

参考答案

第四章 数列(A卷)

1. A 解析:由题意,得 $\begin{cases} a_1+d+a_1+7d=16, \\ a_1+3d=1, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} a_1=-20, \\ d=7. \end{cases} \text{ 则 } a_6=a_1+5d=-20+35=15, \text{ 故}$$

选 A.

2. C 解析:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\because a_1+a_5=$
 $\frac{1}{2}S_5, \therefore 2a_1+4d=\frac{1}{2}(5a_1+10d)$ ①, $\because a_{11}=20,$

$$\therefore a_1+10d=20 \quad \text{②, 由①②解得 } a_1=-5, d=\frac{5}{2},$$

$$\therefore S_{14}=14a_1+91d=14 \times (-5) + 91 \times \frac{5}{2} = \frac{315}{2}, \text{ 故}$$

选 C.

3. C 解析:由题意,得 $\begin{cases} 2a=b+1, \\ (a+2)^2=3(b+5), \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} a=4, \\ b=7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-2, \\ b=-5 \end{cases} \text{ (舍去), 所以该等差数列的公}$$

差为 $4-1=3$, 故选 C.

4. B 解析:因为 $a_1a_{10}=a_3a_8=9$, 所以 $\log_3 a_1 +$
 $\log_3 a_{10} = \log_3 (a_1 a_{10}) = \log_3 9 = 2$, 故选 B.

5. B 解析:设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d, d \neq 0$, 则

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d, \quad \frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{n + \frac{n(n-1)}{2}d}{2n + \frac{2n(2n-1)}{2}d} =$$

$$\frac{2+(n-1)d}{4+2(2n-1)d} = \frac{dn+2-d}{4dn+4-2d} = k \quad (k \text{ 为常数}), \text{ 则}$$

$(4k-1)dn + (2k-1)(2-d) = 0$, 因为对任意正整

数 n 上式均成立, 所以 $\begin{cases} 4k-1=0, \\ (2k-1)(2-d)=0, \end{cases}$ 所以

$$\begin{cases} k=\frac{1}{4}, \\ d=2, \end{cases} \text{ 则 } b_n=1+2(n-1)=2n-1, \text{ 故选 B.}$$

6. C 解析:由题意,得 $a_4=a_3+2=10, a_5=2a_4=20$,
 故选 C.

7. D 解析:数列 $-1, \frac{8}{5}, -\frac{15}{7}, \frac{24}{9}, \dots$, 即 $-\frac{2^2-1}{3},$

$$\frac{3^2-1}{5}, -\frac{4^2-1}{7}, \frac{5^2-1}{9}, \dots \text{ 的一个通项公式是 } a_n =$$

$$(-1)^n \cdot \frac{(n+1)^2-1}{2n+1} = (-1)^n \frac{n(n+2)}{2n+1}, \text{ 故选 D.}$$

8. D 解析: $\frac{a_4+a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3} = \frac{S_6-S_3}{S_3} = \frac{-36-(-72)}{-72} =$
 $-\frac{1}{2}$, 故选 D.

9. ABC 解析:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_4 =$

$$a_1+3d=-3, S_{12}=12a_1+\frac{12 \times 11}{2}d=24, \text{ 可得}$$

$$a_1=-9, d=2, \therefore a_n=-9+(n-1) \times 2=2n-11.$$

若 $a_i+a_j=0 (i, j \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } 1 \leq i \leq j)$, 则 $a_i+a_j =$

$$2i-11+2j-11=0, \text{ 即 } i+j=11, \therefore i=1, j=10 \text{ 或}$$

$$i=2, j=9 \text{ 或 } i=3, j=8 \text{ 或 } i=4, j=7 \text{ 或 } i=5, j=$$

$$6, \therefore i \text{ 的取值集合是 } \{1, 2, 3, 4, 5\}. \text{ 故选 ABC.}$$

10. BD 解析:由题易知 $a_7+a_8=a_6+a_9 < 0$, 且 $a_7 >$

0, 所以 $a_8 < 0$, 所以公差 $d=a_8-a_7 < 0$, 故数列

$\{a_n\}$ 单调递减, 即选项 B 正确; 选项 A 错误; 因为

$a_7 > 0$ 且 $a_8 < 0$, 所以当 $n=7$ 时, S_n 取得最大值,

故选项 C 错误; 因为 $S_{13} = \frac{13(a_1+a_{13})}{2} = 13a_7 > 0$,

$$S_{14} = \frac{14(a_1+a_{14})}{2} = 7(a_7+a_8) < 0, \text{ 所以当 } S_n < 0$$

时, n 的最小值为 14, 即选项 D 正确. 故选 BD.

11. ACD 解析:当 $n=1$ 时, $S_1=2a_1+1=a_1$, 解得

$$a_1=-1, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n=2a_n+1 \quad \text{①, } S_{n-1}=$$

$$2a_{n-1}+1 \quad \text{②, ①-②得 } a_n=2a_n-2a_{n-1}, \text{ 故 } a_n=$$

$$2a_{n-1}, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 是以 } -1 \text{ 为首项, } 2 \text{ 为公比的}$$

等比数列, 故 C 正确. 易知 $a_n = (-1) \times 2^{n-1} =$

$$-2^{n-1}, S_n = \frac{-1 \times (1-2^n)}{1-2} = 1-2^n. \text{ 则 } a_5 = -16,$$

$$S_5 = 1-2^5 = -31, \text{ 故 A 正确, B 错误. 因为 } S_n =$$

$$1-2^n, \text{ 所以 } S_n-1 = -2^n. \text{ 故 D 正确.}$$

12. ABC 解析: $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n+2 = (\sqrt{a_{n-1}+2} + 1)^2, \therefore \sqrt{a_n+2} =$$

$$\sqrt{a_{n-1}+2} + 1, \therefore \text{ 数列 } \{\sqrt{a_n+2}\} \text{ 是首项为}$$

$$\sqrt{a_1+2}=2, \text{ 公差为 } 1 \text{ 的等差数列, } \therefore \sqrt{a_n+2} =$$

$$2+(n-1) \times 1 = n+1, \therefore a_n = n^2+2n-1, \text{ 故 C 正}$$

确; $\therefore a_2=2^2+2 \times 2-1=7$, 故 A 正确; $\because$ 函数 $y =$

$$x^2+2x-1 \text{ 在 } x > -1 \text{ 时单调递增, } \therefore a_n = n^2 +$$

$$2n-1 \text{ 单调递增, 故数列 } \{a_n\} \text{ 是单调递增数列, 故}$$

B 正确, D 错误. 故选 ABC.

13. 2 解析: $\because 2S_3=3S_2+6, \therefore 2S_3-2S_2=S_2+6,$

$$\therefore 2(S_3-S_2)=a_1+a_2+6, \therefore 2a_3-a_1-a_2=6,$$

$$\therefore (a_3 - a_1) + (a_3 - a_2) = 6, \therefore 2d + d = 3d = 6,$$

$$\therefore d = 2.$$

14. $\frac{36}{13}$ 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 显然 $q \neq$

1. 因为 $a_2 a_8 = 9a_3^2$, 所以 $a_5^2 = 9a_3^2$, 所以 $q^2 = 3$. 因为

$$S_8 - S_4 = \lambda S_6, \text{ 所以 } \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} - \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} =$$

$$\frac{\lambda a_1(1-q^6)}{1-q}. \text{ 所以 } q^4 - q^8 = \lambda(1-q^6), \text{ 所以 } 9 - 81 =$$

$$\lambda(1-27), \text{ 故 } \lambda = \frac{36}{13}.$$

15. 3 解析: $\because a_3 = 2S_2 + 1, a_4 = 2S_3 + 1, \therefore a_4 - a_3 =$

$$2S_3 + 1 - (2S_2 + 1) = 2(S_3 - S_2) = 2a_3, \therefore a_4 =$$

$$3a_3, \therefore q = \frac{a_4}{a_3} = 3.$$

16. 2 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\frac{S_{2\ 022}}{2\ 022} -$

$$\frac{S_{2\ 021}}{2\ 021} = \frac{a_1 + a_{2\ 022}}{2} - \frac{a_1 + a_{2\ 021}}{2} = \frac{a_{2\ 022} - a_{2\ 021}}{2} =$$

$$\frac{d}{2} = 1, \therefore d = 2. \therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的公差 } d = 2.$$

17. 解: (1) 由题易知 $a_n \neq 0$.

当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_n \cdot a_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$ 得,

$$a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}},$$

$$\text{又 } a_1 = 3,$$

$$\text{所以 } a_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\text{同理可得 } a_3 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5},$$

$$a_4 = 2 - \frac{5}{7} = \frac{9}{7}.$$

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_n a_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$ 变形, 得

$$(a_n - 1)(a_{n-1} - 1) = -(a_n - 1) + (a_{n-1} - 1),$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = 1,$$

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是等差数列.

$$\text{又 } \frac{1}{a_1 - 1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{2} + n - 1,$$

$$\text{变形得 } a_n - 1 = \frac{2}{2n - 1},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{2n + 1}{2n - 1}.$$

18. (1) 证明: 因为 $a_{n+1} = 2a_n + 3n - 3$,

$$\text{所以 } a_{n+1} + 3(n+1) = 2a_n + 3n - 3 + 3(n+1) =$$

$$2a_n + 6n = 2(a_n + 3n),$$

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1} + 3(n+1)}{a_n + 3n} = 2,$$

$$\text{即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2,$$

$$\text{又 } b_1 = a_1 + 3 = 2,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

$$(2) \text{解: 由 (1) 可得 } b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\text{所以 } a_n = b_n - 3n = 2^n - 3n,$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = (2^1 + 2^2 + \cdots +$$

$$2^n) - 3 \times (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - 3 \times$$

$$\frac{n(1+n)}{2} = 2^{n+1} - 2 - \frac{3n(1+n)}{2}.$$

19. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} a_3 = S_3, \\ a_2 a_4 = S_4, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} a_1 + 2d = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{5}, \\ d = \frac{16}{5}, \end{cases}$$

$$\therefore a_n = -\frac{8}{5} + \frac{16}{5}(n-1) = \frac{16n-24}{5} (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } S_n = -\frac{8}{5}n + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{16}{5} =$$

$$\frac{8n^2 - 16n}{5},$$

$$\text{由 } S_n > a_n,$$

$$\text{得 } \frac{8n^2 - 16n}{5} > \frac{16n - 24}{5},$$

$$\text{化简得 } n^2 - 4n + 3 > 0,$$

$$\text{解得 } n < 1 \text{ 或 } n > 3,$$

$$\text{又 } n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore n \text{ 的最小值为 } 4.$$

20. (1) 解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = 6, & \text{①} \end{cases}$$

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 30, & \text{②} \\ q \neq 1, \end{cases}$$

$$\frac{\text{②}}{\text{①}}, \text{ 得 } 1 + q^2 = 5,$$

$$\therefore q^2 = 4.$$

又 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数,

$$\therefore q = 2.$$

代入①,得 $a_1 = 2$,

$$\therefore a_n = 2^n.$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

$$(2) \text{证明: 由(1)得, } b_n = \frac{1}{\log_2 2^n \log_2 2^{n+2}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right),$$

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) < \frac{3}{4}.$$

21. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = a_1 a_2$,

因为 $a_1 > 0$,

所以 $a_2 = 2$.

当 $n \geq 2$ 时, $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n$,

因为 $a_n > 0$,

所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$.

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } a_{n+1} - a_{n-1} = 2d = 2,$$

解得 $d = 1$,

$$\text{则 } a_1 = a = 2 - 1 = 1,$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$.

(2) 不存在. 理由如下:

假设存在实数 a , 使得 $\{a_n\}$ 是等比数列.

$$\text{由(1)可知, } a_3 = a_1 + 2 = 2 + a, a_4 = a_2 + 2 = 4.$$

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列,

$$\text{所以 } a_2 a_3 = a_1 a_4,$$

$$\text{即 } 2(2+a) = 4a,$$

解得 $a = 2$,

$$\text{此时 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{2} = 1, \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2, \text{ 不符合题意,}$$

故假设不成立.

故不存在实数 a , 使得 $\{a_n\}$ 是等比数列.

22. (1) 证明: 由 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$,

$$\text{得 } a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n),$$

$$\text{则 } \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 2,$$

$$\text{又 } a_2 - a_1 = 1,$$

所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以1为首项, 2为公比的等

比数列.

$$(2) \text{解: 由(1)得, } a_{n+1} - a_n = 2^{n-1},$$

$$\text{则当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1) + 1 = \frac{1-2^{n-1}}{1-2} + 1 = 2^{n-1}.$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 满足上式,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) 解: 由(2)可知, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列,

$$\text{则 } S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$$

又 $t(1+S_n) \geq 2n-11$ 恒成立,

$$\text{即 } t \geq \frac{2n-11}{S_n+1} = \frac{2n-11}{2^n} \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } b_n = \frac{2n-11}{2^n},$$

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = \frac{2(n+1)-11}{2^{n+1}} - \frac{2n-11}{2^n} = \frac{13-2n}{2^{n+1}},$$

当 $n \leq 6$ 时, $b_{n+1} - b_n > 0$,

即数列 $\{b_n\}$ 单调递增,

当 $n \geq 7$ 时, $b_{n+1} - b_n < 0$,

即数列 $\{b_n\}$ 单调递减,

$$\text{又 } b_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}, b_7 = \frac{3}{2^7} = \frac{3}{128} > \frac{1}{64},$$

$$\text{则 } b_n \text{ 的最大值为 } \frac{3}{128},$$

所以实数 t 的取值范围是 $\left[\frac{3}{128}, +\infty \right)$.

第四章 数 列(B卷)

1. C 解析: 由题意, 得 $a_3 + a_9 + a_{15} + a_{21} = 4a_{12} = 8$, 则 $a_{12} = 2$, 故选C.

2. B 解析: 由题意, 得 $a_3 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_7 = (a_1 \cdot a_9)^2 = 81$, 解得 $a_1 \cdot a_9 = \pm 9$, 又因为 a_1 与 a_9 符号相同, 所以 $a_1 \cdot a_9 = 9$, 故选B.

3. B 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $a_1 = 2$, 则 $a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d = 4 + 3d = 13$, 解得 $d = 3$, 则 $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_1 + 12d = 6 + 36 = 42$, 故选B.

4. D 解析: 由题意, 可得 $a_3 a_4 = a_1 a_6 = 12$, 又 $a_1 + a_6 = 8, a_1 < a_6$, 解得 $a_1 = 2, a_6 = 6$, 则 $q^5 = \frac{a_6}{a_1} = 3$, 所以 $\frac{a_{2017}}{a_{2007}} = q^{10} = 9$, 故选D.

5. A 解析: 令 $m=1$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_1 = \frac{1}{3}$, 故数列 $\{a_n\}$ 是

首项 $a_1 = \frac{1}{3}$, 公比 $q = \frac{1}{3}$ 的等比数列. $S_n = \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n}) < \frac{1}{2}$, 由 $S_n < a$ 恒成立,

则 $a \geq \frac{1}{2}$, 即 a 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 故选 A.

6. A 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且其前 n 项和为 S_n , 所以数列 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, S_{4n} - S_{3n}$ 也为等差数列, 则 $2(S_{2n} - S_n) = S_n + S_{3n} - S_{2n}$, 即 $2(S_{2n} - 4) = 4 + 24 - S_{2n}$, 解得 $S_{2n} = 12$, 则 $S_{4n} - S_{3n} = 2(S_{3n} - S_{2n}) - (S_{2n} - S_n)$, 即 $S_{4n} - 24 = 2(24 - 12) - (12 - 4)$, 解得 $S_{4n} = 40$, 故选 A.

7. A 解析: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 a_2, a_4, a_8 成等比数列, 得 $a_4^2 = a_2 a_8$, 即 $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d) \cdot (a_1 + 7d)$, 即 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 2) \cdot (a_1 + 14)$, 解得 $a_1 = 2$, 则 $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n(n+1)$, 故选 A.

8. C 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则由 $S_3 = a_2 + 10a_1$, 得 $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + 10a_1$, 即 $a_3 = 9a_1$, 则 $q^2 = 9$, 所以 $a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{1}{9}$, 故选 C.

9. AC 解析: 由 $a_3 = a_1 q^2$, 得 $q^2 = 9$, 即 $q = \pm 3$.
 $\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ 或 $a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \times (-3)^{n-1} = (-1)^{n-1} 3^n$. 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 3^n, n \in \mathbf{N}^*$ 或 $a_n = (-1)^{n-1} 3^n, n \in \mathbf{N}^*$.

10. AC 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 则 $a_{2n} = a_1 + (2n-1)d$, 所以 $\frac{a_n}{a_{2n}} = \frac{a_1 + (n-1)d}{a_1 + (2n-1)d}$, 因为 $\frac{a_n}{a_{2n}}$ 是一个与 n 无关的常数, 所以 $a_1 - d = 0$ 或 $d = 0$, 所以 $\frac{a_n}{a_{2n}}$ 可能是 1 或 $\frac{1}{2}$.

11. BC 解析: 因为 $S_{10} = S_{20}$, 所以 $10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 20a_1 + \frac{20 \times 19}{2}d$, 解得 $a_1 = -\frac{29}{2}d$. 所以 $S_n = -\frac{29}{2}dn + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 - 15nd = \frac{d}{2}[(n-15)^2 - 225]$, 对于选项 A, 因为 d 的正负不确定, S_n 不一定有最大值, 故 A 错误; 对于选项 B, $S_{30} = 30a_1 + \frac{30 \times 29}{2}d = 30 \times (-\frac{29}{2}d) + 15 \times 29d = 0$, 故 B 正确; 对于选项 C, $a_{10} + a_{22} = 2a_{16} = 2(a_1 + 15d) = 2(-\frac{29}{2}d + 15d) = d > 0$, 故 C 正确; 对于选项 D,

$a_{10} = a_1 + 9d = -\frac{29}{2}d + \frac{18}{2}d = -\frac{11}{2}d, a_{22} = a_1 + 21d = -\frac{29}{2}d + \frac{42}{2}d = \frac{13}{2}d$, 因为 $d < 0$, 所以 $|a_{10}| = -\frac{11}{2}d, |a_{22}| = -\frac{13}{2}d, |a_{10}| < |a_{22}|$, 故 D 错误.

12. BC 解析: 因为 $a_{n+2} - a_n = -6$, 所以 $2d = -6$, 即 $d = -3$, A 错误; 由 $S_6 = -9$, 得 $6a_1 + \frac{6 \times 5}{2} \times (-3) = -9$, 得 $a_1 = 6$, 所以 $a_n = 6 - 3(n-1) = 9 - 3n$, 当 $a_n = 0$ 时, $n = 3$, 所以 S_n 的最大值为 S_2 或 S_3 , B 正确; $a_2 + a_3 + a_7 + a_8 = 4a_5 = -24$, C 正确; 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n > a_{n+1}$, D 错误. 故选 BC.

13. -21 解析: $S_{21} = (-1+3) + (-5+7) + \dots + (-37+39) - 41 = 2 \times 10 - 41 = -21$.

14. 1 解析: 由题意, 可得 $a+7=8$, 则 $a=1$.

15. 95 解析: 由 $a_4 + a_6 + 2a_{15} = 20$, 得 $2a_5 + 2a_{15} = 20$, 从而得 $a_1 + a_{19} = 10$, 所以 $S_{19} = \frac{19(a_1 + a_{19})}{2} = 95$.

16. 32 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 则 $a_2 a_3 = a_1 a_4 = 8$, 又 $a_1 + a_4 = 9$, 则 $a_1 = 1, a_4 = 8$, $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8$, 则公比 $q = 2$, 所以 $a_6 = a_4 q^2 = 32$.

17. 解: (1) 因为 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列, 所以 $a_n = 3^{n-1}$.

(2) 由 (1) 得, $b_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 9 = 13$, $b_3 = 9$,

则 $b_3 - b_1 = 2d = -4, d = -2$,

所以 $S_n = 13n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 + 14n$.

18. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $a_5 - a_2 = 6$,

所以 $3d = 6$,

解得 $d = 2$.

因为 a_1, a_6, a_{21} 依次成等比数列,

所以 $a_6^2 = a_1 a_{21}$,

即 $(a_1 + 5 \times 2)^2 = a_1(a_1 + 20 \times 2)$,

解得 $a_1 = 5$,

所以 $a_n = 2n + 3$.

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$,

所以 $b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right)$,

$$\text{所以 } S_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \right] = \frac{n}{5(2n+5)},$$

$$\text{令 } \frac{n}{5(2n+5)} = \frac{3}{35},$$

解得 $n=15$.

19. 解: (1) $\because x=(a_{n+1}, -2), y=(1, a_n)$, 且 $x \perp y$,

$$\therefore x \cdot y = 0,$$

$$\text{即 } a_{n+1} - 2a_n = 0,$$

$$\text{即 } a_{n+1} = 2a_n,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,

$\because a_3 + 2$ 是 a_2 与 a_4 的等差中项,

$$\therefore 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4,$$

$$\text{即 } 2 \times (2^2 a_1 + 2) = 2a_1 + 2^3 a_1,$$

解得 $a_1 = 2$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

(2) 由(1)知 $a_n = 2^n$,

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} a_n = \log_{\frac{1}{2}} 2^n = -n,$$

$$\therefore b_n = 13 + 2 \times (-n) = 13 - 2n,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是一个递减数列,

$$\text{且 } b_6 = 13 - 2 \times 6 = 1 > 0,$$

$$b_7 = 13 - 2 \times 7 = -1 < 0,$$

$$\text{故 } S_n \text{ 的最大值为 } S_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36.$$

20. 解: (1) $S_n = 2a_n - 2$ ①,

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = a_1 = 2a_1 - 2,$$

解得 $a_1 = 2$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2 \quad \text{②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2 - (2a_{n-1} - 2),$$

$$\text{即 } a_n = 2a_n - 2a_{n-1},$$

$$\text{即 } a_n = 2a_{n-1},$$

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \text{ 由(1)易得 } S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2,$$

$$\text{因为 } S_m \leq 500,$$

$$\text{所以 } 2^{m+1} - 2 \leq 500,$$

$$\text{即 } 2^{m+1} \leq 502 < 512 = 2^9,$$

$$\text{解得 } m+1 < 9,$$

$$\text{所以 } m < 8,$$

又因为 $m \in \mathbf{N}^*$,

所以 m 的最大值为 7.

21. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{因为 } a_3 + a_6 = 4, S_5 = -5,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2a_1 + 7d = 4, \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = -5, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -5, \\ d = 2. \end{cases}$$

$$\text{则 } a_n = -5 + (n-1) \times 2 = 2n - 7.$$

(2) 由(1)知, 当 $n \leq 3$ 时, $a_n < 0$;

当 $n \geq 4$ 时, $a_n > 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_{10} &= |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{10}| \\ &= (5 + 3 + 1) + (1 + 3 + 5 + \dots + 13) \\ &= 9 + \frac{(1+13) \times 7}{2} \\ &= 58. \end{aligned}$$

22. (1) 证明: 因为 $S_n = 1 + ka_n$, ①

$$\text{则 } S_{n-1} = 1 + ka_{n-1} (n \geq 2), \quad \text{②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } S_n - S_{n-1} = ka_n - ka_{n-1} (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{k}{k-1} a_{n-1}.$$

由已知可得当 $a_n = 0$ 时, $S_n = 1$ 无意义,

所以 $a_n \neq 0$.

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = a_1 = 1 + ka_1,$$

$$\text{所以 } a_1 = \frac{1}{1-k}.$$

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{1-k}$, 公比为 $\frac{k}{k-1}$ 的等比数列.

$$(2) \text{ 解: 因为 } a_1 = \frac{1}{1-k}, q = \frac{k}{k-1},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{1-k} \cdot \left(\frac{k}{k-1} \right)^{n-1} = -\frac{k^{n-1}}{(k-1)^n}.$$

$$(3) \text{ 解: 由(2)易得, 当 } k = -1 \text{ 时, } a_n = \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{则 } a_n^2 = \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

则数列 $\{a_n^2\}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列.

$$\text{故 } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{3}.$$

第五章 一元函数的导数及其应用(A卷)

1. D 解析: 依题意, 得 $s' = -2 + 6t$, 当 $t = 3$ 时, $s' = -2 + 6 \times 3 = 16$, 故选 D.

2. C 解析: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$

$2\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = 2f'(x_0) = 1$, 所以 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 故选 C.

3. D 解析: 由题图可知点 P 的横坐标为 5, 纵坐标 $y = -5 + 8 = 3$, 即 $P(5, 3)$, $\therefore f(5) = 3$, 又 $f'(5) = k = -1$, 则 $f(5) + f'(5) = 2$, 故选 D.

