19. 解: 如图, 以 B 点为坐标原点, 分别以 BA, BC, BB_1 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $B(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C(0, 2, 0), B_1(0, 0, 2), E(0, 0, 1), A_1(2, 0, 2), C_1(0, 2, 2), F(0, y, 2), O(1, 1, 0)$.

(1) 证明: $\vec{A_1E} = (-2, 0, -1)$,

$\vec{OF} = (-1, y-1, 2)$,

因为 $\vec{A_1E} \cdot \vec{OF} = (-2, 0, -1) \cdot (-1, y-1, 2) = 0$, 所以 $A_1E \perp OF$.

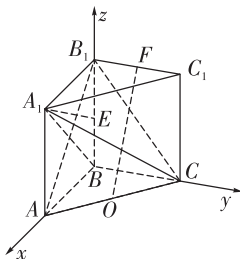
(2) 设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$\because \vec{AB_1} = (-2, 0, 2), \vec{AC} = (-2, 2, 0)$,

求得平面 AB_1C 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 1, 1)$.

又 $\because \vec{EA} = (2, 0, -1)$,

所以点 E 到平面 AB_1C 的距离 $d = \frac{|\vec{EA} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



20. 解: (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 和 $y = x - 2$ 相交,

把两个方程联立, 得 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 8 = 0, \\ y = x - 2. \end{cases}$

代入得到 $x^2 + 2(x-2)^2 - 8 = 0$,

即 $3x^2 - 8x = 0$,

解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3}$.

所以 $y_1 = -2, y_2 = \frac{2}{3}$.

所以 $|AB| = \sqrt{\left(0 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(-2 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$.

(2) 因为点 $F_1(-2, 0)$ 到直线 $y = x - 2$ 的距离为

$d = \frac{|-2-2|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{16}{3}$.

21. 证明: 因为抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

所以经过点 F 的直线 AB 的方程可设为 $x = my + \frac{p}{2}$.

代入抛物线方程, 得 $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 y_1, y_2 是该方程的两根.

$\therefore y_1 y_2 = -p^2$.

∵ $BC \parallel x$ 轴, 且点 C 在准线 $x = -\frac{p}{2}$ 上,

∴ 点 C 的坐标为 $(-\frac{p}{2}, y_2)$.

∴ 直线 OC 的斜率为 $k = \frac{y_2}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1}$,

即 k 也是直线 OA 的斜率.

∴ 直线 AC 经过原点 O .

22. 解: (1) 设 $P(x, y)$, 由椭圆定义可知, 点 P 的轨迹 C 是以 $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ 为焦点, 长半轴为 2 的椭圆.

它的短半轴长 $b = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$.

故曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

其坐标满足 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + 1, \end{cases}$

消去 y 并整理得 $(k^2 + 4)x^2 + 2kx - 3 = 0$.

故 $x_1 + x_2 = -\frac{2k}{k^2 + 4}, x_1 x_2 = -\frac{3}{k^2 + 4}$,

$y_1 y_2 = k^2 x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1$.

若 $OA \perp OB$, 则 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

于是 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = -\frac{3}{k^2 + 4} - \frac{3k^2}{k^2 + 4} - \frac{2k^2}{k^2 + 4} + 1 = 0$.

化简得 $-4k^2 + 1 = 0$,

所以 $k = \pm \frac{1}{2}$.

因为 $\Delta > 0$ 对于任意的 $k \in \mathbf{R}$ 都成立.

故所求 $k = \pm \frac{1}{2}$.