4. D 解析: $(x^2 \cdot \sqrt{x})' = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x}$, 故选 D.

5. A 解析: 设 $P_0(x_0, y_0)$, 由于 $f'(x) = 3x^2 + 1$, 根据题意, 得 $3x_0^2 + 1 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 1$. 当 $x_0 = 1$ 时, $y_0 = 0$; 当 $x_0 = -1$ 时, $y_0 = -4$, 故点 P_0 的坐标为 $(1, 0)$ 或 $(-1, -4)$, 故选 A.

6. B 解析: 由 $y = f(x)$ 是一次函数, 可设 $f(x) = ax + b$ (a, b 为常数), 由 $f(0) = 1, f(1) = -3$, 解得 $a = -4, b = 1$, 故 $f(x) = -4x + 1, f'(x) = -4$, 故选 B.

7. C 解析: 因为 $f'(x) = -x + \frac{b}{x+2} \leq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $b \leq x(x+2)$, 而 $y = x(x+2)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $b \leq -1$, 故选 C.

8. C 解析: 依题意, 得当 $4 < x < 5$ 时, $f'(x) > 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $(4, 5)$ 内是增函数, 故选 C.

9. ABC 解析: $(\ln 2x + \frac{1}{x})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, 故 A 运算错误; $(\cos 1)' = 0$, 故 B 运算错误; $(x^2 e^x)' = (2x + x^2) \cdot e^x$, 故 C 运算错误; $(2^x + 6)' = 2^x \ln 2$, 故 D 运算正确. 故选 ABC.

10. BCD 解析: 若 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 令 $-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$, 无解, 故排除 A; 若 $f(x) = x^3$, 则 $f'(x) = 3x^2$, 令 $3x^2 = \frac{1}{2}$ 得 $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$, 即曲线在点 $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{36})$ 与点 $(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{36})$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, B 正确; 若 $f(x) = x^2$, 则 $f'(x) = 2x$, 令 $2x = \frac{1}{2}$, 得 $x = \frac{1}{4}$, 故曲线在点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, C 正确; 若 $f(x) = -x^2$, 则 $f'(x) = -2x$, 令 $-2x = \frac{1}{2}$, 得 $x = -\frac{1}{4}$, 故曲线在点 $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{16})$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, D 正确. 故选 BCD.

11. AD 解析: 由题意知, 曲线在 $x=0$ 处的切线的倾斜角为锐角即该函数在 $x=0$ 处的导数大于 0. 若 $y = x^3 + x$, 则 $y' = 3x^2 + 1$, 当 $x=0$ 时, $y' = 1 > 0$, 故选项 A 符合题意; 若 $y = x - 2\ln(x+1)$, 则 $y' = 1 - \frac{2}{x+1}$, 当 $x=0$ 时, $y' = -1 < 0$, 故选项 B 不符合题意; 若 $y = (x-2)e^x$, 则 $y' = (x-1)e^x$, 当 $x=0$ 时, $y' = -1 < 0$, 故选项 C 不符合题意; 若 $y = \frac{e^x - 1}{x+1}$, 则 $y' = \frac{xe^x + 1}{(x+1)^2}$, 当 $x=0$ 时, $y' = 1 > 0$, 故选项 D 符合题意. 故选 AD.

12. ABC 解析: ① 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x=1$, $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f(1) = \ln a - 1$. 当 $0 < a < e$ 时, $f(1) < 0$, 选项 B 符合; 当 $a > e$ 时, $f(1) > 0$, 选项 C 符合; 当 $a = e$ 时, $f(1) = 0$, 没有满足要求的图象. ② 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$, 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 选项 A 符合. 故选 ABC.

13. $2x - y + 1 = 0$ 解析: 由题意得, $y' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$, 所以 $y'|_{x=0} = 2$, 所以该曲线的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 0)$, 即 $2x - y + 1 = 0$.

14. 2 解析: 因为 $f'(x) = a + \frac{3}{x^2}$, 所以切线斜率为 $f'(1) = a + 3$. 又 $f(1) = a - 3$, 所以切线方程为 $y - (a - 3) = (a + 3)(x - 1)$, 将点 $(2, 4)$ 代入切线方程, 得 $4 - (a - 3) = (a + 3)(2 - 1)$, 解得 $a = 2$.

15. 15 解析: $\because f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 10, $\therefore f'(1) = 3 + 2a + b = 0$ ①, $f(1) = 1 + a + b + a^2 = 10$ ②, 联立①②得 $a = 4$ 或 $a = -3$, 当 $a = -3$ 时, $b = 3$, 得 $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 没有极值, 舍去, 当 $a = 4$ 时, $b = -11$, 符合题意, $a - b = 15$.

16. $(\frac{1}{e}, 1)$ 解析: $y' = \ln x + 1$, 当 $y' > 0$ 时, 解得 $x > \frac{1}{e}$. 又 $x \in (0, 1)$, $\therefore$ 当 $\frac{1}{e} < x < 1$ 时, 函数 $y = x \ln x$ 为单调增函数, 即所求单调递增区间是 $(\frac{1}{e}, 1)$.

17. 解: 方程 $7x-4y-12=0$ 可化为 $y=\frac{7}{4}x-3$.

当 $x=2$ 时, $y=\frac{1}{2}$,

又 $f'(x)=a+\frac{b}{x^2}$,

$$\text{于是} \begin{cases} 2a-\frac{b}{2}=\frac{1}{2}, \\ a+\frac{b}{4}=\frac{7}{4}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=3, \end{cases}$$

故 $f(x)=x-\frac{3}{x}$.

18. 解: 由 $f(2x+1)=4g(x)$, 得

$$4x^2+2(a+2)x+(a+b+1)=4x^2+4cx+4d.$$

$$\text{于是有} \begin{cases} a+2=2c, & \text{①} \\ a+b+1=4d. & \text{②} \end{cases}$$

由 $f'(x)=g'(x)$, 得

$$2x+a=2x+c \Rightarrow a=c. \quad \text{③}$$

$\therefore$ 由①③可得 $a=c=2$.

由 $f(5)=30$, 得

$$25+10+b=30. \quad \text{④}$$

由④得 $b=-5$,

$$\text{再由②得 } d=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore g(x)=x^2+2x-\frac{1}{2}.$$

$$\text{故 } g(4)=16+8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}.$$

19. 解: 由 $f(x)=x^2+x\sin x+\cos x$, 得

$$f'(x)=x(2+\cos x).$$

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处与直线 $y=b$ 相切,

$$\text{所以 } f'(a)=a(2+\cos a)=0, b=f(a).$$

解得 $a=0, b=f(0)=1$.

20. 解: (1) $f'(x)=xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x=\frac{1}{2}e^xx(x+2)$,

令 $e^xx(x+2)>0$, 得 $x>0$ 或 $x<-2$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2), (0, +\infty)$;

令 $e^xx(x+2)<0$, 得 $-2<x<0$,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2, 0)$.

(2) 令 $f'(x)=0$, 得 $x=-2$ 或 $x=0$,

$\therefore x=-2, x=0$ 分别为 $f(x)$ 的极大值点和极小值点.

$$\because f(-2)=\frac{2}{e^2}, f(2)=2e^2, f(0)=0,$$

$$\therefore f(x) \in [0, 2e^2],$$

$$\therefore m>2e^2.$$

21. 解: 设长方体的宽为 x m, 则长为 $2x$ m, 高为 $h=$

$$\frac{18-12x}{4}=(4.5-3x)\text{m} \left(0<x<\frac{3}{2}\right).$$

故长方体的体积为 $V(x)=2x^2 \cdot (4.5-3x)=$

$$9x^2-6x^3 \left(0<x<\frac{3}{2}\right).$$

$$V'(x)=18x \cdot (1-x),$$

$$\text{令 } V'(x)=0,$$

解得 $x=1$ 或 $x=0$ (舍去).

当 $0<x<1$ 时, $V'(x)>0$;

当 $1<x<\frac{3}{2}$ 时, $V'(x)<0$,

故在 $x=1$ 处 $V(x)$ 取得极大值, 且为最大值,

$$V_{\max}(x)=V(1)=3(\text{m}^3).$$

$\therefore$ 当长方体的长为 2 m, 宽为 1 m, 高为 1.5 m 时, 体积最大, 最大体积为 3 m^3 .

22. 解: (1) 由题意, 得 $f'(x)=e^x-m$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率 $k=1-m$,

$$\text{又 } f(0)=1-n,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-(1-n)=(1-m)x$,

将点 $(1, 0)$ 代入得 $m+n=2$.

(2) 当 $n=0$ 时, 函数 $f(x)=e^x-mx$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f'(x)=e^x-m.$$

因为 $x \geq -1$,

$$\text{所以 } e^x \geq \frac{1}{e}.$$

① 当 $m \leq \frac{1}{e}$ 时,

$f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增,

从而 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{1}{e}+m$, 无最大值;

② 当 $m > \frac{1}{e}$ 时, 由 $f'(x)=e^x-m=0$,

解得 $x=\ln m \in (-1, +\infty)$,

当 $x \in [-1, \ln m)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x \in (\ln m, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

从而 $f(x)_{\min}=f(\ln m)=m-m\ln m$,

无最大值.

第五章 一元函数的导数及其应用(B卷)

1. C 解析: $s' = t^2 - 12t + 32$, 令 $s' = 0$, 得 $t = 4$ 或 $t = 8$, 故选 C.
2. A 解析: 因为 $y' = e^x + a = 0$ 有大于零的实根, 所以由 $a = -e^x$ 和 $x > 0$, 得 $a < -1$, 故选 A.
3. D 解析: 由于 $f'(x) = 3x^2 - 2$, 故有 $\tan \theta = f'(1) = 1$, 解得切线倾斜角 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 故选 D.
4. A 解析: 由题意可知, ①②③④均错误. 故选 A.
5. B 解析: 因为 $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$, 故 $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, 故 $f'(3) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, 故所求切线方程为 $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, 化简得 $x + 2y - 7 = 0$, 故选 B.
6. A 解析: 由 $f'(x)$ 的图象知, 当 $x < -2$ 和 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $-2 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. 在 $x = -2$ 处, 函数取得极小值; 在 $x = 0$ 处, 函数取得极大值, 综上所述 A 合适, 故选 A.
7. D 解析: 由 $y = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + (b+2)x + 3$ 得 $y' = x^2 + 2bx + b + 2$. 又因为函数在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数, 所以有 $y' \geq 0$ 恒成立, 则有 $\Delta = 4b^2 - 4(b+2) \leq 0$, 解得 $-1 \leq b \leq 2$, 故选 D.
8. B 解析: 由 $f(x) = (x^2 + 2ax - a^2 - 3a + 3)e^x$, 得 $f'(x) = (x^2 + 2ax + 2x - a^2 - a + 3)e^x$, $\therefore x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, $\therefore f'(1) = (6 - a^2 + a)e = 0$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -2$, 当 $a = -2$ 时, $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x \geq 0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 单调递增, 无极值点, 舍去; 当 $a = 3$ 时, $f'(x) = (x^2 + 8x - 9)e^x = 0$ 时, $x = 1$ 或 $x = -9$, 满足 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, $\therefore a = 3$.
9. AD 解析: 当 $x < -3$ 时, $y = xf'(x) > 0$, 即 $f'(x) < 0$; 当 $-3 < x < 3$ 时, $f'(x) \geq 0$; 当 $x > 3$ 时, $f'(x) < 0$. $\therefore f(x)$ 的极大值是 $f(3)$, $f(x)$ 的极小值是 $f(-3)$.
10. ABC 解析: 由题意, 得 $f'(x) = -3x^2 + 2ax - 1 \leq 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立, 则 $\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0$, 解得 $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$.
11. AD 解析: 由题意, 得 $f'(x) = \frac{x-3}{3x} (x > 0)$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 3$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 3$; 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 3$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上单调递减, 在区间 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(3) = 1 - \ln 3 < 0$, 又 $f(1) = \frac{1}{3} > 0$,

$f(e) = \frac{e}{3} - 1 < 0$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{3e} + 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 内无零点, 在区间 $(1, e)$ 内有零点.

12. ACD 解析: 对于 A, $f'(x) = 2x$, 由 $x^2 = 2x$, 得 $x = 0$ 或 $x = 2$, 有“巧值点”; 对于 B, $f'(x) = -e^{-x}$, $-e^{-x} = e^{-x}$ 无解, 无“巧值点”; 对于 C, $f'(x) = \frac{1}{x}$, 方程 $\ln x = \frac{1}{x}$ 有解, 有“巧值点”; 对于 D, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 由 $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$, 得 $x = -1$, 有“巧值点”.

13. 1 解析: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$, 故 $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1) \cdot (x-3)$, 故函数在 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $[1, 3]$ 上单调递减, 则函数的极大值为 $g(1) = 1 - 6 + 9 - 10 = -6 < 0$, 函数的极小值为 $g(3) = 27 - 54 + 27 - 10 = -10 < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故函数共有 1 个零点.

14. -12 解析: 由题意, 得 $f'(x) = 2f'(2) + 3x^2$, $\therefore f'(2) = 2f'(2) + 12$, $\therefore f'(2) = -12$.

15. 3 解析: $y' = -3x^2 + a$, 由题意, 得 $-3x^2 + a \leq 0$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq 3x^2$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 据此可得 $a \leq 3$, 即 a 的最大值是 3.

16. $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a$ 或 $x = -a (a > 0)$. $\therefore$ 当 $x = -a$ 时, $f(x)$ 取到极大值; 当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取到极小值. $\therefore f(-a) = (-a)^3 - 3a^2(-a) + a = a(2a^2 + 1)$, 当 $a > 0$ 时, $f(-a) > 0$. 而 $f(a) = a^3 - 3a^2 \cdot a + a = a(-2a^2 + 1) < 0$, 则 $\begin{cases} a > 0, \\ -2a^2 + 1 < 0, \end{cases}$ 解得 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore a > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

17. 解: (1) $f'(x) = \frac{a}{x} + 2x$,

因为直线 $2x + y - 4 = 0$ 的斜率为 -2, 且过点 $(1, 2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(1) = 2, \\ f'(1) = -2, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1 - 3b = 2, \\ a + 2 = -2, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -4, \\ b = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$(2) \text{由(1)知 } y = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3},$$

$$\text{则 } y' = x^2.$$

设切点为 (x_0, y_0) ,

$$\text{则切线斜率 } k = y'|_{x=x_0} = x_0^2,$$

$$\text{故切线方程为 } y - \frac{x_0^3}{3} - \frac{4}{3} = x_0^2(x - x_0).$$

由切线过点 $(2, 4)$,

$$\text{代入可解得 } x_0 = 2 \text{ 或 } x_0 = -1,$$

$\therefore$ 切点为 $(2, 4)$ 或 $(-1, 1)$,

$$\text{则切线方程为 } 4x - y - 4 = 0 \text{ 或 } x - y + 2 = 0.$$

$$18. \text{解: (1) } \because f(x) = x^3 + ax^2 - 9x - 1,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9 = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - 9 - \frac{a^2}{3},$$

$$\text{即当 } x = -\frac{a}{3} \text{ 时, } f'(x) \text{ 取得最小值 } -9 - \frac{a^2}{3}.$$

因斜率最小的切线与 $12x + y = 6$ 平行,

所以切线的斜率为 -12 .

$$\therefore -9 - \frac{a^2}{3} = -12,$$

$$\text{即 } a^2 = 9, \text{ 解得 } a = \pm 3,$$

由题设 $a < 0$,

$$\text{所以 } a = -3.$$

$$(2) \text{由(1)知 } a = -3,$$

$$\text{因此 } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 3.$$

$$\text{当 } f'(x) > 0 \text{ 时, } x \in (-\infty, -1) \text{ 或 } x \in (3, +\infty),$$

故 $f(x)$ 为增函数;

$$\text{当 } f'(x) < 0 \text{ 时, } x \in (-1, 3),$$

故 $f(x)$ 为减函数.

$$19. \text{解: (1) 由题意, 得 } f'(x) = 6x^2 - 2ax, f'(1) = 0,$$

$$\text{则 } a = 3.$$

$$\text{则 } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4, f'(x) = 6x(x-1),$$

$$\text{当 } x \in (-\infty, 0) \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f'(x) < 0;$$

$$\text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

(2) 当 $x \in [-1, 2]$ 时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如

表所示:

x	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	8

当 $x = -1$ 时,

$$f(-1) = 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4 = -1;$$

当 $x = 1$ 时,

$$f(1) = 2 - 3 + 4 = 3,$$

所以当 $x \in [-1, 2]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 -1 .

$$20. \text{解: (1) } \because f'(x) = 3x^2 - 6,$$

$$\therefore f'(2) = 6.$$

$$(2) f'(x) = 3(x^2 - 2),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2},$$

$$\text{当 } x < -\sqrt{2} \text{ 或 } x > \sqrt{2} \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \text{ 时, } f'(x) < 0,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调递增区间是 } (-\infty, -\sqrt{2}),$$

$$(\sqrt{2}, +\infty),$$

$$\text{单调递减区间是 } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$\therefore \text{当 } x = -\sqrt{2} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得极大值为 } f(-\sqrt{2}) =$$

$$5 + 4\sqrt{2},$$

$$\text{当 } x = \sqrt{2} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得极小值为 } f(\sqrt{2}) = 5 - 4\sqrt{2}.$$

$$(3) \text{令 } g(x) = f(x) - a,$$

$$\text{则 } g'(x) = f'(x),$$

$$\text{由(2)可得 } g(x) \text{ 的极大值为 } 5 + 4\sqrt{2} - a,$$

$$\text{极小值为 } 5 - 4\sqrt{2} - a,$$

$$\therefore g(x) = 0 \text{ 有 3 个不同的实根,}$$

$$\text{故 } \begin{cases} 5 + 4\sqrt{2} - a > 0, \\ 5 - 4\sqrt{2} - a < 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 5 - 4\sqrt{2} < a < 5 + 4\sqrt{2},$$

$\therefore$ 当 $5 - 4\sqrt{2} < a < 5 + 4\sqrt{2}$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = f(x)$ 的图象有 3 个不同的交点,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(5 - 4\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2})$.

$$21. \text{解: (1) } f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \geq$$

$$-\frac{3}{4},$$

$$\text{由 } f'(x) \geq m \text{ 恒成立, 可得 } m \leq -\frac{3}{4},$$

即 m 的最大值为 $-\frac{3}{4}$.

$$(2) f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x-2)(x-1),$$

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > 2$ 或 $x < 1$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < 2$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

$$\therefore f(x)_{\text{极大值}} = f(1) = \frac{5}{2} - a,$$

$$f(x)_{\text{极小值}} = f(2) = 2 - a.$$

$\therefore f(x)$ 恰有一个零点,

$$\therefore \frac{5}{2} - a < 0 \text{ 或 } 2 - a > 0, \text{ 即 } a < \frac{5}{2} \text{ 或 } a > \frac{5}{2}.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

22. 解: (1) $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3$.

由题意, 得 $f'(3) = 0$,

$$\text{即 } 27 + 3 - 6a = 0,$$

解得 $a = 5$.

$$\text{于是 } f'(x) = 3x^2 - 10x + 3.$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{3} \text{ 或 } x = 3.$$

随着 x 的变化, $f'(x)$, $f(x)$ 在 $[1, 5]$ 上的变化情况如下表:

x	1	(1, 3)	3	(3, 5)	5
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-1	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	15

由表可知, $f(x)$ 在 $[1, 5]$ 上的最大值为 15.

(2) 由 (1), 可得 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$ 在 $[1, 5]$ 上的最小值 $f(x)_{\min} = f(3) = -9$.

由题意, $f(x)$ 在 $[1, 5]$ 上的最小值 $f(x)_{\min} < -2b^2 + b - 8$.

$$\text{所以 } -9 < -2b^2 + b - 8,$$

$$\text{即 } 2b^2 - b - 1 < 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < b < 1.$$

故所求实数 b 的取值范围为 $-\frac{1}{2} < b < 1$.

第六章 计数原理(A 卷)

1. A 解析: 由题意, 可得 $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$,

$$12C_n^2 = 12 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 6n(n-1), \text{ 则 } n(n-1)(n-$$

$$2) = 6n(n-1), \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3, \text{ 解得 } n = 8. \text{ 故选 A.}$$

2. B 解析: 5 本书任意排列, 有 A_5^5 种排法, 其中 a 在 b 的左边和 a 在 b 的右边是等可能的, 其排法数目是一样的, 所以 a 排在 b 的左边一共有 $\frac{1}{2} A_5^5 = 60$ (种) 排法. 故选 B.

3. C 解析: 由题意, 二项式 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = (-1)^k \cdot C_{10}^k x^{\frac{20-3k}{2}}$, 可得展开式中每一项的系数为 $(-1)^k \cdot C_{10}^k$, 要使得系数最大, 结合组合数的性质, 可得当且仅当 $k = 4$ 或 $k = 6$ 时, 即第 5 项系数 C_{10}^4 等于第 7 项的系数 C_{10}^6 , 且最大.

4. A 解析: x 的奇数次幂项的系数之和为 $\frac{(a+1)(1-1)^4 - (a-1)(1+1)^4}{2} = 32 \Rightarrow a = -3$.

5. D 解析: 依题意可知, 多项式的每一项都可看作 $C_5^k (2x+1)^{5-k} \cdot (-1)^k$, 故该多项式为 $[(2x+1) - 1]^5$ 的展开式, 化简 $[(2x+1) - 1]^5 = (2x)^5 = 32x^5$. 故选 D.

6. D 解析: 按两个班共选择活动项数分三类: 第一类: 两个班共选择两项活动, 有 A_6^2 种方法; 第二类: 两个班共选择三项活动, 有 $C_2^1 A_6^3$ 种方法; 第三类: 两个班共选择四项活动, 有 A_6^4 种方法, 则活动安排方案的种数为 $A_6^2 + C_2^1 A_6^3 + A_6^4 = 630$. 故选 D.

7. B 解析: 由题意, 从 20 名同学中选派 3 人, 共有 C_{20}^3 种不同的选法. 又要求每科竞赛都有人参加, 而且每人只能参加一科竞赛, 则可分为两类: 第一类: 2 人参加数学竞赛, 1 人参加物理竞赛, 共有 $C_3^2 = 3$ 种不同的选法; 第二类: 1 人参加数学竞赛, 2 人参加物理竞赛, 共有 $C_3^1 = 3$ 种不同的选法. 综上可得, 不同的选派方式共有 $(3+3) \cdot C_{20}^3 = 6 \cdot C_{20}^3$ 种.

8. B 解析: 根据题意, 设所求的行数为 n , 则存在正整数 k , 使得连续三项 $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$, 有 $\frac{C_n^{k-1}}{C_n^k} = \frac{3}{4}$ 且 $\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{4}{5}$, 化简得 $\frac{k}{n-k+1} = \frac{3}{4}$ 且 $\frac{k+1}{n-k} = \frac{4}{5}$, 解得 $k = 27, n = 62$, 故第 62 行会出现满足条件的三个相邻的数. 故选 B.

9. ABC 解析: 选项 A, $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^6$ 的展开式中含 x^3 的项为 $C_6^3 (x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{ax}\right)^3$, 所以 $C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3 = -160$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 故 A 正确; 由 A 知 $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^6$

$\left(\frac{1}{ax}\right)^6 = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$, 令 $x=1$, 得所有项的系数之和为 $(1-2)^6=1$, 故 B 正确; 选项 C, 二项式系数之和为 $2^6=64$, 故 C 正确; 选项 D, $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$ 的常数项为 $C_6^2(x^2)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^4 = 2^4 C_6^2 = 240$, 故 D 错误.

10. AC 解析: 对于 A, 先将 A, B 排列, 再看成一个元素和剩余的 3 人, 一共 4 个元素进行全排列, 由分步乘法计数原理可知共有 $A_2^2 A_4^1 = 48$ 种排法, 所以 A 正确; 对于 B, 先将 A, B 之外的 3 人全排列, 产生 4 个空, 再将 A, B 两元素插空, 所以共有 $A_3^3 A_4^2 = 72$ 种排法, 所以 B 不正确; 对于 C, 5 人全排列, 而其中 A 在 B 的左边和 A 在 B 的右边是等可能的, 所以 A 在 B 的左边的排法有 $\frac{1}{2} A_5^5 = 60$ 种, 所以 C 正确; 对于 D, 对 A 分两种情况: 一类 A 站在最右边, 则剩下的 4 人全排列, 有 A_4^4 种排法, 另一类是 A 不在最左边也不在最右边, 则 A 从中间的 3 个位置中任选 1 个, 然后 B 从除最右边的 3 个位置中任选 1 个, 最后剩下 3 人全排列即可, 由分类加法计数原理可知共有 $A_4^1 + A_3^1 A_3^1 A_3^3 = 78$ 种排法, 所以 D 不正确.

11. ABD 解析: 对于 A 选项, 每位教研员有三所学校可以选择, 故不同的调研安排方案有 $3^5 = 243$ (种), 故 A 正确; 对于 B, C 选项, 若每所重点高中至少去一位教研员, 则可先将五位教研员分组, 再分配, 五位教研员的分组形式有两种: 3, 1, 1, 2, 2, 1, 分别有 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 10$ (种), $\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$ (种) 分组方法, 故不同的调研安排方案有 $(10+15) \times A_3^3 = 150$ (种), 故 B 正确, C 错误; 对于 D 选项, 将甲、乙两位教研员看成一人, 则每所重点高中至少去一位教研员, 且甲、乙两位教研员去同一所高中的调研安排方案有 $\left(C_3^2 C_1^1 + \frac{C_3^1 C_2^2 C_1^1}{A_2^2}\right) \times A_3^3 = 36$ (种), 则甲、乙两位教研员不去同一所高中的调研安排方案有 $150 - 36 = 114$ (种), 故 D 正确. 故选 ABD.

12. BC 解析: 令 $x=1$, 得 $(1+ax^2)\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为 $(1+a)\left(\frac{2}{1}-1\right)^6 = 1+a$, 解得 $a=2$, 所以选项 A 错误; 二项式 $\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \left(\frac{2}{x}\right)^{6-k} \cdot$

$(-x)^k = 2^{6-k} \cdot (-1)^k C_6^k x^{2k-6}$, 令 $2k-6=0$, 解得 $k=3$, 令 $2k-6=-2$, 解得 $k=2$. 于是 $(1+2x^2) \cdot \left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $2^{6-3} \times (-1)^3 C_6^3 + 2 \times 2^{6-2} \times (-1)^2 C_6^2 = -160 + 480 = 320$, 所以选项 B 正确; $(1+2x^2)\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式中所有项的系数的绝对值的和与 $(1+2x^2) \cdot \left(\frac{2}{x}+x\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和相等, 在 $(1+2x^2)\left(\frac{2}{x}+x\right)^6$ 中, 令 $x=1$, 得 $(1+2) \times \left(\frac{2}{1}+1\right)^6 = 3^7 = 2187$, 所以选项 C 正确; 由 $(1+2x^2)$ 及 $\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式可知 $(1+2x^2) \cdot \left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式按 x 的升幂排列时第 2 项的系数为含 x^{-4} 项的系数, 令 $2k-6=-6$, 得 $k=0$, 令 $2k-6=-4$, 得 $k=1$, 则含 x^{-4} 项的系数为 $2 \times 2^6 \times (-1)^0 \times C_6^0 + 2^5 \times (-1)^1 \times C_6^1 = -64$, 所以选项 D 错误.

13. -140 解析: $\left(\frac{1}{2}-4x\right)^7$ 的展开式中含有 x^3 的项为 $C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 (-4x)^3 = -140x^3$, 则 x^3 的系数为 -140.

14. 90 解析: 先选三个不同场馆中只去一名志愿者的, 共有 $C_3^1 \cdot C_5^1 = 15$ 种选法, 剩下的两个场馆只需各取两名志愿者, 共有 $C_4^2 \cdot C_2^2 = 6$ 种选法, 由分步乘法计数原理得分配方案有 $15 \times 6 = 90$ 种.

15. -448 1094 解析: 由 $f(x) = (2x-3)^n$ 的展开式的二项式系数和为 128, 可得 $2^n = 128$, $\therefore n=7$. $\therefore (2x-3)^7 = [-1+2(x-1)]^7 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_7(x-1)^7$, $\therefore a_6 = -C_7^1 2^6 = -448$. 在 $(2x-3)^7 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_7(x-1)^7$ 中, 令 $x=2$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = 1$, ①, 令 $x=0$, 可得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_7 = -3^7 = -2187$, ② ①-②再除以 2 得 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 1094$.

16. 30 解析: 因为 $(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$, 所以 a_3 是含 x^3 项的系数. 若从 10 个 $(1+x-x^2)$ 式子中取 0 个 $(-x^2)$, 则需从中取出 3 个 x , 7 个 1, 得到的项为 $C_{10}^0 (-x^2)^0 C_{10}^3 \cdot x^3 C_7^7 1^7 = 120x^3$; 若从 10 个 $(1+x-x^2)$ 式子中取 1

个 $(-x^2)$,则需从中取出1个 x ,8个1,得到的项为 $C_{10}^1(-x^2)C_9^8xC_8^81^8=-90x^3$;若从10个 $(1+x-x^2)$ 式子中取出大于或等于2个 $(-x^2)$,则无法得到 x^3 的项,综上,含 x^3 的项为 $120x^3-90x^3=30x^3$,则含 x^3 项的系数为30,即 $a_3=30$.

17. 解:(1)所有不同选法种数,就是从6名同学中抽出3名的组合数,

所以共有 $C_6^3=\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=20$ (种)选法.

(2)根据题意,分两步进行分析:

①从6名同学中选出3名同学,且其中至少有1名女同学,包括1名女同学2名男同学和2名女同学1名男同学两种情况,

所以有 $C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1=12+4=16$ (种)选法;

②将这3名同学分别安排在周五、周六和周日进行宣讲,则有 $A_3^3=6$ (种)情况.

综上,共有 $16 \times 6=96$ (种)选法.

18. 解:(1)二项式 $(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)的展开式的通

项为 $T_{k+1}=C_n^k(\sqrt{x})^{n-k}(-\frac{1}{2x})^k=C_n^k(-\frac{1}{2})^k \cdot x^{\frac{n-3k}{2}}$ ($k=0,1,\dots,n$).

由前三项的系数和为 $\frac{7}{4}$,

得 $1+(-\frac{1}{2}) \times C_n^1+(-\frac{1}{2})^2 \times C_n^2=\frac{7}{4}$,

化简得 $n^2-5n-6=0$,

解得 $n=6$ ($n=-1$ 舍去),

所以 n 的值为6.

(2)由(1)得二项式 $(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})^6$ 的展开式的通项

为 $T_{k+1}=C_6^k(-\frac{1}{2})^k x^{\frac{6-3k}{2}}$ ($k=0,1,\dots,6$).

令 $k=0,2,4,6$,得展开式中含 x 的整数次幂的所有项为 $T_1=x^3, T_3=\frac{15}{4}$,

$T_5=\frac{15}{16}x^{-3}, T_7=\frac{1}{64}x^{-6}$.

19. 解:(1) $\because A_n^5=56C_n^7$,

$\therefore n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=56 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$,

整理可得 $\frac{(n-5)(n-6)}{90}=1$,

即 $n^2-11n-60=0$,

故 $(n-15)(n+4)=0$,

解得 $n=15$ 或 $n=-4$ (舍去),

在 $(1-3x)^{15}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_{15}x^{15}$ 中,

令 $x=0$,得 $a_0=1$.

(2) $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\dots+|a_{15}|$ 等价于 $(1+3x)^{15}$ 的展开式的各项系数和,

在 $(1+3x)^{15}$ 的展开式中,令 $x=1$,可得

$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\dots+|a_{15}|=(1+3)^{15}=4^{15}$.

20. 解:(1)编号为1,2,3,4,5的五个小球放入编号为1,2,3,4,5的五个盒子中,没有一个盒子空着有 A_5^5 种方法,

球的编号与盒子的编号全相同的有1种,

利用间接法可知满足题意的投放方法有 $A_5^5-1=119$ (种).

(2)分为三类:

第一类,五个球的编号与盒子的编号完全相同的投放方法有1种;

第二类,三个球的编号与盒子的编号相同,投放方法有 C_5^3 种,剩余的球的编号与盒子的编号不同的投放方法有1种,

所以投放方法有 $C_5^3 \times 1=10$ (种);

第三类,两个球的编号与盒子的编号相同,投放方法有 C_5^2 种,剩余的球的编号与盒子的编号不同的投放方法有2种,

所以投放方法有 $C_5^2 \times 2=20$ (种).

根据分类加法计数原理得,所有的投放方法有 $1+10+20=31$ (种).

21. 解:6人全排列有 A_6^6 种,6人排好后包括两端共有7个“间隔”可以插入空位.

(1)空位不相邻相当于将4个空位安插在上述7个“间隔”中的4个,有 C_7^4 种插法,

故空位不相邻的坐法有 $A_6^6 \times C_7^4=25\,200$ (种).

(2)将相邻的3个空位当作一个元素,另一空位当作另一个元素,安插在7个“间隔”中的2个,有 A_7^2 种插法,

故4个空位中只有3个相邻的坐法有 $A_6^6 \times A_7^2=30\,240$ (种).

(3)4个空位至多有2个相邻的情况有三类:

①4个空位各不相邻有 C_7^4 种插法;

②4个空位中有2个相邻,另有2个不相邻有 $C_7^2C_5^2$ 种插法;

③4个空位分两组,每组都有2个相邻,

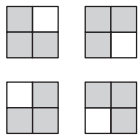
有 C_7^2 种插法.

综上, 有 $A_6^6 \times (C_7^4 + C_7^3 C_6^2 + C_7^2) = 115\,920$ (种) 坐法.

22. 解: (1) $91^{100} = (90+1)^{100} = C_{100}^0 \cdot 90^{100} + C_{100}^1 \cdot 90^{99} + C_{100}^2 \cdot 90^{98} + \cdots + C_{100}^{99} \cdot 90 + C_{100}^{100} \cdot (90)^0$.
 $\therefore$ 除了 $C_{100}^{100} \cdot (90)^0 = 1$ 以外, 其他项都能被 100 整除, 1 除以 100 可得余数为 1,
 $\therefore 91^{100}$ 除以 100 的余数是 1.
 (2) ① 令 $x=0$, 得 $a_0=1$.
 令 $x=1$, 得 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}=-2^6$, ($*$)
 $\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}=-65$.
 ② 令 $x=-1$, 可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{11}=0$,
 上式与 $*$ 式相加, 可得 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=-32$.

第六章 计数原理(B 卷)

1. C 解析: 由分类加法计数原理知, 不同的选法种数为 $3+4+2=9$. 故选 C.
 2. C 解析: 根据题意知 $C_n^2 = C_n^6$, 则 $n=2+6=8$. 故选 C.
 3. C 解析: 当该“伞数”十位数字是 4 时, 个位数字和百位数字只能是 1, 2, 3 中的两个, 所以所有可能的情况有 $A_3^2=6$ (种). 故选 C.
 4. C 解析: 根据分步乘法计数原理, 展开后的项数为 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. 故选 C.
 5. A 解析: 因为抛掷三枚完全相同的骰子的情况有 $6 \times 6 \times 6 = 216$ (种), 抛出“夹七”或“夹八”的情况有 $C_3^1 + C_3^2 = 6$ (种), 所以抛出“夹七”或“夹八”走法的概率 $P = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. 故选 A.
 6. D 解析: 每一个“田”字里可以画出 4 个“L”形图案, 如图. 因为 5×6 的方格纸内共有 $4 \times 5 = 20$ 个“田”字, 所以可以画出 $20 \times 4 = 80$ 个“L”形图案. 故选 D.



7. D 解析: 由题意, 知 $C_n^{n-1} + C_n^n = n+1 = 7$, 故 $n=6$,
 所以第 4 项的二项式系数最大, 于是 $C_6^3 \sin^3 x = \frac{5}{2}$,
 所以 $\sin^3 x = \frac{1}{8}$, 即 $\sin x = \frac{1}{2}$, 又 $x \in [0, \pi]$, 所以

$x = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

8. C 解析: 原来 n 个车站有 A_n^2 种车票, 新增了 m 个车站, 有 A_{n+m}^2 种车票, 由题意得 $A_{n+m}^2 - A_n^2 = 62$, 即 $(m+n)(m+n-1) - n(n-1) = 62$, 整理得 $2mn + m^2 - m = 62$, $\therefore n = \frac{31}{m} - \frac{m-1}{2}$. $\therefore m > 1, n > 0$,
 $\therefore \frac{31}{m} > \frac{m-1}{2}$, $\therefore m^2 - m - 62 < 0$, 解得 $1 < m < \frac{1+\sqrt{249}}{2}$, 即 $1 < m \leq 8$. 当 $m=3, 4, 5, 6, 7, 8$ 时, n 均不为整数, 只有当 $m=2$ 时, $n=15$ 符合题意,
 $\therefore m+n=17$, 故现在有 17 个车站. 故选 C.
 9. BC 解析: 对于 A, $n \cdot A_{n-1}^{n-1} = n \cdot (n-1)! = n!$; 对于 B, $A_n^m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{n!}{(n-m)! m!} \neq n!$; 对于 C, $A_{n+1}^{n+1} = (n+1)!$; 对于 D, $A_n^m \cdot A_{n-m}^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot (n-m)! = n!$. 故选 BC.
 10. ABD 解析: 二项式 $(2x - \sqrt{2})^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (-\sqrt{2})^r (2x)^{5-r}$, 则当 $r=0, 2, 4$ 时, 系数为有理数, 故系数为有理数的项有第一项、第三项、第五项. 故选 ABD.
 11. ACD 解析: $(2x-3)^9 = [-1+2(x-1)]^9$, 其展开式的通项为 $T_{r+1} = C_9^r (-1)^{9-r} [2(x-1)]^r = (-1)^{9-r} 2^r C_9^r \cdot (x-1)^r$. 当 $r=2$ 时, $T_3 = (-1)^7 2^2 C_9^2 (x-1)^2 = -144(x-1)^2$, 故 $a_2 = -144$, A 正确; 当 $r=0$ 时, $T_1 = (-1)^9 2^0 C_9^0 \cdot (x-1)^0 = -1$, 故 $a_0 = -1$, B 错误; $\frac{a_r}{2^r} = (-1)^{9-r} \cdot C_9^r$, 则 $[-1+(x-1)]^9 = \frac{a_0}{2^0} + \frac{a_1}{2^1}(x-1) + \frac{a_2}{2^2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{a_9}{2^9}(x-1)^9$, 故当 $x=2$ 时;
 $\frac{a_0}{2^0} + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_9}{2^9} = 0$, 又 $a_0 = -1$, 则 $\frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_9}{2^9} = 1$, C 正确; 当 $x=0$ 时, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_8 - a_9 = (-3)^9 = -3^9$, D 正确. 故选 ACD.
 12. ACD 解析: 对于 A, 不同的安排方法种数为 $A_3^3 \times A_4^4 = 144$, 故 A 正确; 对于 B, 不同的安排方法种数为 $A_3^3 \times A_3^3 \times 2 = 72$, 故 B 错误; 对于 C, 采用间接法, 6 人的面试顺序的不同安排方法种数为 A_6^6 , 由 A 选项知, 3 名女生的面试顺序连续时, 共

有 144 种不同的安排方法,所以 3 名女生的面试顺序不连续时,不同的安排方法种数为 $A_6^3 - 144 = 576$,故 C 正确;对于 D,采用间接法,6 人的面试顺序的不同安排方法种数为 A_6^6 ,男生甲在第一个面试和男生乙在最后一个面试的不同安排方法种数均为 A_5^5 ,男生甲在第一个面试且男生乙在最后一个面试的不同安排方法种数为 A_4^4 ,则符合条件的安排方法种数为 $A_6^6 - A_5^5 - A_5^5 + A_4^4 = 504$,故 D 正确. 故选 ACD.

13. 10 解析:先在编号为 2,3 的箱子中分别放入 1 个、2 个足球,再将剩下的 6 个足球排成一行,插入两个隔板把它们分成三部分,方法种数为 $C_5^2 = 10$,故所求不同的放法有 10 种.

14. 165 解析: $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2 = C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2 = C_4^3 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_{10}^2 = C_{10}^3 + C_{10}^2 = C_{11}^3 = 165$.

15. 10 解析:依题意,第一个格子必须为黑色,则从左往右数,不管数到哪个格子,总有黑色格子不少于白色格子包含的情况有:①全染黑色,有 1 种方法;②第一个格子染黑色,另外 4 个格子中有 1 个染白色,剩余的都染黑色,有 $C_4^1 = 4$ 种方法;③第一个格子染黑色,另外四个格子中有 2 个染白色,剩余的都染黑色,有 $C_4^2 + C_3^2 = 5$ 种方法,所以满足题意的染色方法有 $1 + 4 + 5 = 10$ (种).

16. $\frac{4}{3}$ 解析:因为 $(\frac{1}{3}ax^2 - \frac{1}{3}bx - 1)(x-1)^3 = \frac{1}{3}ax^2(x-1)^3 - \frac{1}{3}bx(x-1)^3 - (x-1)^3$, $(x-1)^3$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_3^k x^{3-k} \cdot (-1)^k$,所以 $\frac{1}{3}a \cdot C_3^2 \cdot (-1)^2 - \frac{1}{3}b \cdot C_3^1 \cdot (-1)^1 - C_3^0 = 2$,即 $a+b=3$. 因为 $a>0, b>0$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \cdot \frac{a+b}{3} = \frac{1}{3}(2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}) \geq \frac{1}{3}(2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}) = \frac{4}{3}$,当且仅当 $a=b=\frac{3}{2}$ 时,等号成立.

17. 解:(1) $f(4) = A_8^3 - 10A_4^3 = 8 \times 7 \times 6 - 10 \times 4 \times 3 \times 2 = 336 - 240 = 96$.
(2) 由 $A_{2n}^3 = 10A_n^3$,
得 $2n(2n-1)(2n-2) = 10n(n-1)(n-2)$,
又 $n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*$,
所以 $2(2n-1) = 5(n-2)$,

解得 $n=8$.

18. 解:(1)依题意首先从 1,3,5 中选 1 个数字排在个位,有 C_3^1 种排法,再将其余 4 个数字全排列,有 A_4^4 种排法,

故没有重复数字且为奇数的五位数的个数为 $C_3^1 A_4^4 = 72$.

(2)依题意首先将 1,3,5 三个数全排列,有 A_3^3 种排法,再将 2 和 4 插入所形成的 4 个空中,有 A_4^2 种排法,

故没有重复数字且 2 和 4 不相邻的五位数的个数为 $A_3^3 A_4^2 = 72$.

19. 解:(1)因为这个点为第二象限内的点,所以该点的横坐标小于 0,纵坐标大于 0. 先选横坐标,有 3 种情况,再选纵坐标,也有 3 种情况,

根据分步乘法计数原理,可得位于第二象限的不同点的个数为 $3 \times 3 = 9$.

(2)若点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的内部(不含边界),则 $|x| < 2, |y| < 2$.

方法一:若 $x = -1$,则 $y = -1$ 或 $y = 1$,共 2 种情况;

若 $x = 0$,则 $y = -1$ 或 $y = 1$,共 2 种情况;

若 $x = 1$,则 $y = -1$ 或 $y = 1$,共 2 种情况.

根据分类加法计数原理,可得在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内部(不含边界)的不同点的个数为 $2 + 2 + 2 = 6$.

方法二: x 从 $-1, 0, 1$ 中选一个,有 3 种选法, y 从 $-1, 1$ 中选一个,有 2 种选法.

根据分步乘法计数原理,可得在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内部(不含边界)的不同点的个数为 $3 \times 2 = 6$.

20. 解:根据既会制版又会印刷的 2 人中被选出的人数,可将问题分为三类:

第一类:既会制版又会印刷的 2 人选中 0 人,即从只会制版的 3 人选中 2 人,有 3 种选法,只会印刷的 2 人全被选出,有 1 种选法,由分步乘法计数原理知有 $3 \times 1 = 3$ 种选法.

第二类:既会制版又会印刷的 2 人选中 1 人,有 2 种选法.

若此人去制版,则再从只会制版的 3 人选中 1 人,有 3 种选法,只会印刷的 2 人全被选出,有 1 种选法,由分步乘法计数原理知有 $2 \times 3 \times 1 = 6$ 种选法;

若此人去印刷,则再从只会印刷的 2 人选中 1 人,

有 2 种选法,从只会制版的 3 人中选 2 人,有 3 种选法,由分步乘法计数原理知有 $2 \times 2 \times 3 = 12$ 种选法.

由分类加法计数原理知有 $6 + 12 = 18$ 种选法.

第三类:既会制版又会印刷的 2 人中选 2 人,若此 2 人都去印刷,有 3 种选法;若此 2 人都去制版,有 1 种选法;若此 2 人中 1 人去制版,1 人去印刷,有 $2 \times 3 \times 2 = 12$ 种选法.

由分类加法计数原理知有 $3 + 1 + 12 = 16$ 种选法.所以不同的安排方法种数总共为 $3 + 18 + 16 = 37$.

21. 解: (1) $\because T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} \times 2^k$,

$$\therefore a_0 = 2^n, a_1 = n \times 2^{n-1},$$

$$a_2 = \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{n-2}.$$

$$\therefore a_0 + a_2 = 2a_1,$$

$$\therefore 2n \times 2^{n-1} = 2^n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{n-2},$$

$$\therefore n^2 - 9n + 8 = 0,$$

解得 $n = 8$ 或 $n = 1$ (舍去).

(2) 在 $(x+2)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$ 中,

令 $x = 1$, 则 $3^8 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 + a_8$,

令 $x = -1$, 则 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_7 + a_8$,

两式相减得 $2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 3^8 - 1$,

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{3^8 - 1}{2} = 3280,$$

即展开式中所有含 x 奇次幂项的系数和为 3280.

22. 解: (1) 根据题意得 $C_m^1 + C_n^1 = 7$,

即 $m + n = 7$. ①

$$f(x) \text{ 的展开式中 } x^2 \text{ 的系数为 } C_m^2 + C_n^2 = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{m^2 + n^2 - m - n}{2}.$$

将①变形为 $n = 7 - m$ 代入上式,

$$\text{得 } x^2 \text{ 的系数为 } m^2 - 7m + 21 = \left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{35}{4},$$

故当 $m = 3, n = 4$ 或 $m = 4, n = 3$ 时, x^2 的系数取得最小值 9.

当 $m = 3, n = 4$ 时, x^3 的系数为 $C_3^3 + C_4^3 = 5$;

当 $m = 4, n = 3$ 时, x^3 的系数为 $C_4^3 + C_3^3 = 5$.

即此时 x^3 的系数为 5.

$$(2) f(0.003) = (1 + 0.003)^4 + (1 + 0.003)^3 \approx C_4^0 + C_4^1 \times 0.003 + C_4^2 \times 0.003^2 + C_3^0 + C_3^1 \times 0.003 \approx 2.02.$$

第七章 随机变量及其分布

1. C 解析: 由公式可得 $P(AB) = P(A)P(B|A) =$

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}. \text{ 故选 C.}$$

2. B 解析: 因为取到白球时停止, 所以最少取球次数为 1, 即第一次就取到了白球; 最多次数是 7, 即把所有的黑球取完之后才取到白球. 所以取球次数可以是 $1, 2, 3, \dots, 7$. 故选 B.

3. A 解析: 从这些零件中任取 3 个全部都是二等品的概率为 $\frac{C_4^3}{C_{20}^3}$, 故至少有 1 个是一等品的概率为 $1 - \frac{C_4^3}{C_{20}^3}$. 故选 A.

4. D 解析: 因为 $X \sim B\left(20, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $P(X = k) = C_{20}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{20-k} = C_{20}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$, 由组合数的性质可知, 当 $k = 10$ 时 C_{20}^k 最大, 此时 $P(X = k)$ 取得最大值, 故选 D.

5. C 解析: 记“甲的爵位等级比乙高”为事件 A, “甲、乙两人爵位相邻”为事件 B, 用数组 (x_1, x_2) 表示可能的结果, x_1 是甲的爵位, x_2 是乙的爵位, 事件 A 包含 10 个样本点: (公, 侯), (公, 伯), (公, 子), (公, 男), (侯, 伯), (侯, 子), (侯, 男), (伯, 子), (伯, 男), (子, 男), 事件 AB 包含 4 个样本点: (公, 侯), (侯, 伯), (伯, 子), (子, 男), 则 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 故选 C.

6. B 解析: 由题可知 $n(A) = 4 \times 5 \times 5 = 100$, 由 a, b, c 组成的三位正整数为三位递增数, 则从 0, 1, 2, 3, 4 五个数字中任选三个从左到右按大小排列即可, 共有 $C_5^3 = 10$ 种可能, 故 $n(AB) = 10$, $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. 故选 B.

7. B 解析: 每个坑需要补种的概率为 $\left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, 设 9 个坑中需要补种的个数为 Y, $Y \sim B\left(9, \frac{1}{27}\right)$, 所以 $E(Y) = 9 \times \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$, 故 $E(X) = E(12Y) = 12 \times \frac{1}{3} = 4$ (元). 故选 B.

8. D 解析: 随机变量 ξ 满足 $P(\xi = 0) = 1 - p$, $P(\xi = 1) = p$, 其中 $0 < p < 1$, 则随机变量 ξ 的分布列如表 1 所示, 则 $E(\xi) = p$, $D(\xi) = p(1 - p)$. 随机变量 $\eta = |\xi - E(\xi)|$, 所以当 $\xi = 0$ 时, $\eta = |\xi - E(\xi)| = p$, 当 $\xi = 1$ 时, $\eta = |\xi - E(\xi)| = 1 - p$, 所以随机变量 $\eta =$

$|\xi - E(\xi)|$ 的分布列如表 2 所示(当 $p = \frac{1}{2}$ 时, η 只有一种情况, 概率为 1), 则 $E(\eta) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$, $D(\eta) = [p - 2p(1-p)]^2 \cdot (1-p) + [1-p - 2p(1-p)]^2 \cdot p = p(1-p) \cdot (2p-1)^2$, 当 $E(\xi) = E(\eta)$, 即 $p = 2p(1-p)$ 时, 解得 $p = \frac{1}{2}$, 所以 A, B 错误; $D(\xi) - D(\eta) = p(1-p) - p(1-p)(2p-1)^2 = 4p^2(1-p)^2 > 0$ 恒成立, 所以 C 错误, D 正确, 故选 D.

表 1

ξ	0	1
P	$1-p$	p

表 2

η	p	$1-p$
P	$1-p$	p

9. ABD 解析: 游客数、接听电话数、汽车车辆数的取值都是随机的自然数, 满足题意; 水位数的可能取值充满了某个区间, 不能一一列举, 故不是离散型随机变量, 不满足题意. 故选 ABD.

10. ACD 解析: $P(B|A) + P(\bar{B}|A) = \frac{P(AB) + P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$, 故选项 A 正确, 选项 B 错误; 若 A, B 独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$, 故选项 C 正确; 若 A, B 互斥, 则 $P(AB) = 0$, 则根据条件概率公式得 $P(B|A) = P(A|B) = 0$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

11. BC 解析: 因为 $0.1 + m + 0.6 = 1$, 所以 $m = 0.3$. 因为 $0.3 + 0.4 + n = 1$, 所以 $n = 0.3$. 所以 $m + n = 0.6$, 故 A 错误. 甲项目收益的均值 $E(X) = (-1) \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.6 = 1.1$, 方差 $D(X) = (-1 - 1.1)^2 \times 0.1 + (0 - 1.1)^2 \times 0.3 + (2 - 1.1)^2 \times 0.6 = 1.29$, 乙项目收益的均值 $E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$, 方差 $D(Y) = (0 - 1)^2 \times 0.3 + (1 - 1)^2 \times 0.4 + (2 - 1)^2 \times 0.3 = 0.6$, 所以 $E(X) > E(Y)$, $D(X) > D(Y)$, 则投资乙项目收益的均值较小, 投资甲项目比投资乙项目的风险高, 故 B, C 正确, D 错误. 故选 BC.

12. AC 解析: $f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{200}}$, 故 $\mu = 100$, $\sigma^2 = 100$, 故 A 正确, B 错误; $P(x > 120) = P(x < 80) > P(x < 70)$, 故 C 正确; 根据正态密度曲线的对称性知, $P(100 < x < 110) = P(90 < x <$

$100) > P(80 < x < 90)$, 故 D 错误. 故选 AC.

13. $\frac{1}{2}$ 解析: 依题意 $P(A) = \frac{5}{9}$, $P(AB) = \frac{C_3^1 C_1^1}{C_8^3 C_8^1} = \frac{20}{72}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}$.

14. $\frac{2}{3}$ 解析: 因为 $P(X=1) = 2P(X=0)$, 所以 $P(X=1) + P(X=0) = 3P(X=0) = 1$, 所以 $P(X=0) = \frac{1}{3}$, 所以 $P(X=1) = \frac{2}{3}$.

15. 0.49 解析: 由 $\frac{1}{5} + n + \frac{3}{10} = 1$, 得 $n = \frac{1}{2}$. $\therefore E(X) = 1.1$, $\therefore 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{2} + m \times \frac{3}{10} = 1.1$, 得 $m = 2$. $\therefore D(X) = (0 - 1.1)^2 \times \frac{1}{5} + (1 - 1.1)^2 \times \frac{1}{2} + (2 - 1.1)^2 \times \frac{3}{10} = 0.49$.

16. 4 解析: 每 5 分钟算作一轮, 每一轮甲同学出现在直播屏幕上的概率为 $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$. 设一节课中甲同学在直播屏幕上出现的轮次为 X , 根据题意 $X \sim B(8, \frac{1}{10})$, $E(X) = 8 \times \frac{1}{10} = 0.8$. 设甲同学一节课在直播屏幕上出现的时间为 Y , 则 $E(Y) = E(5X) = 5 \times 0.8 = 4$.

17. 解: $\therefore E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 3$,

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} = 11,$$

$$D(X) = (1-3)^2 \times \frac{1}{5} + (2-3)^2 \times \frac{1}{5} + (3-3)^2 \times \frac{1}{5} + (4-3)^2 \times \frac{1}{5} + (5-3)^2 \times \frac{1}{5} = 2,$$

$$\therefore E(X^2 + 4X + 4) = E(X^2) + 4E(X) + 4 = 11 + 4 \times 3 + 4 = 27,$$

$$D(2X-1) = 4D(X) = 8.$$

18. 解: (1) 用 A 表示事件“选到经常参加体育锻炼的学生”, B 表示事件“选到男生”, 则在已知选到的学生是男生的情况下, 他经常参加体育锻炼的概率为 $P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} =$

$$\frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

(2)由(1),易得在已知选到的学生经常参加体育锻炼的情况下,他是男生的概率为 $P(B|A) =$

$$\frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}.$$

19. 解:(1)从6名班干部中任选3人参加学校的义务劳动,总的选法有 $C_6^3 = 20$ (种),

男生甲或女生乙被选中的选法有 $C_2^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^1 = 12 + 4 = 16$ (种),

所以男生甲或女生乙被选中的概率为 $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.

(2)男生甲被选中的概率为 $P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{1}{2}$,

男生甲、女生乙都被选中的概率为 $P(AB) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$,

所以在男生甲被选中的情况下,女生乙被选中的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{5}$.

20. 解:(1)由题意可知, $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$,

则 $P(X=k) = C_3^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} (k=0,1,2,3)$,

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

(2)小球落入 A 袋的概率 $P(A) = P(X=0) +$

$$P(X=3) = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{1}{3},$$

小球落入 B 袋的概率 $P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

所以小球落入 A 袋和落入 B 袋的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$.

21. 解:(1)设甲在校运动会实心球比赛中获得优秀奖为事件 A .

因为比赛成绩达到 9.50 m 以上(含 9.50 m)的同学将获得优秀奖,

甲以往的比赛成绩中达到 9.50 m 以上(含 9.50 m)的有 9.80 m, 9.70 m, 9.55 m, 9.54 m, 共 4 个,

所以甲在校运动会实心球比赛中获得优秀奖的概率 $P(A) = 0.4$.

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

由(1)知,甲在校运动会实心球比赛中获得优秀奖的概率 $P(A) = 0.4$.

设乙、丙在校运动会实心球比赛中获得优秀奖分别为事件 B, C ,

则 $P(B) = 0.5, P(C) = 0.5$.

$$P(X=0) = (1-0.4) \times (1-0.5) \times (1-0.5) = 0.15,$$

$$P(X=1) = 0.4 \times (1-0.5) \times (1-0.5) + (1-0.4) \times 0.5 \times (1-0.5) + (1-0.4) \times (1-0.5) \times 0.5 = 0.4,$$

$$P(X=2) = 0.4 \times 0.5 \times (1-0.5) + 0.4 \times (1-0.5) \times 0.5 + (1-0.4) \times 0.5 \times 0.5 = 0.35,$$

$$P(X=3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.5 = 0.1,$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times 0.15 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.1 = 1.4.$$

(3)在校运动会实心球比赛中,按以往比赛成绩的平均数、方差来看,甲获得冠军的概率估计值最大;按以往比赛的最好成绩来看,丙获得冠军的概率估计值最大.

22. 解:因为 $X \sim N(65, 4.84)$,

所以 $\mu = 65, \sigma = 2.2$,

所以 $\mu + 3\sigma = 71.6$,

所以 $73 \in (\mu + 3\sigma, +\infty)$,

$$\text{所以 } P(X > 71.6) = \frac{1 - P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)}{2} \approx$$

$$\frac{1 - 0.9973}{2} = 0.00135.$$

因为 0.00135 远小于 $\frac{1}{20}$,

所以此事件应为小概率事件,而质检员随机抽检 20 袋该种零食时,测得 1 袋零食的质量为 73 g,说明小概率事件确实发生了,因此他立即要求停止生产,检查设备的决定有道理.

(2)①因为 $\mu = 65, \sigma = 2.2$,

$$\text{所以 } \mu - \sigma = 62.8, \mu + 2\sigma = 69.4,$$

由题意可知当零食质量 X 满足 $\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$ 时为合格品,

$$\text{所以这种零食的合格率为 } \frac{0.6827 + 0.9545}{2} = 0.8186 \approx 0.819.$$

②由题意可知 $Y \sim B(n, 0.819)$,

$$\text{则 } E(Y) = 0.819n > 58,$$

$$\text{则 } n > \frac{58}{0.819} \approx 70.82,$$

故 n 的最小值为 71.

第八章 成对数据的统计分析

1. B 解析:人的身高与视力之间不具有相关关系,故 B 错误. 故选 B.

2. A 解析:因为 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.1x + 2$, $0.1 > 0$, 所以变量 x 与 y 正相关, 又变量 y 与 z 负相关, 所以 x 与 z 负相关. 故选 A.

3. C 解析:依题意, $\bar{x} = 2 + \frac{m}{5}$, $\bar{y} = 9$, 因此 $9 = 5\left(2 + \frac{m}{5}\right) - 7$, 解得 $m = 6$. 故选 C.

4. B 解析:由样本数据可得 $\bar{x} = \frac{5+6.5+7+8+8.5}{5} = 7$, $\bar{y} = \frac{3+4+6+8+9}{5} = 6$, $\therefore$ 样本点的中心为 $(7, 6)$. $\therefore$ 经验回归直线必过样本点的中心, $\therefore$ 点 $(7, 6)$ 处的残差为 0. 故选 B.

5. D 解析:对于 A, 应该是 $|r|$ 越大, 两个变量的线性相关性越强, 故 A 错误; 对于 B, 样本点可能全部不在经验回归直线上, 故 B 错误; 对于 C, (x_1, y_1) 的残差只是表示这一点的残差, 与其他点的残差无关, 故 C 错误; 对于 D, 当 $r = 1$ 时, 样本数据具有确定的函数关系, 故样本点都在经验回归直线上, 故 D 正确. 故选 D.

6. B 解析: $\because \bar{x} = 5.5, \bar{y} = 0.25, \therefore \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = -23.75, \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 17.5, \therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} = -\frac{23.75}{17.5} \approx -1.4, \therefore \hat{a} = 0.25 - (-1.4) \times 5.5 = 7.95$. 故选 B.

7. D 解析:由题意可知, y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.21x + 3.217$, A 选项, 第 8 日的预测水位是 $\hat{y} = 0.21 \times 8 + 3.217 = 4.897 \in [4.7, 5.1)$, 将启动黄色预警, A 错误; B 选项, 第 10 日的预测水位是 $\hat{y} = 0.21 \times 10 + 3.217 = 5.317 \in [5.1, 5.6)$, 将启动橙色预警, B 错误; C 选项, 第 11 日的预测水位是 $\hat{y} = 0.21 \times 11 + 3.217 = 5.527 \in [5.1, 5.6)$, 将启动橙色预警, C 错误; D 选项, 第 12 日的预测水位是 $\hat{y} = 0.21 \times 12 + 3.217 = 5.737 > 5.6$, 将启动红色预警, D 正确. 故选 D.

8. B 解析:由题意 $\bar{x} = \frac{1}{6} \times (9 + 9.2 + 9.4 + 9.6 + 9.8 + 10) = 9.5, \bar{y} = \frac{1}{6} \times (100 + 94 + 93 + 90 + 85 +$

$$78) = 90, \text{ 所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \bar{x}^2} =$$

$$\frac{5116 - 6 \times 90 \times 9.5}{0.7} = -20, \text{ 所以 } \hat{a} = 90 + 9.5 \times$$

$20 = 280$, 则 $\hat{y} = -20x + 280$. 设工厂的利润为 L 元, 则 $L = (x - 5)(-20x + 280) = 20(x - 5) \cdot (-x + 14) \leq 20 \times \left(\frac{x-5+14-x}{2}\right)^2 = 405$, 当且仅当 $x - 5 = 14 - x$, 即 $x = 9.5$ 时等号成立, 所以当 $x = 9.5$ 时, 工厂的利润最大, 为 405 元. 故选 B.

9. ABC 解析:根据题意, 逐项分析如下:

选项	正误	原因
A	✓	$\bar{x} = \frac{2+3+4+5}{4} = 3.5$, 则 $\bar{y} = 0.7 \times 3.5 + 1.05 = 3.5$, 又 $\bar{y} = \frac{2.5+3+m+4.5}{4} = \frac{10+m}{4}$, 故 $\frac{10+m}{4} = 3.5$, 则 $m = 4$.
B	✓	由 A 选项知样本点的中心为 $(3.5, 3.5)$, 经验回归直线必过该点.
C	✓	由 $\hat{y} = 0.7x + 1.05$, 知 x, y 呈现正相关.
D	✗	当 $x = 10$ 时, $\hat{y} = 0.7 \times 10 + 1.05 = 8.05$.

10. AC 解析:根据题意, 逐项分析如下:

选项	正误	原因
A	✓	由图可知两变量呈现正相关, 故 $r_1 > 0, r_2 > 0$, 去掉“离群点”后, 相关性更强, 所以 $r_1 < r_2, R_1^2 < R_2^2$, 故 A 正确, B 错误.
B	✗	
C	✓	根据题图, 知当去掉 F 点后, 经验回归直线会略向 x 轴倾斜, 故其斜率会变小, 因此可判断 $0 < \hat{b} < 0.68$, 故 C 正确, D 错误.
D	✗	

11. AC 解析:设这 100 名学生中学习效率高的人数为 n , 由题意有 $\frac{n}{100} = 0.4$, 得 $n = 40$. 因为 A 高中的前 50 名学生中有 30 名学习效率高, 所以 A 高中的前 50 名学生中有 $\frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$ 的学生学习

效率高,故选项 A 正确;B 高中的前 50 名学生中有 $40-30=10$ 名学习效率高,所以 B 高中的前 50 名学生中有 $\frac{10}{50} \times 100\% = 20\%$ 的学生学习效率高,故选项 B 不正确;根据以上数据得到以下列表:

单位:人

学校	学习效率		合计
	高	不高	
A 高中	30	20	50
B 高中	10	40	50
合计	40	60	100

$\chi^2 = \frac{100 \times (30 \times 40 - 20 \times 10)^2}{40 \times 60 \times 50 \times 50} \approx 16.667 > 10.828$, 所以根据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验,认为“学生学习效率高与晚上睡眠是否充足有关”,故选项 C 正确,选项 D 不正确. 故选 AC.

12. CD 解析:对于 A,去除前变量 x 每增加 1 个单位,变量 y 大约增加 2 个单位,A 错误;对于 B,由 $\bar{x} = 3$,得 $\bar{y} = 2 \times 3 + 1 = 7$,则 $\sum_{i=1}^6 x_i = 6\bar{x} = 18$, $\sum_{i=1}^6 y_i = 6\bar{y} = 42$,去除样本数据(8,12)后,剩余样本数据的平均数 $\bar{x}' = \frac{18-8}{5} = 2$, $\bar{y}' = \frac{42-12}{5} = 6$,B 错误;对于 C,设去除样本数据(8,12)后重新求得的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}_1 x + 1$,则 $2\hat{b}_1 + 1 = 6$,解得 $\hat{b}_1 = 2.5$,故去除后的经验回归方程为 $\hat{y} = 2.5x + 1$,C 正确;对于 D,因为 y 与 x 正相关,所以 $r > 0$,去除误差较大的样本数据后,线性相关性变强,所以样本相关系数 r 变大,D 正确. 故选 CD.

13. 0.05 解析:因为 $4.844 > 3.841 = x_{0.05}$,所以根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验,认为“喜欢乡村音乐与性别有关”,此结论出错的概率不超过 0.05.

14. 3.34 解析:由已知得 $\bar{x} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3$, $\bar{y} = \frac{0.50+0.90+2.30+2.70}{4} = 1.60$,把 $(\bar{x}, \bar{y})$ 代入经验回归方程,得 $1.60 = 0.58 \times 3 + \hat{a}$,解得 $\hat{a} = -0.14$,故经验回归方程为 $\hat{y} = 0.58x - 0.14$. 当 $x = 6$ 时, $\hat{y} = 0.58 \times 6 - 0.14 = 3.34$.

15. 46 解析:由题意可得 $\chi^2 =$

$$\frac{100[a(a-30) - (50-a)(80-a)]^2}{50 \times 50 \times 80 \times 20} \geq 6.635, \text{ 整}$$

理得 $(100a - 4000)^2 \geq 50^2 \times 4^2 \times 6.635$, 所以 $100a - 4000 \geq 200 \times \sqrt{6.635} \approx 200 \times 2.58 = 516$ 或 $100a - 4000 \leq -200 \times \sqrt{6.635} \approx -200 \times 2.58 = -516$, 解得 $a \geq 45.16$ 或 $a \leq 34.84$. 又因为 $a \geq 40$ 且 $a \in \mathbb{N}^*$, 所以 $a \geq 46$. 所以 a 的最小值为 46.

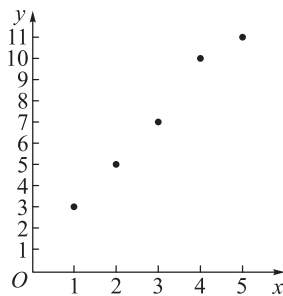
16. 5(或 6 或 7) 解析:由题意可得, $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 9$,

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 125, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55. \text{ 设经验回归方程为}$$

$$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}, \text{ 则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{125 - 135}{55 - 45} =$$

-1 , $\hat{a} = 9 - (-3) = 12$, 故经验回归方程为 $\hat{y} = -x + 12$. 根据题意, $m(12-m) \geq 35$, 解得 $5 \leq m \leq 7$. 又 $m \in \mathbb{N}^*$, 所以 m 的所有可能取值为 5, 6, 7.

17. 解:(1)根据题表,画出散点图如下:



由散点图可知 x 与 y 之间是正相关.

(2)由题意,得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = 3$,

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = 7.2,$$

$$\therefore \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 55 - 5 \times 9 = 10,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y} = 129 - 5 \times 3 \times 7.2 = 21,$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{21}{10} = 2.1,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 7.2 - 2.1 \times 3 = 0.9,$$

$\therefore$ 所求的经验回归方程为 $\hat{y} = 2.1x + 0.9$.

当 $x = 8$ 时, $\hat{y} = 2.1 \times 8 + 0.9 = 17.7$,

$\therefore$ 当温度达到 8°C 时反应结果大约为 17.7.

18. 解:(1)由题意知,抽样的比例为 $\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$,

故在 A 组中抽取的人数为 $75 \times \frac{2}{15} = 10$,

在 B 组中抽取的人数为 $45 \times \frac{2}{15} = 6$.

(2) 由题意, 得 $\chi^2 = \frac{200 \times (75 \times 55 - 25 \times 45)^2}{120 \times 80 \times 100 \times 100} =$

$18.75 > 7.879 = x_{0.005}$,

故依据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 可以认为对“绿色消费”意义的认知情况与年龄有关.

19. 解: (1) 根据题意, 可得 $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$,

$\bar{y} = \frac{19+34+46+57+69}{5} = 45$,

$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y} = 1\,023 - 5 \times 4 \times 45 = 123$,

$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 90$,

$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{123}{10} = 12.3$,

$\hat{a} = 45 - 12.3 \times 4 = -4.2$,

即经验回归方程为 $\hat{y} = 12.3x - 4.2$.

(2) 估计每月的净利润为 $\hat{z} = \hat{y} - t = 12.3x - 4.2 - (0.5x^2 + 3.8) = -0.5x^2 + 12.3x - 8$.

每个售后服务店的平均利润为 $\frac{\hat{z}}{x} = 12.3 -$

$\left(\frac{x}{2} + \frac{8}{x}\right) \leq 12.3 - 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{8}{x}} = 12.3 - 4 = 8.3$

(万元),

当且仅当 $x = 4$ 时取等号,

$\therefore$ 估计 A 地区开设 4 个售后服务店, 才能使 A 地区每月所得利润平均到每个售后服务店最高.

20. 解: (1) 因为 $\bar{t} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$,

所以 $\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 = (1-4)^2 + (2-4)^2 + \dots + (7-4)^2 = 28$,

所以 $r = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}} =$

$\frac{14}{\sqrt{28} \times \sqrt{7.08}} \approx 0.99 > 0.75$,

所以 y 与 t 之间具有较强的线性相关关系.

(2) 由题意可设 $\hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}$,

所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{14}{28} = 0.5$,

又因为 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 4.3 - 0.5 \times 4 = 2.3$,

所以经验回归方程为 $\hat{y} = 0.5t + 2.3$.

当 $t = 8$ 时, $\hat{y} = 6.3$,

即预测该学生记题型时间为 8 h 的检测效果为 6.3.

21. 解: (1) 样本中降雨量在 $[400, 500]$ 内的频率为 $1 - 100 \times (0.002 + 0.004 + 0.003) = 0.1$.

所以样本平均数为 $150 \times 0.2 + 250 \times 0.4 + 350 \times 0.3 + 450 \times 0.1 = 280$,

所以估计该镇明年梅雨季节的降雨量为 280 mm.

(2) 根据频率分布直方图可知, 降雨量在 $[200, 400]$ 内的频数为 $10 \times 100 \times (0.003 + 0.004) = 7$.

补全 2×2 列联表如下:

单位: 年

亩产量	降雨量		合计
	$[200, 400)$	$[100, 200) \cup [400, 500]$	
< 600	1	2	3
≥ 600	6	1	7
合计	7	3	10

则 $\chi^2 = \frac{10 \times (1 \times 1 - 6 \times 2)^2}{7 \times 3 \times 7 \times 3} \approx 2.744 > 2.706 =$

$x_{0.1}$,

所以根据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 认为该品种杨梅的亩产量与降雨量有关.

22. 解: (1) 零假设 H_0 : 首选志愿为师范专业与性别无关.

$\chi^2 = \frac{90 \times (25 \times 25 - 35 \times 5)^2}{60 \times 30 \times 30 \times 60} = 5.625 > 3.841$,

$\therefore$ 依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为首选志愿为师范专业与性别有关联.

(2) 某个考生首选志愿为师范专业的概率 $P =$

$\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$,

X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$,

$P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$,

$$P(X=2)=C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

∴ X 的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$\therefore E(X)=0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = 1,$$

$$D(X)=(0-1)^2 \times \frac{8}{27} + (1-1)^2 \times \frac{4}{9} + (2-1)^2 \times$$

$$\frac{2}{9} + (3-1)^2 \times \frac{1}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

专题一 数列(A卷)

1. D 解析: 对于 A, 数列 1, 3, 5, 7 与 7, 5, 3, 1 不是相同的数列, 故 A 错误; 对于 B, 数列 0, 1, 2, 3, ... 可以表示为 $\{n-1\}$, 故 B 错误; 对于 C, 数列 0, 1, 0, 1, ... 是摆动数列, 故 C 错误; 对于 D, 数列 $\{2n+1\}$ 是递增数列, 故 D 正确. 故选 D.

2. A 解析: 因为 a_5 是 a_1 和 a_9 的等差中项, 所以 $2a_5 = a_1 + a_9 = 10$, 解得 $a_5 = 5$. 故选 A.

3. D 解析: 记该等差数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_1 = 5, a_2 = 9$, 所以公差 $d = a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$, 所以 $a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$, 所以 $a_5 = 4 \times 5 + 1 = 21$. 故选 D.

4. D 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_5 a_6 = a_4 a_7 = -1$, 所以 $\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} = \frac{a_5 + a_6}{a_5 a_6} = \frac{3}{-1} = -3$. 故选 D.

5. A 解析: 因为 $S_2 = 4, S_4 = 6$, 且易知公比 $q \neq \pm 1$, 所以由等比数列的前 n 项和公式, 得

$$\begin{cases} S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = a_1(1+q) = 4, \\ S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = a_1(1+q)(1+q^2) = 6, \end{cases} \quad \text{两式相}$$

$$\text{除, 得 } q^2 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \begin{cases} a_1 = 4(2-\sqrt{2}), \\ q = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{或}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4(2+\sqrt{2}), \\ q = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \text{所以 } S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 7. \text{ 故选 A.}$$

6. A 解析: 根据题意, 对任意的 $a_1 \in (0, 1)$, 由关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n$, 即函数 $y = f(x)$ 的图象在 $(0, 1)$ 上任一点 (x, y) 都满足

$y > x$. 结合图象, 可知只有 A 满足. 故选 A.

7. B 解析: 因为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 所以 $\{a_n - b_n\}$ 也是等差数列, 又 $a_1 - b_1 = 6, a_{20} - b_{20} = 6$, 所以 $\{a_n - b_n\}$ 是常数列, 故 $a_{10} - b_{10} = 6$. 故选 B.

8. D 解析: $\because \{a_n\}$ 是等比数列, $\therefore a_2 \cdot a_6 \cdot a_{10} = a_6^3 = 3\sqrt{3}, \therefore a_6 = \sqrt{3}$. $\because \{b_n\}$ 是等差数列, $\therefore b_1 + b_6 + b_{11} = 3b_6 = 7\pi, \therefore b_6 = \frac{7\pi}{3}, \therefore \tan \frac{b_2 + b_{10}}{1 - a_3 \cdot a_9} = \tan \frac{2b_6}{1 - a_6^2} = \tan \frac{14\pi}{3} = -\tan \frac{2\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$. 故选 D.

9. AC 解析: $a_2 + a_8 = 2a_5 = 2$, 故 A 正确; 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_3 a_7 = (a_5 - 2d)(a_5 + 2d) = a_5^2 - 4d^2 = 1 - 4d^2 \leq 1$, 故 B 错误; $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 = 9$, 故 C 正确; $S_{10} = S_9 + a_{10} = 9 + a_{10}$, 又 a_{10} 的值无法确定, 所以 S_{10} 的值无法确定, 故 D 错误. 故选 AC.

10. AD 解析: 因为 $a_1 = 2$, 且 $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$, 所以 $a_2 = -\frac{1}{a_1 + 1} = -\frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{a_2 + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3} + 1} = -\frac{3}{2}, a_4 = -\frac{1}{a_3 + 1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2} + 1} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列, 所以 $a_{3k+1} = 2, k \in \mathbf{N}$, 所以 n 的值可以是 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, ... 故选 AD.

11. ABD 解析: 依题意, $a_1 = 1, a_{13} = 2, \therefore q^{12} = 2, \therefore q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}, a_9 = a_1 q^8 = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^8 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$, 故 A 正确; $\frac{a_8}{a_4} = q^4 = (2^{\frac{1}{12}})^4 = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, 故 B 正确; $M = a_2 + a_3 + \dots + a_{12}, N = a_1 + a_2 + \dots + a_{13}$, 又 $a_1 = 1, a_{13} = 2, \therefore N = M + 3, M = \frac{a_2(1-q^{11})}{1-q} = \frac{2^{\frac{1}{12}}(1-2^{\frac{11}{12}})}{1-2^{\frac{1}{12}}} = \frac{2^{\frac{1}{12}}-1-1}{1-2^{\frac{1}{12}}} = -1 - \frac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}, \therefore N = M + 3 = 2 - \frac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}$, 故 C 错误; D 正确. 故选 ABD.

12. BD 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 20$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \sqrt{a_n} \text{ 是整数} \\ a_n + 4, & \sqrt{a_n} \text{ 不是整数} \end{cases} (n=1, 2, \dots)$, 所以 $a_2 = 20 + 4 = 24, a_3 = 24 + 4 = 28, a_4 = 28 + 4 = 32, a_5 =$

$32+4=36, a_6 = \sqrt{36} = 6, a_7 = 6+4=10, a_8 = 10+4=14, a_9 = 14+4=18, a_{10} = 18+4=22$, 所以 $2a_3 \neq a_8$, 所以 A 不正确; 集合 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ 中的最小元素 $m=6$, 所以 B 正确; $a_9 < a_5$, 所以 C 不正确; $a_{10} = 22$, 所以 D 正确. 故选 BD.

13. $n^2 - 16n$ (答案不唯一) 解析: 易知二次函数 $y = x^2 - 16x$ 在 $(-\infty, 8)$ 上单调递减, 在 $(8, +\infty)$ 上单调递增, 故 $a_n = n^2 - 16n$ 满足题意.

14. 202 解析: 由 $a_n = |19 - 2n|$, 得当 $n \leq 9$ 时, $a_n = 19 - 2n$, 当 $n \geq 10$ 时, $a_n = 2n - 19$, 所以 $S_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20} = 17 + 15 + \dots + 1 + 1 + 3 + \dots + 21 = \frac{(17+1) \times 9}{2} + \frac{(1+21) \times 11}{2} = 202$.

15. 1 或 -2 解析: 当 $q = 1$ 时, $S_3 = 3a_1 = 3$, 符合题意; 当 $q \neq 1$ 时, $S_3 = 1 + q + q^2 = 3$, 解得 $q = -2$. 所以公比 q 为 1 或 -2.

16. $2^{n-1} - \frac{1}{2}$ 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -8$, 解得 $q = -2$, 所以 $|a_n| = |a_1 q^{n-1}| = \left| \frac{1}{2} \times (-2)^{n-1} \right| = 2^{n-2}$, 所以 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2} = \frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$.

17. 解: (1) 由题可知 $a_1 = 1 - p + q = 0$,
 $a_2 = 4 - 2p + q = -4$,
 解得 $p = 7, q = 6$.
 则 $a_n = n^2 - 7n + 6$,
 所以 $a_5 = 25 - 7 \times 5 + 6 = -4$.
 (2) 令 $a_n = n^2 - 7n + 6 = 66$,
 解得 $n = 12$ 或 $n = -5$ (舍去),
 所以 66 是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 且是第 12 项.

$$(3) a_n = n^2 - 7n + 6 = \left(n - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4},$$

所以当 $n = 3$ 或 $n = 4$ 时, a_n 取得最小值.

18. (1) 解: 设各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,
 因为 $S_3 = a_5$, 且 $2a_2 = 3$,
 所以 $\begin{cases} 3a_1 + 3d = a_1 + 4d, \\ 2a_1 + 2d = 3, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}, \\ d = 1. \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times 1 = n - \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{证明: 由 (1) 知 } S_n = n \times \frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2},$$

$$\text{所以 } \sqrt{S_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} n.$$

$$\text{因为 } \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (n+1) - \frac{\sqrt{2}}{2} n = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sqrt{S_1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 公差为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等差数列.

$$19. \text{解: (1) } \because b_1 = 1, b_{n+1} = \frac{1}{3} S_n,$$

$$\therefore b_2 = \frac{1}{3} b_1 = \frac{1}{3},$$

$$b_3 = \frac{1}{3} (b_1 + b_2) = \frac{4}{9},$$

$$b_4 = \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3) = \frac{16}{27}.$$

$$(2) \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3} S_n - \frac{1}{3} S_{n-1} = \frac{1}{3} b_n,$$

$$\text{可得 } b_{n+1} = \frac{4}{3} b_n,$$

$$\therefore b_n = b_2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}.$$

当 $n = 1$ 时, $b_1 = 1$ 不满足上式.

$$\therefore b_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

$$20. \text{解: (1) 因为 } S_n = n^2 + 6n,$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = (n-1)^2 + 6(n-1),$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 6n - (n-1)^2 - 6(n-1) = 2n + 5,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } S_1 = a_1 = 7, \text{ 满足上式,}$$

$$\text{故 } a_n = 2n + 5.$$

$$(2) b_n = \frac{a_n}{3n-20} = \frac{2n+5}{3n-20} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\frac{55}{6}}{n - \frac{20}{3}}\right),$$

$$\text{易知函数 } y = \frac{\frac{55}{6}}{x - \frac{20}{3}} \text{ 在 } \left(0, \frac{20}{3}\right), \left(\frac{20}{3}, +\infty\right) \text{ 上单}$$

调递减,

由于 $n \in \mathbf{N}^*$,

所以当 $1 \leq n \leq 6$ 和 $n \geq 7$ 时, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减.

又当 $1 \leq n \leq 6$ 时, $b_n < 0$,

当 $n \geq 7$ 时, $b_n > 0$,

所以当 $n=7$ 时, 即 $b_7=19$ 是数列 $\{b_n\}$ 的最大项;

当 $n=6$ 时, 即 $b_6 = -\frac{17}{2}$ 是数列 $\{b_n\}$ 的最小项.

21. 解: (1) 由题意知, 每年的支出构成了以 80 为首项, 40 为公差的等差数列,

$$\text{则 } f(n) = 300n - \left[80n + \frac{n(n-1)}{2} \times 40 \right] - 600 = -20n^2 + 240n - 600 = -20(n-6)^2 + 120.$$

若获得纯利润,

则 $f(n) > 0$,

即 $-20(n-6)^2 + 120 > 0$,

解得 $6 - \sqrt{6} < n < 6 + \sqrt{6}$,

又 $n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $4 \leq n \leq 8$,

故从第四年开始获得纯利润.

$$f(n)_{\max} = f(6) = 120,$$

故获得的最大纯利润为 120 万元.

$$(2) \text{ 年平均利润为 } \frac{f(n)}{n} = \frac{-20n^2 + 240n - 600}{n} = 240 - 20\left(n + \frac{30}{n}\right).$$

因为 $y = x + \frac{30}{x} (x > 0)$ 在 $(0, \sqrt{30})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{30}, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $y = n + \frac{30}{n}$ 在 $n=5$ 或 $n=6$ 时取得最小值 11,

$$\text{所以 } \frac{f(n)}{n} = 240 - 20\left(n + \frac{30}{n}\right) \leq 240 - 220 = 20,$$

即年平均利润最大时, $n=5$ 或 $n=6$.

22. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由 } a_2 a_7 = 3a_4^2,$$

$$\text{得 } a_1^2 q^7 = 3a_1^2 q^6,$$

$$\therefore q = 3.$$

$\therefore -3, S_4, 9a_3$ 成等差数列,

$$\therefore 2S_4 = 9a_3 - 3,$$

$$\therefore \frac{2a_1(1-3^4)}{1-3} = 9a_1 \cdot 3^2 - 3,$$

解得 $a_1 = 3$,

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 3^n.$$

(2) 由 $a_n = 3^n$, 且 $b_n = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$, 得

$$b_n = 3^n + \frac{1}{n(n+1)} = 3^n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= (3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n) + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{3(1-3^n)}{1-3} + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

专题一 数列(B卷)

1. D 解析: $a_2 = 2 \times 2 - 2 = 2$, $a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8$, 则

$$a_2 a_3 = 2 \times 8 = 16. \text{ 故选 D.}$$

2. C 解析: $\therefore$ 公差 $d = \frac{8-2}{3-1} = 3$, $\therefore$ 由 $a_n = 2 + 3(n-1) = 98$, 得 $n = 33$. 故选 C.

3. D 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 依题意, 有
$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 4, \\ 7a_1 + 21d = 21, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = -3, \\ d = 2, \end{cases} \text{ 故 } a_7 = a_1 + 6d = -3 + 6 \times 2 = 9. \text{ 故选 D.}$$

4. C 解析: $a_3 a_5 a_7 = a_1 q^2 a_3 q^2 a_5 q^2 = a_1 a_3 a_5 q^6 = 2 \times 2^6 = 2^7$. 故选 C.

5. C 解析: $\therefore a_4 + a_7 = 2$, $a_4^2 + a_7^2 = 20$, $\therefore 20 = (a_4 + a_7)^2 - 2a_4 a_7$, 解得 $a_4 a_7 = -8$, $\therefore a_1 a_{10} = a_4 a_7 = -8$, 故选 C.

6. B 解析: 设公差为 d , 若甲不成立, 则

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 4, \\ 3a_1 + 3d = 9, \\ 5a_1 + 10d = 25, \end{cases} \text{ 无解, 不满足题意; 若乙不成立,}$$

$$\text{则 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ 3a_1 + 3d = 9, \\ 5a_1 + 10d = 25, \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases} \text{ 满足题意; 若丙不成}$$

$$\text{立, 则 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_1 + 3d = 4, \\ 5a_1 + 10d = 25, \end{cases} \text{ 无解, 不满足题意; 若丁不}$$

$$\text{成立, 则 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_1 + 3d = 4, \\ 3a_1 + 3d = 9, \end{cases} \text{ 无解, 不满足题意. 故选 B.}$$

7. C 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $S_{21} =$

$$7(a_3 + a_5 + a_{2m+1}), \text{ 所以 } \frac{a_1 + a_{21}}{2} \times 21 = 7(a_3 + a_5 + a_{2m+1}), \text{ 即 } 21a_{11} = 7(a_3 + a_5 + a_{2m+1}), \text{ 即 } 3a_{11} = a_3 + a_5 + a_{2m+1}, \text{ 所以 } 3(a_1 + 10d) = (a_1 + 2d) + (a_1 +$$

$4d) + (a_1 + 2md)$, 即 $30d = (6 + 2m)d$, 所以 $6 + 2m = 30$, 解得 $m = 12$. 故选 C.

8. C 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 是一个无穷等比数列, 且 $a_1 = 1, a_4 = 8$, 所以 $a_4 = a_1 q^3 = 8$, 所以 $q = 2$. 由等比数列 $\{a_n\}$ 的性质可得, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1 = a_1 = 1$, 公比为 q^{m+1} 的等比数列, 所以 $b_n = (q^{m+1})^{n-1}$, 所以由 $S_3 = 273$ 得 $\frac{1 - (q^{m+1})^3}{1 - q^{m+1}} = 273$, 即 $1 + q^{m+1} + (q^{m+1})^2 = 273$, 即 $(q^{m+1})^2 + q^{m+1} - 272 = 0$, 即 $(q^{m+1} + 17)(q^{m+1} - 16) = 0$, 所以 $q^{m+1} = 16$, 即 $2^{m+1} = 16$, 所以 $m = 3$. 故选 C.

9. BC 解析: $\because d < 0, |a_3| = |a_9|, \therefore a_3 = -a_9$, $\therefore a_1 + 2d = -a_1 - 8d$, 即 $a_1 + 5d = 0, \therefore a_6 = 0$. 又 $d < 0, \therefore$ 当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n > 0, \therefore S_n$ 取得最大值时的自然数 n 是 5 或 6. 故选 BC.

10. ABD 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 + a_6 + a_{11} = 3\pi, b_1 b_5 b_9 = 8$, 所以 $a_1 + a_6 + a_{11} = 3a_6 = 3\pi$, 即 $a_6 = \pi, b_1 b_5 b_9 = b_5^3 = 8$, 即 $b_5 = 2$. 对于 A 选项, $S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 11a_6 = 11\pi$, 故 A 正确; 对于 B 选项, $a_2 + a_{10} = 2a_6 = 2\pi, b_1 b_6 = b_5^2 = 4$, 所以 $\sin \frac{a_2 + a_{10}}{b_1 b_6} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 故 B 正确; 对于 C 选项, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_3 + a_7 + a_8 = a_6 - 3d + a_6 + d + a_6 + 2d = 3a_6 = 3\pi$, 故 C 错误; 对于 D 选项, 由 $b_5 = 2$ 得 $b_3 > 0, b_7 > 0$, 故 $b_3 + b_7 \geq 2\sqrt{b_3 b_7} = 2\sqrt{b_5^2} = 4$, 当且仅当 $b_3 = b_7 = 2$ 时等号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABC 解析: 因为 $a_n + a_{n+1} = 3n, n \in \mathbf{N}^*$ ①, 所以 $a_{n+1} + a_{n+2} = 3(n+1)$ ②, ② - ① 得 $a_{n+2} - a_n = 3, n \in \mathbf{N}^*$, 又因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 2$, 所以 $a_6 = a_4 + 3 = a_2 + 6 = 8$, 且数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项均为公差为 3 的等差数列, 故 A, B 选项正确; $S_{20} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{19} + a_{20}) = 3 + 9 + 15 + \dots + 57 = \frac{10 \times (3 + 57)}{2} = 300$, 故 C 选项正确; 由 $a_2 - a_1 = 1 \neq 3$ 可知, $a_{2n} - a_{2n-1} = 3$ 不成立, 故 D 选项错误. 故选 ABC.

12. AD 解析: 设 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 由题意, 得 $a_9 = a_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^8, a_{10} = a_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^9, \therefore a_9 \cdot a_{10} = a_1^2 \left(-\frac{2}{3}\right)^{17} < 0$, 故 A 正确; $\because a_1$ 正负不确定, $\therefore a_9$ 和 a_{10} 的大小不确定, 故 B 错误; 由 $a_9 > b_9$ 且

$a_{10} > b_{10}$, 得 $a_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^8 > 12 + 8d, a_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^9 > 12 + 9d$, 由于 a_9, a_{10} 异号, 因此 $a_9 < 0$ 或 $a_{10} < 0$, 故 b_9, b_{10} 中必有一个小于 0, 由 $b_1 = 12$ 可得等差数列 $\{b_n\}$ 一定是递减数列, 即 $d < 0$, 即有 $b_9 > b_{10}, \therefore b_{10}$ 一定小于 0, 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.

13. $a_n = 2n + 1$ 解析: 由图形观察可知 $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 9$, 所以按图示的规律搭下去, 可得所求关系式可以是 $a_n = 2n + 1$.

14. 11 解析: 设边长 AB, BC, CD 构成的等差数列的公差为 $d (d > 0)$, $BC = x$, 则 $AB = x - d, CD = x + d$. 由题意得 $\begin{cases} (x-d) + x + (x+d) = 21, \\ (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 179, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 7, \\ d = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 7, \\ d = -4 \end{cases}$ (舍去), 所以 $CD = 11$.

15. $\sqrt[3]{2}$ 解析: 由 $S_9 = S_3 + 2S_6$, 得 $q \neq 1$, 所以 $\frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + 2 \times \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$, 化简得 $1 - q^9 = 1 - q^3 + 2(1 - q^6)$, 即 $q^9 - 2q^6 - q^3 + 2 = 0$, 即 $(q^6 - 1)(q^3 - 2) = 0$, 得 $q^6 = 1$ 或 $q^3 = 2$, 又 $q > 0$, 且 $q \neq 1$, 所以 $q = \sqrt[3]{2}$.

16. 20 解析: 根据“调和数列”的定义, 可得 $b_{n+1} - b_n = d (n \in \mathbf{N}^*, d \text{ 为常数})$, 所以 $\{b_n\}$ 为等差数列, 所以由 $b_1 + b_2 + \dots + b_9 = 90$, 得 $\frac{9(b_1 + b_9)}{2} = 90$, 所以 $b_1 + b_9 = 20$, 所以 $b_4 + b_6 = b_1 + b_9 = 20$.

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \neq 0$, 因为 $a_3 = S_3, a_3 a_4 = S_5$, 所以 $\begin{cases} a_1 + 2d = 3a_1 + 3d, \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = 5a_1 + 10d, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -1, \\ d = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 0, \\ d = 0 \end{cases}$ (舍去), 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = -1 + 2(n-1) = 2n - 3$.

(2) 由 (1) 可得 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(-1 + 2n - 3)}{2} = n^2 - 2n$,

由 $S_n > a_n$ 可得 $n^2 - 2n > 2n - 3$,

即 $n^2 - 4n + 3 > 0$,

解得 $n < 1$ 或 $n > 3$,

因为 $n \in \mathbf{N}^*$,

所以正整数 n 的最小值为 4.

18. 解: (1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 2n (n \in \mathbf{N}^*)$,

∴当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1) = 2n+1$,

又当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$ 满足上式,

∴ $a_n = 2n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)可知 $S_1=3, a_2=5, a_3=7$,

又 $b_2=S_1, b_4=a_2+a_3$,

∴ $b_2=3, b_4=12$.

又数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,

$$\therefore q^2 = \frac{b_4}{b_2} = 4,$$

又 $q > 0$,

∴ $q=2$,

$$\therefore b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore T_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{3}{2}(1-2^n)}{1-2} = \frac{3}{2}(2^n-1).$$

19. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由已知可得} \begin{cases} 2a_1 + 2d = 8, \\ (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 8d). \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3, \end{cases}$$

即数列 $\{a_n\}$ 的首项是 4, 公差为 0 或首项是 1, 公差为 3.

(2)由(1)可知 $a_n = 4$ 或 $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2$,

当 $a_n = 4$ 时,

$$b_n = \frac{(4-1) \times (4+2)}{18} = 1,$$

又 $b_m + b_{m+1} = b_{m+3}$,

而 $1+1=2 > 1$,

不满足题意;

当 $a_n = 3n-2$ 时,

$$b_n = \frac{(3n-2-1)(3n-2+2)}{18} = \frac{n(n-1)}{2},$$

又 $b_m + b_{m+1} = b_{m+3}$,

$$\text{所以} \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+3)}{2},$$

整理得 $m^2 - 5m - 6 = 0$,

因为 m 为正整数,

所以 $m=6$.

20. 解: (1) 易知 $a_n \neq 0$,

$$\text{所以} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}, n \geq 2,$$

$$\text{从而} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}, n \geq 3,$$

$$\text{故} a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \times 1 \times \frac{3}{2} \times$$

$$\frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} = \frac{n}{2}, n \geq 3,$$

又 $a_1 = a_2 = 1$,

$$\text{所以} a_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ \frac{n}{2}, n \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) \text{由(1)知, } b_n = 2^n \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \lambda \right) = 2^n \left(\frac{2}{n+1} - \lambda \right),$$

若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{b_n\}$ 是单调递减数列,

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = 2^n \left(\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1} - \lambda \right) < 0 \text{ 对任意的}$$

$n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

$$\text{即 } \lambda > \left(\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1} \right)_{\max}.$$

$$\text{因为 } \frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n + \frac{2}{n} + 3},$$

又函数 $y = x + \frac{2}{x} (x > 0)$ 在区间 $(0, \sqrt{2})$ 上单调递

减, 在区间 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以由对勾函数的性质可知, 当 $n=1$ 或 $n=2$ 时,

$n + \frac{2}{n} + 3$ 取得最小值 6, $\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1}$ 取得最大值 $\frac{1}{3}$,

故实数 λ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, +\infty \right)$.

21. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 依题意 $d > 0$,

$$\text{由题意, 得} \begin{cases} a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = 16, \\ a_3 a_6 = 55, \end{cases}$$

解得 $a_3 = 5, a_6 = 11$ 或 $a_3 = 11, a_6 = 5$ (舍去),

$$\therefore d = \frac{a_6 - a_3}{6 - 3} = 2, a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1.$$

(2)由(1)得 $a_n = 2n-1$,

$$\therefore a_{n+1} = 2n+1,$$

$$\therefore b_n = \frac{4}{a_{n+1}^2 - 1} = \frac{4}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore T_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

∴ $T_n < \frac{m}{100}$ 恒成立,

即 $m > 100 - \frac{100}{n+1}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

$\therefore m$ 的最小值为 100.

22. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{a_6 - a_3}{6 - 3} = 1,$$

$$\text{所以 } a_n = a_3 + (n-3)d = n,$$

$$\text{所以 } b_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ 为奇数,} \\ 2^n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{所以 } b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{19} + b_{20} = (2 + 4 + \cdots + 20) + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{20}) = \frac{10 \times (2+20)}{2} +$$

$$\frac{4 \times (1-4^{10})}{1-4} = 110 + \frac{4}{3} (4^{10} - 1).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } c_n = b_{2n-1} \cdot b_{2n} = 2n \cdot 2^{2n} = 2n \cdot 4^n.$$

$$\text{则 } S_n = 2 \times 4^1 + 4 \times 4^2 + 6 \times 4^3 + \cdots + 2n \times 4^n \quad ①,$$

$$4S_n = 2 \times 4^2 + 4 \times 4^3 + 6 \times 4^4 + \cdots + 2(n-1) \times 4^n + 2n \times 4^{n+1} \quad ②,$$

$$① - ②, \text{ 得 } -3S_n = 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + \cdots + 2 \times 4^n - 2n \times 4^{n+1},$$

$$\text{所以 } -3S_n = \frac{8(1-4^n)}{1-4} - 2n \cdot 4^{n+1} = \left(\frac{2}{3} - 2n \right) 4^{n+1} - \frac{8}{3},$$

$$\text{即 } S_n = \left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{9} \right) 4^{n+1} + \frac{8}{9}.$$

专题二 导数(A卷)

1. A 解析: 由 $f(x) = 2e^x \sin x$ 求导得 $f'(x) = 2(e^x)' \cdot \sin x + 2e^x (\sin x)' = 2e^x (\sin x + \cos x)$, 所以 $f'(0) = 2$. 故选 A.

2. C 解析: 由导数的实际意义知, 位移关于时间的瞬时变化率为该时刻的瞬时速度. 故选 C.

3. C 解析: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{2h} = \frac{1}{2} \cdot$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{2} f'(x_0) = 1, \text{ 故选 C.}$$

4. B 解析: $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} + 2xf'(1)$, 令 $x=1$, 则

$$f'(1) = \frac{e}{4} + 2f'(1), \text{ 则 } f'(1) = -\frac{e}{4}, \text{ 所以 } f(x) =$$

$$\frac{e^x}{x+1} - \frac{e}{4}x^2, \text{ 所以 } f(1) = \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = \frac{e}{4}. \text{ 故选 B.}$$

5. B 解析: 因为函数 $f(x) = (2x-1)e^x$, 所以 $f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < -\frac{1}{2}$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

$(-\infty, -\frac{1}{2})$, 故选 B.

6. A 解析: 由导函数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内的图象可知, 函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的图象与 x 轴有四个公共点, 在从左到右第一个点处导数值左正右负, 第二个点处导数值左负右正, 第三个点处导数值左正右正, 第四个点处导数值左正右负, 所以函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的极小值点个数为 1, 故选 A.

7. C 解析: 由题可知 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

$$\text{所以 } f(x)_{\text{极大值}} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}, f(x)_{\text{极小值}} =$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ 又 } f(1) = 0, f(-1) = 0, \text{ 所以函数}$$

$$f(x) \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上的最大值为 } \frac{2\sqrt{3}}{9}. \text{ 故选 C.}$$

8. A 解析: $f'(x) = x - a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 即 $x^2 - ax + 1 = 0$, 因为函数 $f(x)$ 有两个极值点, 所以 $x^2 - ax + 1 = 0$ 有两个不相等的

$$\text{正根, 即 } \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 > 0, \\ \frac{a}{2} > 0, \end{cases} \text{ 解得 } a > 2. \text{ 故选 A.}$$

9. CD 解析: 对于 A, 函数 $f(x) = 2x^4$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 8x^3$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上不是增函数; 对于 B, 函数 $f(x) = xe^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上不是增函数; 对于 C, 函数 $f(x) = x - \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数; 对于 D, 函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$, 当且仅当 $e^x = e^{-x}$, 即 $x = 0$ 时, 等号成立, 所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 故选 CD.

10. AC 解析:由 $f(x) = f(2-x)$ 得 $f(x+1) = f(1-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 当 $x>1$ 时, 由 $(x-1)f'(x) < 0$ 得 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x<1$ 时, 由 $(x-1)f'(x) < 0$ 得 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. 又 $a = f(0) = f(2)$, $b = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2})$, $c = f(3)$, 故 $b > a > c$. 故选 AC.

11. ACD 解析:因为直线 $y=3x+b$ 能作为曲线 $y=f(x)$ 的切线, 所以 $f'(x)=3$ 有解, 对于 A, 由 $f(x) = -\frac{1}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, 由 $f'(x)=3$, 得 $\frac{1}{x^2} = 3$, 解得 $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以直线 $y=3x+b$ 能作为曲线 $y=f(x) = -\frac{1}{x}$ 的切线, 所以 A 正确; 对于 B, 由 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln x$, 得 $f'(x) = x + \frac{4}{x}$ ($x>0$), 由 $f'(x)=3$, 得 $x + \frac{4}{x} = 3$, 化简得 $x^2 - 3x + 4 = 0$, 因为 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 < 0$, 所以方程无实数解, 所以直线 $y=3x+b$ 不能作为曲线 $y=f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln x$ 的切线, 所以 B 错误; 对于 C, 由 $f(x) = x^3$, 得 $f'(x) = 3x^2$, 由 $f'(x)=3$, 得 $3x^2 = 3$, 解得 $x = \pm 1$, 所以直线 $y=3x+b$ 能作为曲线 $y=f(x) = x^3$ 的切线, 所以 C 正确; 对于 D, 由 $f(x) = e^x$, 得 $f'(x) = e^x$, 由 $f'(x)=3$, 得 $e^x = 3$, 解得 $x = \ln 3$, 所以直线 $y=3x+b$ 能作为曲线 $y=f(x) = e^x$ 的切线, 所以 D 正确. 故选 ACD.

12. AD 解析:设切点为 $(x_0, \frac{x_0}{e^{x_0}})$, 易知 $y' = \frac{1-x}{e^x}$, $\therefore$ 曲线 C 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率 $k = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$ ①, $\therefore$ 切线过 $(x_0, \frac{x_0}{e^{x_0}})$, $(a, 0)$ 两点, $\therefore k = \frac{\frac{x_0}{e^{x_0}} - 0}{x_0 - a}$ ②. 由 ①②得 $\frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{\frac{x_0}{e^{x_0}}}{x_0 - a}$, 整理得 $x_0^2 - ax_0 + a = 0$, 由题意得关于 x_0 的方程 $x_0^2 - ax_0 + a = 0$ 有两个不同的实数解, 所以 $\Delta = a^2 - 4a > 0$, 解得 $a < 0$ 或 $a > 4$. 结合选项可知, 选 AD.

13. $(2, +\infty)$ (也可以为 $[2, +\infty)$) 解析: $f'(x) = [(x-3)e^x]' = e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > 2$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间是

$(2, +\infty)$ (也可以为 $[2, +\infty)$).

14. -1 解析:由 $f(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 - 6)x - 1$ 可得 $f'(x) = 3x^2 - 2mx + m^2 - 6$, 由题意得 $f'(1) = 3 - 2m + m^2 - 6 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 3$, 当 $m = 3$ 时, $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$, 故函数没有极值点, 不符合条件, 故 $m = -1$.

15. $m_1 = m_2 = m_3$ $h(x)$ 解析:由题意得 $m_1 = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$, $m_2 = \frac{g(1)-g(0)}{1-0} = 1$, $m_3 = \frac{h(1)-h(0)}{1-0} = 1$, 故 $m_1 = m_2 = m_3$. 由题意得 $f'(x) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $h'(x) = 3x^2$, 故 $f'(1) = 1$, $g'(1) = \frac{1}{2}$, $h'(1) = 3$, 故三个函数中, 在 $x=1$ 处的瞬时变化率最大的是 $h(x)$.

16. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 解析:依题意, 得 $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ($x>0$), 当 $x>0$ 时, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$, 当且仅当 $3x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$ 时等号成立, 即函数图象在点 P 处的切线的斜率不小于 $\sqrt{3}$, 即 $\tan \theta \geq \sqrt{3}$. 又 $\theta \in [0, \pi)$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 即 θ 的取值范围是 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

17. 解: (1) 因为 $f(x) = ae^x - \sin x + 2x$, 所以 $f'(x) = ae^x - \cos x + 2$. (2) 因为 $f'(x) = ae^x - \cos x + 2$, 所以 $f'(0) = a - 1 + 2 = a + 1$, 又 $f(0) = a$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - a = (a + 1)(x - 0)$, 即 $y = (a + 1)x + a$. 又由题知该切线方程为 $y = 2x + 1$, 所以 $a = 1$.

18. 解: (1) 由题意可知, $T(t) = \frac{120}{t+5} + 15$, 当 $t=0$ 时, $T = \frac{120}{5} + 15 = 39$, 当 $t=10$ 时, $T = \frac{120}{15} + 15 = 23$, 故从 $t=0$ 到 $t=10$, 蜥蜴体温的平均变化率是 $\frac{23-39}{10-0} = -1.6 (^{\circ}\text{C}/\text{min})$.

$$(2) \text{ 因为 } T(t) = \frac{120}{t+5} + 15,$$

$$\text{则 } T'(t) = \frac{-120}{(t+5)^2},$$

$$\text{当 } t=10 \text{ 时, } T'(10) = -\frac{8}{15}.$$

故当 $t=10$ 时, 蜥蜴体温的瞬时变化率是 $-\frac{8}{15}^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

$$(3) \text{ 令 } T'(t) = -1 \text{ 得 } \frac{-120}{(t+5)^2} = -1,$$

$$\text{解得 } t = 2\sqrt{30} - 5 \approx 5.95,$$

故当 $t \approx 5.95$ 时, 蜥蜴体温的瞬时变化率为 $-1^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

19. 解: (1) $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3) \cdot (x-1)$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = -3$ 或 $x = 1$. 列表如下:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$

因此 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -3)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-3, 1)$.

当 $x = -3$ 时, $f(x)$ 有极大值, 极大值为 $f(-3) = 9$;

当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有极小值, 极小值为 $f(1) = -\frac{5}{3}$.

(2) 由(1)知 $f(x)$ 在 $[-1, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, 3]$ 上单调递增.

$$\text{因为 } f(1) = -\frac{5}{3}, f(-1) = \frac{11}{3}, f(3) = 9,$$

所以 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的最大值为 9, 最小值为 $-\frac{5}{3}$.

20. 解: (1) $f(x) = x^3 + x^2 - x + c$,

$$\text{则 } f'(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 得 } x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(\frac{1}{3}, +\infty)$.

(2) 由(1)知, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 $1 + c$,

在 $x = \frac{1}{3}$ 处取得极小值 $-\frac{5}{27} + c$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 有三个零点,

$$\therefore \begin{cases} 1+c > 0, \\ -\frac{5}{27}+c < 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } -1 < c < \frac{5}{27}.$$

$\therefore$ 实数 c 的取值范围为 $(-1, \frac{5}{27})$.

21. (1) 证明: 设 $F(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x -$

$$\frac{2}{3}x^3,$$

$$\text{则 } F'(x) = x + \frac{1}{x} - 2x^2 = \frac{(1-x)(1+x+2x^2)}{x},$$

在区间 $[1, +\infty)$ 上, $2x^2 + x + 1 > 0$, $1 - x \leq 0$,

所以当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 单调递

减, 且 $F(1) = -\frac{1}{6} < 0$,

故 $x \in [1, +\infty)$ 时, $F(x) < 0$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}x^2 + \ln x < \frac{2}{3}x^3,$$

所以在区间 $[1, +\infty)$ 上, 函数 $f(x)$ 的图象恒在函

数 $g(x) = \frac{2}{3}x^3$ 的图象的下方.

(2) 解: 由 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x$, 得 $f'(x) = x + \frac{1}{x}$,

当 $x \in [1, e]$ 时, $f'(x) > 0$,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1,$$

$$f(x)_{\min} = f(1) = \frac{1}{2}.$$

因为存在 $x_1, x_2 \in [1, e]$, 使 $f(x_1) - f(x_2) \geq m$ 成立等价于 $[f(x_1) - f(x_2)]_{\max} \geq m$,

$$\text{即 } f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} \geq m,$$

$$\text{又 } \frac{e^2 + 1}{2} \approx \frac{2.7^2 + 1}{2} = 4.145,$$

故满足条件的最大整数 m 为 4.

22. (1) 解: 由题意得 $y = xf(x) = x \ln(a - x)$,

$$y' = \ln(a - x) + x[\ln(a - x)]' = \ln(a - x) - \frac{x}{a - x}.$$

因为 $x = 0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点,

$$\text{所以 } y'|_{x=0} = \ln a = 0,$$

所以 $a = 1$,

经检验 $a = 1$ 符合题意.

(2) 证明: 由(1)可知, $f(x) = \ln(1 - x)$, 其定义域为 $\{x | x < 1\}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $\ln(1 - x) < 0$, 此时 $xf(x) < 0$,

当 $x < 0$ 时, $\ln(1 - x) > 0$, 此时 $xf(x) < 0$.

易知 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$,

$$\text{故要证 } g(x) = \frac{x + f(x)}{xf(x)} < 1,$$

只需证 $x+f(x)>xf(x)$.

即证 $x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)>0$.

令 $1-x=t$, 则 $t>0$, 且 $t\neq 1$,

则只需证 $1-t+\ln t-(1-t)\ln t>0$,

即证 $1-t+t\ln t>0$.

令 $h(t)=1-t+t\ln t$,

则 $h'(t)=-1+\ln t+1=\ln t$,

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(t)>h(1)=0$,

即 $g(x)<1$ 成立.

专题二 导数(B卷)

1. C 解析: 由题意得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$, 即 $y=\frac{1}{2}x-2$, $\therefore f'(2)=\frac{1}{2}$,

把 $x=2$ 代入切线方程得 $y=\frac{1}{2}\times 2-2=-1$,

$\therefore f(2)=-1$, $\therefore f'(2)-f(2)=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$.

故选 C.

2. A 解析: 因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1$ ($a\neq 0$), 所以 $f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$, 所以 $f'(x)$ 的图象开口向上, 对称轴是直线 $x=-a$, 且 $-a\neq 0$, 因为 $4a^2-4(a^2-1)=4>0$, 所以 $f'(x)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点, 故题图(3)符合, 由 $f'(0)=a^2-1=0$ 且 $-a>0$ 得 $a=-1$, 故 $f(-1)=-\frac{1}{3}-1+1=-\frac{1}{3}$. 故选 A.

3. A 解析: 由 $f(x)=xe^x$, 得 $f'(x)=e^x+xe^x$, $\therefore f'(2)=3e^2$, 又 $f(2)=2e^2$, $\therefore$ 曲线 $y=f(x)=xe^x$ 在 $x=2$ 处的切线 l 的方程为 $y-2e^2=3e^2(x-2)$, 即 $y=3e^2x-4e^2$. 令 $x=0$, 得 $y=-4e^2$, 令 $y=0$, 得 $x=\frac{4}{3}$, $\therefore$ 曲线 $y=f(x)=xe^x$ 在 $x=2$ 处的切线 l 与坐标轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 4e^2=\frac{8e^2}{3}$. 故选 A.

4. A 解析: $f'(x)=e^{ax}+(1+x)e^{ax}\cdot a=(ax+a+1)\cdot e^{ax}$, 则 $f'(0)=a+1$, 又直线 $x+y+a=0$ 的斜率为 -1 , 所以 $a+1=-1$, 解得 $a=-2$. 故选 A.

5. C 解析: 由题图可得, 当 $x\in(-\infty, -1)$, $(1,$

$+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(-1,1)$ 时, $f'(x)<0$. 由

$(x+2)f'(x)>0$, 可得 $\begin{cases} f'(x)>0, \\ x+2>0 \end{cases}$ ① 或

$\begin{cases} f'(x)<0, \\ x+2<0 \end{cases}$ ②, 解①可得 $-2<x<-1$ 或 $x>1$, 解

②可得 x 无解. 综上, 不等式 $(x+2)f'(x)>0$ 的解集为 $(-2, -1)\cup(1, +\infty)$. 故选 C.

6. A 解析: 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 令

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$, 则 $x=e$, 所以当 $x\in(0, e)$ 时,

$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in(e, +\infty)$ 时,

$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 又 $a=\frac{2}{e^2}=f(e^2)$, $b=$

$\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}=f(4)$, $c=\frac{\ln 3}{3}=f(3)$, $e^2>4>3>e$, 所

以 $f(3)>f(4)>f(e^2)$, 所以 $a<b<c$. 故选 A.

7. D 解析: 设 $F(x)=\frac{f(x)-2}{e^x}$, 则 $F'(x)=$

$\frac{f'(x)-f(x)+2}{e^x}$. $\therefore f(x)-f'(x)>2$, $\therefore f'(x)-$

$f(x)+2<0$, $\therefore F'(x)<0$, 即函数 $F(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$

上单调递减, $\therefore f(0)=5$, $\therefore F(0)=3$, $\therefore$ 不等式

$f(x)\leq 3e^x+2$ 等价于 $\frac{f(x)-2}{e^x}\leq 3$, 即 $F(x)\leq$

$F(0)$, 解得 $x\geq 0$, 故不等式的解集为 $[0, +\infty)$. 结合选项可知, 只有 D 符合题意. 故选 D.

8. D 解析: 因为 $f(x)=x\ln x+\frac{1}{2}ex^2-x$, 所以

$f'(x)=\ln x+ex$. 显然 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

增. 又因为 $f'(\frac{1}{e})=0$, 所以当 $x\in(0, \frac{1}{e})$ 时,

$f'(x)<0$, 当 $x\in(\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$

在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}-\frac{1}{e}=-\frac{3}{2e}$. 故

选 D.

9. AD 解析: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为对任意的 $x>0$, $f(x)=-x[(\ln x)^2+1]<0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 不存在零点, 故 C 错; 因为 $f'(x)=$

$-(\ln x)^2-x\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\ln x-1=-(\ln x+1)^2\leq 0$, 且

$f'(x)=0$ 不恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

为减函数, 故 D 对, B 错; $f'(\frac{1}{e})=-\left(\ln\frac{1}{e}+\right.$

1)²=0,故 A 对. 故选 AD.

10. AC 解析:构造函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{3^x}$, 则 $g'(x) =$

$$\frac{2f'(2x) \cdot 3^x - 3^x \cdot f(2x) \cdot \ln 3}{3^{2x}} =$$

$$\frac{2f'(2x) - f(2x) \cdot \ln 3}{3^x}, \text{ 由 } 2f'(2x) - \ln 3 \cdot$$

$f(2x) > 0$ 可得 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递

增, 故 $g(1) > g(0) > g(-1)$, 即 $\frac{f(2)}{3} > \frac{f(0)}{3^0} >$

$$\frac{f(-2)}{3^{-1}}, \text{ 故 } f(2) > 3f(0) > 9f(-2), \text{ 又 } f(0),$$

$f(-2)$ 与 0 的大小关系不确定, 所以 B, D 不一定正确. 故选 AC.

11. AC 解析: 设 $f'(x)$ 的值域为 P , 由题意得曲线

$y=f(x)$ 具有“可平行性”等价于对任意的 $a \in P$,

方程 $f'(x)=a$ 至少有两个根. 对于 A, $y'=1 -$

$$\frac{1}{x^2}, \text{ 令 } 1 - \frac{1}{x^2} = a (x \neq 0 \text{ 且 } a < 1), \text{ 得 } \frac{1}{x^2} = 1 - a, \text{ 此}$$

方程有两个不同的根, 故 A 符合题意; 对于 B,

$y'=3x^2-1$, 当 $y'=-1$ 时, x 的取值唯一, 故 B 不

合题意; 对于 C, 由 $y'=\cos x$ 和三角函数的周期性

可知, $\cos x=a (-1 \leq a \leq 1)$ 的解有无穷多个, 故 C

符合题意; 对于 D, $y'=2x-4+\frac{1}{x} (x>0)$, 令 $2x-$

$$4+\frac{1}{x}=a (a \geq 2\sqrt{2}-4), \text{ 得 } 2x^2-(4+a)x+1=0,$$

当 $a=2\sqrt{2}-4$ 时, 方程有唯一解, 故 D 不合题意.

故选 AC.

12. BD 解析: $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数值为

$f'(0)=0$, 但当 $x<0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当

$x>0$ 时, 函数 $f(x)$ 也单调递增, 故 0 不是函数

$f(x)$ 的极值点, 故 A 中命题为假命题; 直线 $y=$

$$\frac{1}{2}x+b (b \in \mathbf{R}) \text{ 的斜率为 } \frac{1}{2}, y=\frac{1}{x} \text{ 的导函数为 } y' =$$

$$-\frac{1}{x^2}, \text{ 若直线 } y=\frac{1}{2}x+b (b \in \mathbf{R}) \text{ 可以作为 } y=\frac{1}{x}$$

图象的切线, 则 $-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$ 有解, 显然此方程无解,

故 B 中命题为真命题; 根据导数的定义可知 $\Delta x \rightarrow$

$$0 \text{ 时, } f'(1) = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2, \text{ 即 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时,}$$

$$\frac{f(1) - f(1+\Delta x)}{2\Delta x} = -1, \text{ 故 C 中命题为假命题; 令}$$

$g(x)=f(x)-x-1$, 则有 $g'(x)=f'(x)-1<0$,

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $g(1)=f(1)-1-1=$

0, 所以 $g(x)>0$ 的解集是 $(-\infty, 1)$, 故 $f(x)>$

$x+1$ 的解集是 $(-\infty, 1)$, 故 D 中命题为真命题.

故选 BD.

13. $2\ln 2 - 2$ 解析: $\because f'(x) = \frac{2f'(1)}{x} - 1, \therefore f'(1) =$

$$\frac{2f'(1)}{1} - 1, f'(1) = 1, \therefore f(x) = 2\ln x - x,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{x} - 1, \text{ 当 } x \in (0, 2) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x)$$

单调递增, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单

调递减, $\therefore$ 当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $2\ln 2 - 2$.

14. $\sin x + 1$ (答案不唯一) 解析: 依题意可知, 函数

$f(x) = \sin x + 1$ 有极大值 2, 也有极小值 0, 且满足

$\forall x \in [0, 1]$, 都有 $f(x) > 0$.

15. $(0, 4)$ 解析: 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上不单

调, 所以 $f'(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上有零

点, 即 $\sqrt{a} \in (0, 2)$, 所以 $a \in (0, 4)$.

16. $(-\infty, \ln 2]$ 解析: 问题转化为 $a \leq \frac{\ln x}{(x-1)^2}$ 在区

间 $(1, 2]$ 上恒成立, 令 $g(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^2}, x \in (1, 2]$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - 2\ln x}{(x-1)^3}, \text{ 令 } h(x) = 1 - \frac{1}{x} -$$

$$2\ln x, \text{ 当 } x \in (1, 2] \text{ 时, } h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{1-2x}{x^2} <$$

0, 所以 $h(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单调递减, 所以 $h(x) <$

$h(1)=0$, 所以 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单

调递减, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = \ln 2$, 所以 $a \leq \ln 2$,

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, \ln 2]$.

17. 解: (1) $\because f(x) = 2xf'(e) + \ln x$,

$$\therefore f'(x) = 2f'(e) + \frac{1}{x}, f'(e) = 2f'(e) + \frac{1}{e},$$

$$\therefore f'(e) = -\frac{1}{e},$$

$$\text{则 } f(x) = -\frac{2x}{e} + \ln x,$$

$$\therefore f(e) = -\frac{2e}{e} + \ln e = -1.$$

$$(2) \because f(x) = -\frac{2x}{e} + \ln x,$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{2}{e} + \frac{1}{x},$$

$$\therefore f(e^2) = -\frac{2e^2}{e} + \ln e^2 = 2 - 2e,$$

$$f'(e^2) = -\frac{2}{e} + \frac{1}{e^2},$$

∴ 曲线 $f(x)$ 在 $x=e^2$ 处的切线方程为 $y-(2-2e)=\left(-\frac{2}{e}+\frac{1}{e^2}\right)(x-e^2)$,
即 $(2e-1)x+e^2y-e^2=0$.

18. 解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=2x-\ln x$,

定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$,

令 $f'(x)>0$, 解得 $x>\frac{1}{2}$,

令 $f'(x)<0$, 解得 $0<x<\frac{1}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 的极小值是 $f(\frac{1}{2})=1+\ln 2$, 无极大值.

(2) 由 $\forall x>0$, 都有 $f(x)>0$, 得 $(\frac{\ln x}{x})_{\max}<a$,

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $0<x\leq e$ 时, $g'(x)\geq 0$,

当 $x>e$ 时, $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$,

所以 $a>\frac{1}{e}$,

即 a 的取值范围为 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

19. 解: (1) 由 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$,

得 $f'(x)=6x^2+2ax+b$,

由题知

$$\begin{cases} f(1)=2+a+b+1=-6, \\ f'(1)=6+2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-9, \\ 2a+b=-6, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=3, \\ b=-12, \end{cases}$$

经检验 $\begin{cases} a=3, \\ b=-12, \end{cases}$ 符合题意.

(2) 由 (1) 知, $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$,

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$,

故 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ 或 $x=1$,

$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	-2	(-2, 1)	1	(1, 2)	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	21	↘	极小值 -6	↗	5

∴ $f(2)=5<21=f(-2)$,

∴ $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 21, 最小值为 -6.

20. 解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=(-x^2+2x)e^x$,

则 $f'(x)=(-x^2+2)e^x$.

令 $f'(x)>0$, 得 $-x^2+2>0$,

解得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增,

则 $f'(x)\geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立.

即 $f'(x)=[-x^2+(a-2)x+a]e^x\geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立,

令 $g(x)=-x^2+(a-2)x+a$,

则 $g(x)=-x^2+(a-2)x+a\geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立.

所以 $\begin{cases} g(-1)=-1+(2-a)+a\geq 0, \\ g(1)=-1+(a-2)+a\geq 0, \end{cases}$

解得 $a\geq \frac{3}{2}$.

21. 解: (1) 由题意可知 $f'(x)=ax^2-\frac{1}{2}x+c$,

∴ $f(0)=0, f'(1)=0$,

$$\therefore \begin{cases} d=0, \\ a-\frac{1}{2}+c=0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} d=0, \\ c=\frac{1}{2}-a. \end{cases}$$

从而 $f'(x)=ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a$,

∴ $f'(x)\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

$$\therefore \begin{cases} a>0, \\ \Delta=\frac{1}{4}-4a\left(\frac{1}{2}-a\right)\leq 0, \end{cases}$$

解得 $a=\frac{1}{4}$,

∴ $c=\frac{1}{4}$.

综上可知, $a=c=\frac{1}{4}, d=0$.

(2) 由 (1) 知, $f'(x)=ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a, f'(0)=$

$$\frac{1}{2}-a, f(0)=0,$$

∴ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=(\frac{1}{2}-a)x$. ①

设直线 $y=(\frac{1}{2}-a)x$ 与曲线 $g(x)=\ln x$ 相切于点 $(x_0, \ln x_0)$,

$$\therefore g'(x)=\frac{1}{x},$$

∴ 曲线 $g(x)=\ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,

$$\text{即 } y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1. \quad \text{②}$$

$$\text{由①②得} \begin{cases} \frac{1}{2}-a=\frac{1}{x_0}, \\ \ln x_0-1=0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_0=e, a=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}.$$

22. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x+x^2-x$,

$$f'(x)=e^x+2x-1.$$

故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$(2) f(x) \geq \frac{1}{2}x^3+1 \text{ 等价于 } \left(\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1\right) \cdot e^{-x} \leq 1.$$

$$\text{设函数 } g(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1\right)e^{-x} (x \geq 0),$$

$$\text{则 } g'(x)=-\left(\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1-\frac{3}{2}x^2+2ax-1\right)e^{-x}=-\frac{1}{2}x[x^2-(2a+3)x+4a+2] \cdot$$

$$e^{-x}=-\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)e^{-x}.$$

(i) 若 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$.

则当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 单调递增; 而 $g(0)=1$,

故当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x) > 1$, 不符合题意.

(ii) 若 $0 < 2a+1 < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$,

则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x \in (2a+1, 2)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2a+1)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递减;

在 $(2a+1, 2)$ 上单调递增.

由于 $g(0)=1$,

所以 $g(x) \leq 1$ 当且仅当 $g(2)=(7-4a)e^{-2} \leq 1$,

$$\text{即 } a \geq \frac{7-e^2}{4}.$$

所以当 $\frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \leq 1$.

(iii) 若 $2a+1 \geq 2$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$,

$$\text{则 } g(x) \leq \left(\frac{1}{2}x^3+x+1\right)e^{-x}.$$

由于 $0 \in \left[\frac{7-e^2}{4}, \frac{1}{2}\right)$,

$$\text{故由(ii)可得 } \left(\frac{1}{2}x^3+x+1\right)e^{-x} \leq 1,$$

故当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \leq 1$.

综上, a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$.

专题三 统计与概率(A卷)

1. B 解析: 问题解决分为两步, 所以用乘法. 故选 B.

2. C 解析: 不同的选法共有 $C_8^2 C_6^1 C_5^1 = 840$ (种), 故选 C.

3. D 解析: $\because (x^2-4)\left(x+\frac{1}{x}\right)^9 = (x^2-4)(C_9^0 \cdot x^9 + C_9^1 \cdot x^7 + C_9^2 x^5 + C_9^3 x^3 + \dots + C_9^9 \cdot x^{-9})$, 故展开式中 x^5 的系数为 $C_9^3 - 4C_9^2 = 84 - 144 = -60$, 故选 D.

4. A 解析: 设 $A = \{\text{某天的空气质量为优良}\}$, $B = \{\text{随后一天的空气质量为优良}\}$, 则由题意知 $P(AB) = 0.6$, $P(A) = 0.75$, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.75} = 0.8$, 故选 A.

5. C 解析: C 选项中 $6-1=5 > 4$, 故选 C.

6. D 解析: 由方差的定义, 易得 D 正确, 故选 D.

7. A 解析: 根据正态分布可知 $P(|X| < 2) + 2P(X > 2) = 1$, 故 $P(X > 2) = \frac{1-a}{2}$, 故选 A.

8. C 解析: 据已知数据可得 $\bar{x} = 3.5$, $\bar{y} = 42$, 由于经验回归直线经过点 $(3.5, 42)$, 代入经验回归方程得 $42 = 9.4 \times 3.5 + \hat{a}$, 解得 $\hat{a} = 9.1$, 故经验回归方程为 $\hat{y} = 9.4x + 9.1$, 当 $x = 6$ 时, 该作物的产量大约为 $\hat{y} = 9.4 \times 6 + 9.1 = 65.5$, 故选 C.

9. ABD 解析: 相关指数 R^2 刻画回归效果, R^2 越大, 模型拟合效果越好, 故 C 选项错误, 故选 ABD.

10. AC 解析:对于选项 A,因为 $X \sim N(3, 4)$, 所以 X 的均值 $\mu = 3$, 故选项 A 正确; 对于选项 B, 由 $\sigma^2 = 4$, 得 $\sigma = 2$, 所以 X 的标准差是 $\sigma = 2$, 故选项 B 错误; 对于选项 C, 由正态分布的性质知, $P(X \leq 3) = P(X \geq 3) = \frac{1}{2}$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 由题意知 $P(-1 \leq X \leq 7) = P(3 - 2 \times 2 \leq X \leq 3 + 2 \times 2) \approx 95.5\% = 0.955$, 故选项 D 错误, 故选 AC.

11. BD 解析:由 4 个不同的小球随机投入 4 个不同的盒子, 则随机变量 X 可取 0, 1, 2, 3, 故 A 错误;

$$\text{则 } P(X=3) = \frac{C_4^1}{4^4} = \frac{1}{64},$$

$$P(X=2) = \frac{\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} A_4^2 + C_4^3 A_4^2}{4^4} = \frac{21}{64},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^2 A_4^3}{4^4} = \frac{9}{16},$$

$$P(X=0) = \frac{A_4^4}{4^4} = \frac{3}{32}, \text{ 故 B 正确, C 错误;}$$

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{64} + 2 \times \frac{21}{64} + 1 \times \frac{9}{16} + 0 \times \frac{3}{32} = \frac{81}{64},$$

故 D 正确, 故选 BD.

12. BCD 解析:对于选项 A, 利用方案甲, 化验次数为 4 次的概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5} = 0.4$, 故选项 A 错误; 对于选项 B, 利用方案甲, 1 次抽中的概率为 $\frac{1}{5}$, 2 次抽中的概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$, 3 次抽中的

概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$, 4 次抽中的概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$, 所以平均检查次数为 $\frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} +$

$3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$, 故选项 B 正确; 对于选项 C, 利用方案乙, 化验次数为 2 次的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^2} \times$

$\frac{1}{3} + \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 利用方案乙, 1 次抽中的概率为 0, 2 次抽中的概率为 0.6, 3 次抽中的概率为 0.4, 所以平均检查次数为 $1 \times 0 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.4 = 2.4$, 故选项 D 正确, 故选 BCD.

13. 360 解析:由题意知前三次中必有两次掷的点数是相同的, 即有 C_3^2 种可能位置, 这三个不同的数共有 A_3^3 种选法, 由分步乘法计数原理可得, 这四次点数的所有不同结果的种数为 $C_3^2 A_3^3 = 360$.

14. 165 解析:由于 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^9 + x^{10} = 1 -$

$$[(x+1)-1] + [(x+1)-1]^2 - [(x+1)-1]^3 + \cdots - [(x+1)-1]^9 + [(x+1)-1]^{10}, \text{ 故 } (x+1)^2 \text{ 项的系数}$$

$$a_2 = C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + \cdots + C_{10}^8 = 165.$$

15. 68 解析:利用经验回归方程过定点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 求解.

因为 $\bar{x} = 30$, 代入经验回归方程得 $\bar{y} = 0.67 \times 30 + 54.9 = 75$, 所以模糊的数据为 $5 \times 75 - (62 + 75 + 81 + 89) = 68$.

16. 82 解析:据题意对 10 道题中的任意一道题代表队得分的情况为 $P(X=10) = 1 - (1-0.4) \times (1-0.4) \times (1-0.5) = 0.82$, 故 $P(X=0) = 1 - 0.82 = 0.18$, 即对一道题来说代表队得分的期望值为 $10 \times 0.82 = 8.2$, 故这 10 道题代表队有望得 $10 \times 8.2 = 82$ (分).

17. 解:依题意可知, 一个周期内总投入为 $1\,000 \times 3 + 1\,000 + 800 + 600 = 5\,400$ (元),

要使一个扭转周期内盈利, 则三年的总收入要大于 5 400 元,

由于每年的收入情况共有 3 种, 分别是 3 000 元、1 500 元、2 000 元,

所以不盈利的情况可能是三年每年都是收入 1 500 元或两年收入 1 500 元、另一年收入 2 000 元,

因此在一个扭转周期内每亩产品不盈利的概率为 $P = 0.3^3 + C_3^2 \times 0.3^2 \times 0.2 = 0.081$.

18. 解:(1) $P(\text{“当天商店不进货”}) = P(\text{“当天商品销售量为 0 件”}) + P(\text{“当天商品销售量为 1 件”}) = \frac{1}{20} + \frac{5}{20} = \frac{3}{10}.$

(2) 由题意知, X 的可能取值为 2, 3.

$$P(X=2) = P(\text{“当天商品销售量为 1 件”}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$P(X=3) = P(\text{“当天商品销售量为 0 件”}) + P(\text{“当天商品销售量为 2 件”}) + P(\text{“当天商品销售量为 3 件”}) = \frac{1}{20} + \frac{9}{20} + \frac{5}{20} = \frac{3}{4}.$$

故 X 的分布列为

X	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$X \text{ 的数学期望为 } E(X) = 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{11}{4}.$$

19. 解:(1) 因为 $X \sim N(70, 100)$,

故 $\mu = 70, \sigma = 10$.

则 $P(X \geq 90) = P(X \leq 50)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [1 - P(50 < X < 90)] \\
&= \frac{1}{2} [1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)] \\
&\approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.955) \\
&= 0.0225.
\end{aligned}$$

则 $16 \div 0.0225 \approx 711$ (人),

故此参赛的学生总数约为 711 人.

(2) 因为 $P(X \geq 80) = P(X \leq 60)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [1 - P(60 < X < 80)] \\
&= \frac{1}{2} [1 - P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)] \\
&\approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.683) \\
&= 0.1585,
\end{aligned}$$

$711 \times 0.1585 \approx 113$ (人),

则此次竞赛获奖励的学生约有 113 人.

20. 解: (1) 由于 $\bar{x} = \frac{1}{6} \times (8 + 8.2 + 8.4 + 8.6 + 8.8 + 9) = 8.5$,

$$\bar{y} = \frac{1}{6} \times (90 + 84 + 83 + 80 + 75 + 68) = 80,$$

$$\text{又 } \hat{b} = -20,$$

$$\text{所以 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 80 + 20 \times 8.5 = 250,$$

$$\text{则经验回归方程为 } \hat{y} = -20x + 250.$$

(2) 设工厂获得的利润为 L 元,

$$\begin{aligned}
\text{依题意得 } L &= x(-20x + 250) - 4(-20x + 250) \\
&= -20x^2 + 330x - 1000 \\
&= -20(x - 8.25)^2 + 361.25.
\end{aligned}$$

当且仅当 $x = 8.25$ 时, L 取得最大值,

故当单价定为 8.25 元时, 工厂可获得最大利润.

21. 解: 建立性别与态度的 2×2 列联表如下表:

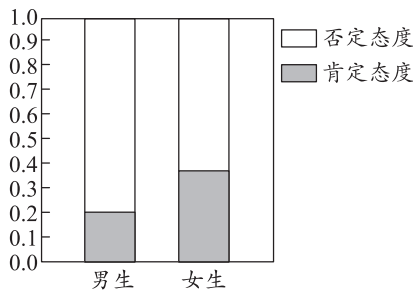
性别	态度		合计
	肯定	否定	
男生	22	88	110
女生	22	38	60
合计	44	126	170

根据列联表中所给的数据, 可求出男生中作肯定

态度的频率为 $\frac{22}{110} = 0.2$,

女生中作肯定态度的频率为 $\frac{22}{60} \approx 0.37$.

作等高堆积条形图如图所示,



其中两个阴影条形的高分别表示男生和女生中作肯定态度的频率,

比较图中阴影条形的高可以发现, 女生中作肯定态度的频率明显高于男生中作肯定态度的频率, 因此可以认为性别与态度有关系.

根据列联表中的数据得到 $\chi^2 = \frac{170 \times (22 \times 38 - 22 \times 88)^2}{110 \times 60 \times 44 \times 126} \approx 5.622 > 3.841 = \chi_{0.05}^2$.

因此, 在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为在该题目的反应上性别和态度有关系.

22. 解: (1) 设至少有一张彩票中奖为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = 1 - 0.5^2 = 0.75.$$

(2) 设福彩中心卖出一张彩票可能获得的资金为 ξ 元,

$$\text{则 } \xi \text{ 可以取 } 5, 0, -45, -145,$$

故 ξ 的分布列为

ξ	5	0	-45	-145
P	50%	50% - 2% - p	2%	p

所以 ξ 的数学期望为 $E(\xi) = 5 \times 50\% + 0 \times (50\% - 2\% - p) + (-45) \times 2\% + (-145) \times p = 2.5 - 90\% - 145p = 1.6 - 145p$,

所以当 $1.6 - 145p > 0$ 时,

$$\text{即 } p < \frac{8}{725},$$

所以当 $0 < p < \frac{8}{725}$ 时, 福彩中心可以获取资金资助福利事业.

专题三 统计与概率(B卷)

1. A 解析: 因为随机变量 X 服从二项分布, 因此 $E(X) = 5 \times 0.3 = 1.5$, 随机变量 Y 服从正态分布, 因此 $E(Y) = 1$, 所以相加为 2.5, 故选 A.

2. C 解析: 若函数 $f(x) = x^2 + 2x + \xi$ 不存在零点, 则 $\Delta = 2^2 - 4\xi < 0$, 解得 $\xi > 1$, 由随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 可得函数 $f(x) = x^2 + 2x + \xi$ 不存在

零点的概率为 $\frac{1}{2}$, 故选 C.

3. D 解析: 由题意, 得 $2^n = 256$, 解得 $n = 8$. 即 $\left(3\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中第 7 项为 $C_8^6 (3\sqrt[3]{x^2})^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = 9(-1)^6 \cdot C_8^6 x^{\frac{4}{3}-3} = 252x^{-\frac{5}{3}}$. 故展开式中第 7 项的系数是 252, 故选 D.

4. D 解析: 依题意, 设这次参加该单位招聘面试的人数是 n , 则有 $\frac{C_2^2 \cdot C_{n-2}^1}{C_n^3} = \frac{1}{70} (n \geq 3)$, 即 $n(n-1) = 420 = 21 \times 20$, 因此 $n = 21$, 即这次参加该单位招聘面试的人数是 21, 故选 D.

5. B 解析: 利用临界值表判断. 因为 $7.069 > 6.635$, 所以至少有 99% 的把握认为“学生性别与支持某一活动有关”, 即认为“学生性别与支持某一活动有关”犯错误的概率不超过 1%, 故选 B.

6. D 解析: 由概率的性质知 $\sum_{k=1}^5 P(\xi = k) = 1$, 即 $a[(11-2 \times 1) + (11-2 \times 2) + \cdots + (11-2 \times 5)] = 1$, 解得 $a = \frac{1}{25}$, 所以 $P\left(\frac{5}{2} < \xi < \frac{13}{3}\right) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{1}{25}(11-2 \times 3) + \frac{1}{25}(11-2 \times 4) = \frac{8}{25}$, 故选 D.

7. C 解析: 由正态分布 $N(-2, 4)$ 知, $\mu = -2, \sigma = 2$, 结合正态分布所对应曲线 C 的性质可知阴影部分的概率为 $P(0 < X \leq 2) = P(-2 < X \leq 2) - P(-2 < X \leq 0) \approx \frac{1}{2} \times 0.9545 - \frac{1}{2} \times 0.6827 = 0.1359$, 则所求的点的个数的估计值为 $10\,000 \times 0.1359 = 1\,359$, 故选 C.

8. B 解析: $\because \bar{x} = \frac{6+8+10+12}{4} = 9, \therefore \bar{y} = -0.7 \times 9 + 10.3 = 4, \therefore$ 样本点的中心为 $(9, 4), \therefore$ D 正确; 由 $\frac{6+m+3+2}{4} = 4$, 解得 $m = 5, \therefore$ B 错误; $\because y$ 随 x 的增大而减小, $\therefore$ A 正确; $\because$ 当 $x = 11$ 时, $\hat{y} = -0.7 \times 11 + 10.3 = 2.6, \therefore$ C 正确, 故选 B.

9. ABC 解析: 由于 $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{2}$, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}$, 故选 ABC.

10. AC 解析: 方差反映一组数据的波动大小, 将一组数据中的每个数据都加上或减去同一个常数后, 方差不变, 故 A 正确; 一个经验回归方程 $\hat{y} =$

$3-5x$, 变量 x 增加 1 个单位时, y 平均减少 5 个单位, 故 B 不正确; 经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 必过样本点的中心, 故 C 正确; 根据线性回归分析中样本相关系数的定义可知 $|r|$ 越接近于 1, 相关程度越高, 故 D 不正确, 故选 AC.

11. ABD 解析: 由已知数据可得有 $1-0.05=95\%$ 的把握认为“患肺病与吸烟有关”, 即只能推出选项 C 中的结论, 故选 ABD.

12. ABD 解析: 依题意, 每一个顶点有 3 个相邻的顶点, 其中两个在同一底面. 所以当点 Q 在下底面时, 随机移动一次仍在下底面的概率为 $\frac{2}{3}$, 在上底面时, 随机移动一次回到下底面的概率为 $\frac{1}{3}$, 所以 $P_1 = \frac{2}{3}$, 故 A 选项正确;

对于 B, $P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, 故 B 选项正确;

对于 C, $P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}(1-P_n) = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}$, 故 C 选项错误;

对于 D, 点 Q 由点 A 移动到点 C_1 处至少需要 3 次, 任意折返都需要 2 次移动, 所以移动 4 次后不可能到达点 C_1 , 所以点 Q 移动 4 次后恰好位于 C_1 点的概率为 0. 故 D 选项正确. 故选 ABD.

13. $\frac{1}{3}$ 解析: 由题意得 $\begin{cases} np=30, \\ np(1-p)=20 \end{cases} \Rightarrow p=\frac{1}{3}$.

14. $\frac{2}{5}$ 解析: x^2 项的系数为 $C_6^1 a + (-1) \times C_6^2 \times a^2$, 令 $C_6^1 a + (-1) \times C_6^2 \times a^2 = 0$, 解得 $a = \frac{2}{5}$ 或 $a = 0$ (舍去).

15. 24 解析: 将 8 与 9 捆绑在一起有 A_2^2 种方法, 将捆绑好的 8, 9 与 1 排列有 $A_3^3 A_2^2$ 种排法, 再将字母 A, Y 插入其 3 个空中, 共有 $A_3^2 A_2^2 A_3^3 = 24$ (种) 不同的排法, 即可得构成的号牌个数是 24.

16. 0.8186 解析: $\because X \sim N(25, 0.2^2), \therefore \mu = 25, \sigma = 0.2. \therefore P(24.8 \leq X \leq 25.4) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times (0.6827 + 0.9545) = 0.8186$.

17. 解: (1) 由 $A_n^5 = 56C_n^7$ 得 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 56 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$,

即 $(n-5)(n-6)=90$,

解得 $n=15$ 或 $n=-4$ (舍去),

$\therefore n=15$.

(2) 当 $n=15$ 时, 由已知有 $(1-2x)^{15}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{15}x^{15}$,

令 $x=1$ 得 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=-1$,

令 $x=0$ 得 $a_0=1$,

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=-2$.

18. 解: (1) 记事件 A_i : 乙第 i 次投中 ($i=1, 2, 3$),

则 $P(A_i)=\frac{2}{5}$ ($i=1, 2, 3$),

事件 A_1, A_2, A_3 相互独立,

$P(\text{乙直到第3次才投中})$

$=P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3)$

$=P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3)$

$=\left(1-\frac{2}{5}\right) \times \left(1-\frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5}$

$=\frac{18}{125}$.

(2) 设甲投中的次数为 ξ , 乙投中的次数为 η ,

则 $\eta \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$,

$\therefore$ 乙投中次数的数学期望 $E(\eta)=3 \times \frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

ξ 的可能取值是 $0, 1, 2, 3$,

$P(\xi=0)=\left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$,

$P(\xi=1)=C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{2}\right) + C_2^2 \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2}=\frac{4}{9}$,

$P(\xi=2)=C_2^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) + C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2}=\frac{5}{18}$,

$P(\xi=3)=C_2^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2}=\frac{1}{18}$,

$\therefore$ 甲投中次数的数学期望 $E(\xi)=0 \times \frac{2}{9} + 1 \times$

$\frac{4}{9} + 2 \times \frac{5}{18} + 3 \times \frac{1}{18}=\frac{7}{6}$,

$\therefore E(\eta) > E(\xi)$,

$\therefore$ 在比赛前, 从胜负的角度考虑, 应支持乙.

19. 解: (1) 设经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,

因为 $\bar{y}=3.4, \bar{x}=6$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2}=\frac{112-102}{200-180}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

又因为 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3.4-6 \times \frac{1}{2}=0.4$,

所以利润额 y 对销售额 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.5x+0.4$.

(2) 当销售额为 10 千万元时,

利润额为 $\hat{y}=0.5 \times 10+0.4=5.4$ (百万元).

20. 解: (1) $P(80 \leq X < 85)=0.5-P(X \leq 75)=0.5-0.3=0.2$,

$P(85 \leq X < 95)=0.3-0.1=0.2$,

所以所求概率 $P=A_3^3 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.1=0.024$.

(2) $P(75 < X < 85)=1-2P(X \leq 75)=0.4$,

所以 ξ 服从二项分布 $B(3, 0.4)$,

$P(\xi=0)=0.6^3=0.216$,

$P(\xi=1)=C_3^1 \times 0.4 \times 0.6^2=0.432$,

$P(\xi=2)=C_3^2 \times 0.4^2 \times 0.6=0.288$,

$P(\xi=3)=0.4^3=0.064$,

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

$E(\xi)=3 \times 0.4=1.2$.

21. 解: (1) $\therefore$ 从评分等级 $(4, 5]$ 的 20 人中随机选取 2 人, 有 $C_{20}^2=190$ (种) 不同的结果,

其中恰有 1 人为男性的有 $C_{12}^1 C_8^1=96$ (种) 不同的结果,

故所求概率为 $\frac{96}{190}=\frac{48}{95}$.

(2) 2×2 列联表如下:

	满意该商品	不满意该商品	总计
女性	32	18	50
男性	20	30	50
总计	52	48	100

假设 H_0 : 是否满意该商品与买家的性别无关,

则 $\chi^2=\frac{100 \times (32 \times 30 - 20 \times 18)^2}{50 \times 50 \times 52 \times 48} \approx 5.769 > 3.841$.

因此, 在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为满意该商品与性别有关.

22. 解: (1) “当 $k=4$ 时, $S_k \leq 5$ ” 表示储蓄罐中有 4 枚 1 元硬币或 3 枚 1 元硬币和 2 枚 5 角硬币,

故所求概率 $P = 1 - C_4^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{33}{81}$.

(2)依题意, $S_5 \geq 7$ 的概率为 $P = 1 - C_5^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{131}{243}$.

若有 2 次抽到 3 号卡, 即 2 次放置 5 角硬币, 3 次放置 1 元硬币,

则在前 3 次中放了 2 次 1 元和 1 次 5 角, 后 2 次放了 1 次 1 元和 1 次 5 角,

即 2 次放 5 角, 一次在前 3 次, 另一次在后 2 次,

故其概率为 $C_3^1 \times C_2^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{48}{243}$;

若有 3 次抽到 3 号卡, 即 3 次放置 5 角硬币, 2 次放置 1 元硬币, 必须在前 3 次放了 2 次 1 元和 1 次 5 角, 后 2 次放了 2 次 5 角,

即 2 次放 1 元都在前 3 次,

故所求概率为 $C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{243}$,

其他情况不可能使得 $X_n = Y_n$,

故 $P(X_n = Y_n) = \frac{\frac{48}{243} + \frac{12}{243}}{\frac{131}{243}} = \frac{60}{131}$.

期中检测卷(A 卷)

1. A 解析: 由数列的前 5 项可得该数列的一个通项公式为 $\frac{(-1)^n}{n}$, 故选 A.

2. D 解析: $a_2 = 1 + \frac{(-1)^2}{a_1} = 2, a_3 = 1 + \frac{(-1)^3}{a_2} = \frac{1}{2}$,

$a_4 = 1 + \frac{(-1)^4}{a_3} = 3, a_5 = 1 + \frac{(-1)^5}{a_4} = \frac{2}{3}$, 故选 D.

3. D 解析: 由于 $y' = 2x - 2$, 得在 $(1, 3)$ 处的切线斜率为 0, 故切线的倾斜角为 0° , 故选 D.

4. D 解析: 由题意可得, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) = k - \frac{1}{x} \geq 0$, 所以 $k \geq \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 因为 $\frac{1}{x} \in (0, 1)$, 所以 $k \geq 1$, 故选 D.

5. C 解析: 由 $\sqrt{3}$ 是 $3^a, 3^b$ 的等比中项得 $3^a \cdot 3^b = 3$, 又 $a > 0, b > 0$, 所以 $a + b = 1$. 所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b) = 5 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} =$

9, 当且仅当 $b = 2a$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 9, 故选 C.

6. C 解析: $f'(x) = 3x^2 - 2a$, 因为函数在 $(0, 1)$ 内有极小值, 所以 $\begin{cases} f'(0) < 0, \\ f'(1) > 0, \end{cases}$ 得 $0 < a < \frac{3}{2}$, 故选 C.

7. C 解析: 令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, 得 $x = \pm 1$. $f(-1) = 3, f(1) = -1, f(-3) = -17, f(0) = 1$. $\therefore$ 最大值为 3, 最小值为 -17, 故选 C.

8. D 解析: 由题意可得 $a_1 + a_2 + \dots + a_{99} + a_{100} = -2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots - 2^{99} + 2^{100} = \frac{-2[1 - (-2)^{100}]}{1 - (-2)} = \frac{2}{3}(2^{100} - 1)$, 故选 D.

9. ABD 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意得 $2\left(\frac{1}{2}a_3\right) = 3a_1 + 2a_2$, 即 $a_1q^2 = 3a_1 + 2a_1q$. 因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 所以 $a_1 > 0$, 且 $q > 0$, 故 A, B 正确; 由 $q^2 - 2q - 3 = 0$, 解得 $q = 3$ 或 $q = -1$ (舍去), 所以 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1q^2}{a_1q} = q = 3, \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1q^5}{a_1q^3} = q^2 = 9$, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.

10. AC 解析: 由 $S_4 = S_3 - \frac{1}{S_3}$ 得 $a_4 = -\frac{1}{S_3}$, 则显然等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 则有 $a_1q^3 = -\frac{1}{a_1(1-q^3)}$, 即 $a_1^2q^3 = -\frac{1}{1+q+q^2}$, 即 $a_1^2q^3(1+q+q^2) = -1$, 易知 $q < 0$, 当 $q \leq -1$ 时, $q^3 \leq -1, 1+q+q^2 \geq 1$, 因为 $a_1 > 1$, 则 $a_1^2q^3(1+q+q^2) = -1$ 不可能成立, 所以 $-1 < q < 0$, 则 $a_1 - a_3 = a_1(1 - q^2) > 0, a_2 - a_4 = a_1q(1 - q^2) < 0$, 所以 $a_1 > a_3, a_2 < a_4$, 故选 AC.

11. AB 解析: 由题意得, 当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增; 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减. 因为函数 $y = f(x-1)$ 为偶函数, 即函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 所以 $f(-2) = f(0) < f(1)$, 故选 AB.

12. ABC 解析: 依题意, 记 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则当 $x > 0$ 时, $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0$, $g(x)$ 单调递增. 当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时, 有 $x_1 + x_2 > x_1 > 0, g(x_1 + x_2) > g(x_1), \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}, x_1 f(x_1+x_2) >$

$(x_1+x_2)f(x_1)$ ①,同理有 $x_2f(x_1+x_2)>(x_1+x_2)\cdot f(x_2)$ ②,由①+②得 $(x_1+x_2)\cdot f(x_1+x_2)>(x_1+x_2)\cdot [f(x_2)+f(x_1)]$,即 $f(x_2)+f(x_1)<f(x_1+x_2)$,故选 ABC.

13. 2^n 解析: $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 2 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2 + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n$.

14. $(1,0)$ 解析: 由于 $f'(x) = 4x^3 - 1$, 据题意可得 $f'(x_0) = 4x_0^3 - 1 = 3$, 解得 $x_0 = 1$, 故切点坐标为 $(1,0)$.

15. 4 解析: 由 $\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{4n-1}{2n-1}$ 可得 $d = 2a_1$, 故 $\frac{S_{2n}}{S_n} = 2 \times \frac{2a_1 + (2n-1)d}{2a_1 + (n-1)d} = 4$.

16. $(-\infty, 0)$ 解析: 由题意可得 $y' = 2ax + \frac{1}{x} = 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上有解, 所以 $2a = -\frac{1}{x^2} < 0$, $x \in (0, +\infty)$, 所以 $a < 0$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$.

17. 解: (1) $\because b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

又 $\because A \in (0, \pi)$,

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由已知得 $a_1 = \frac{1}{\cos A} = 2$, 且 $a_4^2 = a_2 \cdot a_8$,

$\therefore (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d)$, 且 d 不为零, 解得 $d = 2$,

$$\therefore a_n = 2n.$$

$$\therefore \frac{4}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

18. 解: (1) $f'(x) = x^2 + a$,

$\because f(x)$ 在 $x=2$ 处有极值,

$$\therefore f'(2) = 2^2 + a = 0,$$

$$\therefore a = -4,$$

又 $f(x)$ 经过点 $(0,4)$,

故 $b=4$,

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4.$$

(2) 由(1)知 $f'(x) = x^2 - 4$,

$$\text{令 } f'(x) = 0,$$

$$\therefore x = \pm 2,$$

又 $x \in [0, 3]$,

$$\therefore x = 2.$$

列表如下:

x	0	(0,2)	2	(2,3)	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	4	$\searrow$	极小值 $-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	1

$$\therefore f(x)_{\max} = 4, f(x)_{\min} = -\frac{4}{3},$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [0, 3] \text{ 上的值域为 } \left[-\frac{4}{3}, 4\right].$$

19. 解: (1) $\because \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$,

$\therefore \{a_n\}$ 是公比为 2, 首项为 2 的等比数列,

$\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ($n=1$ 时, 此式亦满足).

(2) 由(1)知 $f(a_n) = \log_2 2^n - 2^n + 1 = (n+1) - 2^n$,

$$\therefore f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)$$

$$= [2+3+\cdots+(n+1)] - (2+2^2+\cdots+2^n)$$

$$= \frac{n[2+(n+1)]}{2} - \frac{2-2^{n+1}}{1-2}$$

$$= \frac{n(n+3)}{2} - 2^{n+1} + 2$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2 - 2^{n+1}.$$

20. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $g(x) = 1 - 2x - \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 = \frac{-(2x-1)(x+1)}{x^2}.$$

由 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{2}$,

由 $g'(x) < 0$ 得 $x > \frac{1}{2}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{1}{2})$, 单调

递减区间是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$(2) f'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{a-x}{x^2}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上小于零恒成立,

此时函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上无极值;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < a$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > a$,

即函数 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减,

要使函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上无极值, 只要 $a \geq 2$ 即可.

故所求的 a 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

21. 解: (1) 由 $S_n + a_n = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, ①得

$$S_{n+1} + a_{n+1} = 1. \quad ②$$

$$② - ① \text{ 得 } S_{n+1} - S_n + a_{n+1} - a_n = 0,$$

$$\text{即 } 2a_{n+1} = a_n.$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 为等比数列, 公比 } q = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } S_1 + a_1 = 2a_1 = 1,$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$(2) T_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 3b_2 = 15, b_2 = 5,$$

$$\text{故可设 } b_1 = 5 - d, b_3 = 5 + d,$$

$$\therefore b_1, \frac{1}{a_2}, b_3 \text{ 成等比数列},$$

$$\therefore b_1 \cdot b_3 = \left(\frac{1}{a_2}\right)^2,$$

$$\text{即 } (5-d)(5+d) = 16,$$

$$25 - d^2 = 16, d^2 = 9.$$

$$\therefore d > 0,$$

$$\therefore d = 3.$$

$$\therefore b_1 = 5 - d = 2, b_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1.$$

$$\therefore c_n = \frac{3}{b_n b_{n+1}} = \frac{3}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}.$$

22. 解: (1) $f'(x) = (x+1)e^x + 2ax - 1$.

$$\text{当 } a = -\frac{1}{2} \text{ 时},$$

$$f'(x) = (x+1)e^x - (x+1) = (x+1)(e^x - 1).$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 或 } x < -1 \text{ 时}, f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时}, f'(x) < 0,$$

则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 0)$.

$$(2) \text{ 设 } g(x) = f'(x) - f(x) - (4a+1)x = e^x - ax^2 - 2ax - 1,$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x - 2ax - 2a = u(x).$$

$$u'(x) = e^x - 2a, x \geq 0 \text{ 时}, e^x \geq 1,$$

$$① \text{ 当 } 2a \leq 1, \text{ 即 } a \leq \frac{1}{2} \text{ 时}, u'(x) \geq 0,$$

$$g'(x) = e^x - 2ax - 2a \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递增},$$

$$g'(x) \geq 1 - 2a \geq 0,$$

$$g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递增},$$

$$\text{所以 } g(x) \geq g(0) = 0 \text{ 恒成立};$$

$$② \text{ 当 } 2a > 1, \text{ 即 } a > \frac{1}{2} \text{ 时},$$

$$\text{令 } u'(x) = 0, \text{ 则 } x = \ln 2a.$$

$$\text{当 } x \in [0, \ln 2a) \text{ 时}, u'(x) < 0, g'(x) = e^x - 2ax - 2a \text{ 在 } [0, \ln 2a) \text{ 上单调递减},$$

$$\text{所以 } g'(x) = e^x - 2ax - 2a \leq g'(0) = 1 - 2a < 0,$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } [0, \ln 2a) \text{ 上单调递减},$$

$$\text{所以 } g(x) \leq g(0) = 0 \text{ 这与 } g(x) \geq 0 \text{ 恒成立矛盾}.$$

$$\text{综上可得, } a \text{ 的取值范围是 } \left\{a \mid a \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

期中检测卷(B卷)

1. C 解析: 因为 $m = -8, n = -2$, 所以 m 与 n 的等比中项为 $\pm \sqrt{mn} = \pm 4$. 故选 C.

2. B 解析: $\because f'(x) = -\sin x + 4, \therefore f'(\pi) = 4$,

$$\text{则 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2\Delta x) - f(\pi)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2\Delta x) - f(\pi)}{2\Delta x} =$$

$$2f'(\pi) = 8. \text{ 故选 B.}$$

3. C 解析: 若 $d < 0$, 则 $a_{n+1} - a_n = d < 0$, 即 $a_{n+1} < a_n$, $\therefore 2^{a_{n+1}} < 2^{a_n}$, 即 $b_{n+1} < b_n$, $\therefore$ 充分性成立; 若 $b_{n+1} < b_n$, 即 $\lg 2^{a_{n+1}} < \lg 2^{a_n}$, 则 $a_{n+1} < a_n$, 即 $a_{n+1} - a_n = d < 0$, 必要性成立. 因此“ $d < 0$ ”是“ $b_{n+1} < b_n$ ”的充要条件. 故选 C.

4. B 解析: $a_n = (3n-19) \cdot 5^n$, 当 $n \leq 6$ 时, 有 $a_n < 0$, 当 $n \geq 7$ 时, 有 $a_n > 0$, 则当 $n = 6$ 时, S_n 取得最小值. 故选 B.

5. D 解析: 结合题图可知 $f'(1) < \frac{f(3) - f(1)}{3-1} < f'(3)$, 故 $2f'(1) < f(3) - f(1) < 2f'(3)$, 即 $a < c < b$, 故选 D.

6. B 解析: 由 $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 得 $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} = -1, a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} = 2, \dots$, 则数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列, 又 $a_1 a_2 a_3 = 2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$, 且 $2022 = 3 \times 674, \therefore T_{2022} = (-1)^{674} = 1$. 故选 B.

7. B 解析: 因为 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a-3)x$, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a - 3$. 因为 $f'(x)$ 是偶函数, 所以 $f'(-x) = f'(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 即 $3(-x)^2 + 2a(-x) + a - 3 = 3x^2 + 2ax + a - 3$, 即 $4ax = 0$, 所以 $a = 0$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 3$. 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -1$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为

$(-\infty, -1), (1, +\infty)$. 故选 B.

8. A 解析: $f(x) < k - \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立等价

于 $f(x) + \frac{1}{x^2} < k$, 即 $\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} < k$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒

成立. 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} (x > 0)$, 则 $g'(x) =$

$-\frac{1+2\ln x}{x^3}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in$

$(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 处取

得极大值也是最大值, 且 $g(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e}{2}$, 所以 $k >$

$\frac{e}{2}$. 故选 A.

9. BD 解析: 因为 $S_{17} = S_{18}$, 所以 $S_{18} - S_{17} = 0$, 所以 $a_{18} = 0$. 因为公差 $d \neq 0$, 所以 $a_{17} = a_{18} - d = -d \neq 0$,

故 A 不正确; $S_{35} = \frac{35(a_1 + a_{35})}{2} = \frac{35 \times 2a_{18}}{2} =$

$35a_{18} = 0$, 故 B 正确; $a_{17} - a_{19} = -2d \neq 0$, 故 C 不正

确; $S_{19} - S_{16} = a_{17} + a_{18} + a_{19} = 3a_{18} = 0$, 故 D 正确.

故选 BD.

10. CD 解析: 对于 A, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$; 当

$x \in (2, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递

增, 在 $(2, 3)$ 上单调递减, A 错误; 对于 B, 由 A 知

$f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, $\therefore f(1) < f(2)$, B 错误;

对于 C, $\because f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 3)$ 上单

调递减, $\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值, C 正确; 对

于 D, 由题图知, 当 $x \in (-2, -1) \cup (2, 4)$ 时,

$f'(x) < 0$; 当 $x \in (-1, 2) \cup (4, 5)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, -1), (2, 4)$ 上单调递减, 在 $(-1,$

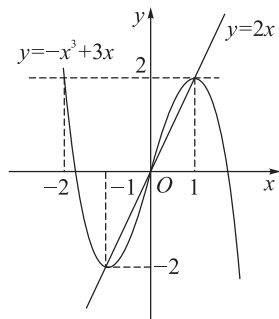
$2), (4, 5)$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $(-2, 5)$ 上有

$x=-1$ 和 $x=4$ 两个极小值点, D 正确. 故选 CD.

11. ABC 解析: 对于 $y = -x^3 + 3x$, 求导得 $y' = -3x^2 + 3$. 令 $y' = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$. 列表得:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
$y = -x^3 + 3x$	单调递减	极大值	单调递增	极大值	单调递减

在同一个坐标系内作出 $y = -x^3 + 3x$ 和 $y = 2x$ 的图象如图所示:



令 $-x^3 + 3x = 2x$, 解得 $x = \pm 1$ 或 $x = 0$. 由图象可知

$y = -x^3 + 3x$ 的极大值为 2, 令 $-x^3 + 3x = 2$,

解得 $x = -2$ 或 $x = 1$. 因为函数 $f(x) =$

$\begin{cases} -x^3 + 3x, & x \geq a, \\ 2x, & x < a \end{cases}$ 有最大值, 所以函数 $f(x)$ 的最

大值必在 $[a, +\infty)$ 上取得, 只需满足 $a \leq 1$, 故实数

a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$. 故选 ABC.

12. BC 解析: $\frac{1}{a_{n+1} \cdot a_n} = 2^n \Rightarrow \frac{1}{a_{n+2} \cdot a_{n+1}} = 2^{n+1}$, 故

$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{2}$, 又 $a_1 = 1$, 故 $a_2 = \frac{1}{2}$, 故 $a_n =$

$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n=2k-1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k, \end{cases} k \in \mathbb{N}^*$, 所以 A 错误, B 正

确; $S_n = \begin{cases} 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}, & n=2k-1, \\ 3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k, \end{cases} k \in \mathbb{N}^*$, 所以 C

正确, D 错误. 故选 BC.

13. 5 或 6 解析: 由题设, $a_n = (n-1)(n-6), n \in \mathbb{N}^*$,

所以当 $1 < n < 6$ 时 $a_n < 0$; 当 $n=1$ 或 $n=6$ 时 $a_n =$

0; 当 $n > 6$ 时 $a_n > 0$. 综上, 当 $n=5$ 或 $n=6$ 时 S_n

最小.

14. 5 解析: 因为 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$, 所以

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$, 又函数 $f(x) = x^3 + ax^2 +$

$3x - 9$ 在 $x = -3$ 处取得极值, 所以 $f'(-3) =$

$27 - 6a + 3 = 0$, 即 $a = 5$. 检验可知 $a = 5$ 符合题意.

15. 45 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 若 $q = -1$,

当 n 为偶数时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 0$, 不符合题意,

所以 $q \neq -1$. 由等比数列前 n 项和的性质可知,

$S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$ 成等比数列, 且公比

为 $\frac{S_8 - S_4}{S_4} = 2$, 所以 $S_{12} - S_8 = 3 \times 2^2 = 12, S_{16} -$

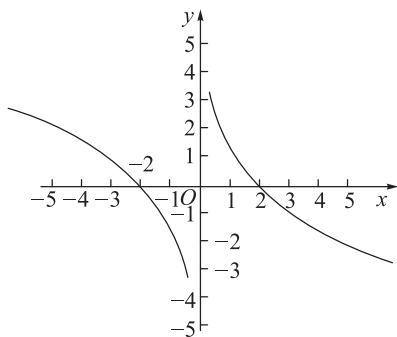
$S_{12} = 3 \times 2^3 = 24$, 因此, $S_{16} = S_4 + (S_8 - S_4) +$

$$(S_{12} - S_8) + (S_{16} - S_{12}) = 3 + 6 + 12 + 24 = 45.$$

16. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 解析: 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } xf'(x) <$$

$f(x)$, 所以 $g'(x) < 0$, 可得函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 又因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(2) = 0$, 所以 $g(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 且 $g(2) = 0$, 则 $g(x)$ 的大致图象如图所示, 所以不等式 $xf(x) < 0$ 的解集是 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.



17. (1) 解: $a_2 = \frac{a_1}{2a_1 + 1} = \frac{1}{3}$,

$$a_3 = \frac{a_2}{2a_2 + 1} = \frac{1}{5},$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2a_3 + 1} = \frac{1}{7}.$$

(2) 证明: 由题意知 $a_n \neq 0$,

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_n} = \frac{2a_{n-1} + 1}{a_{n-1}} = 2 + \frac{1}{a_{n-1}},$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = 2 (n \geq 2),$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.

18. 解: (1) 由题意, 得 $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1) \cdot (x-3)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 3$.

列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(3, +\infty)$,

单调递减区间是 $(-1, 3)$,

极大值为 $f(-1) = \frac{8}{3}$,

极小值为 $f(3) = -8$.

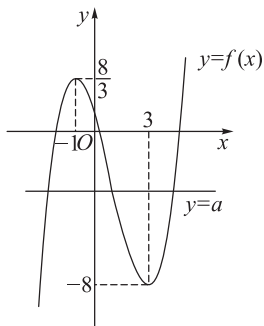
(2) 方程 $f(x) = a$ 有三个不同的实数根, 等价于直线 $y = a$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象有三个不同的交点,

作出函数 $y = f(x)$ 的图象和直线 $y = a$, 如图,

当直线 $y = a$ 与函数 $y =$

$f(x)$ 的图象有三个不同的交点时, $-8 < a < \frac{8}{3}$,

即实数 a 的取值范围为 $(-8, \frac{8}{3})$.



19. 解: (1) 函数 $f(x) = \cos x + x \sin x + e^x - ax$,

$$\text{则 } f'(x) = x \cos x + e^x - a, f'(0) = e^0 - a = 0,$$

所以 $a = 1$.

$$\text{所以 } f'(x) = x \cos x + e^x - 1.$$

当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $(0, \frac{\pi}{2}]$,

单调递减区间为 $[-\frac{\pi}{2}, 0)$.

(2) 由(1)知 $f'(x) = x \cos x + e^x - a$.

① 若 $a = 1$, 由(1)知, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增;

② 若 $a < 1$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $x \cos x > 0$, $e^x - a > e^x - 1 > 0$,

则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

③ 若 $a > 1$, $f'(0) = 1 - a < 0$,

则存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得当 $x \in (0, x_0)$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 不符合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

20. 解: (1) 设 a_n, b_n 分别为第 n 年投入的电力型公交

车、混合动力型公交车的辆数,

依题意,数列 $\{a_n\}$ 是首项为128,公比为 $1+50\%=\frac{3}{2}$ 的等比数列,

$\{b_n\}$ 是首项为400,公差为 a 的等差数列,

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $M_n = \frac{128 \left[1 - \left(\frac{3}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{3}{2}} = 256 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right]$,

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 400n + \frac{n(n-1)}{2}a$,

所以经过 n 年,该市更换的公交车总辆数 $S(n) =$

$$M_n + T_n = 256 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right] + 400n + \frac{n(n-1)}{2}a.$$

(2)若该市计划7年内完成全部更换,

则 $S(7) \geq 10\,000$,

$$\text{所以 } 256 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^7 - 1 \right] + 400 \times 7 + \frac{7 \times 6}{2}a \geq 10\,000,$$

即 $21a \geq 3\,082$,

解得 $a \geq \frac{3\,082}{21}$,

又 $a \in \mathbf{N}^*$,

所以 $a \geq 147$,

即 a 的最小值为147.

21. 解: (1) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{4}$.

(2)由题可知, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n - a_n$, ①

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} = n + 1 - a_{n+1}, \text{ ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 可得 } 2a_{n+1} - a_n = 1,$$

$$\text{即 } a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1),$$

$$\text{又 } a_1 - 1 = -\frac{1}{2},$$

所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } a_n - 1 = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 可得 } b_n = \frac{n-2}{2^n},$$

$$\text{由 } b_{n+1} - b_n = \frac{n+1-2}{2^{n+1}} - \frac{n-2}{2^n} = \frac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{3-n}{2^{n+1}} > 0,$$

可得 $n < 3$,

由 $b_{n+1} - b_n < 0$ 可得 $n > 3$.

所以 $b_1 < b_2 < b_3 = b_4 > b_5 > \cdots > b_n > \cdots$,

故 b_n 有最大值 $b_3 = b_4 = \frac{1}{8}$,

所以对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,有 $b_n \leq \frac{1}{8}$,

由题意知 $b_n \leq t^2 - \frac{1}{4}t$ 恒成立,

$$\text{则 } (b_n)_{\max} \leq t^2 - \frac{1}{4}t,$$

$$\text{故有 } \frac{1}{8} \leq t^2 - \frac{1}{4}t,$$

$$\text{解得 } t \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } t \leq -\frac{1}{4},$$

所以实数 t 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$.

22. 解: (1)易知 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, } f(x) = \ln x - \frac{2}{x} - x + 5,$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2} = \frac{-(x-2)(x+1)}{x^2},$$

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$,

单调递减区间为 $(2, +\infty)$.

$$(2) f'(x) = \frac{-x^2 + x - a}{x^2} (x > 0),$$

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,

所以 x_1, x_2 为方程 $-x^2 + x - a = 0$ 的两个不等实根,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = 1 - 4a > 0, \\ x_1 x_2 = a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{4},$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = 1,$$

$$\text{所以 } f(x_1) + f(x_2) = \ln(x_1 x_2) + \frac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} -$$

$$(x_1 + x_2) - 4a + 2 = \ln a - 4a + 2,$$

$$\text{令 } g(a) = \ln a - 4a + 2 \left(0 < a \leq \frac{1}{4} \right),$$

$$\text{则 } g'(a) = \frac{1-4a}{a} \geq 0,$$

所以 $g(a)$ 为 $\left(0, \frac{1}{4} \right]$ 上的增函数,

当 $a \in \left(0, \frac{1}{4} \right)$ 时,

$$g(a) < g\left(\frac{1}{4} \right) = \ln \frac{1}{4} + 1 < 0.$$

所以 $f(x_1) + f(x_2) < 0$.

综合检测卷(A卷)

1. C 解析:根据导数的定义, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$

$$f'(1), \text{所以} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{3\Delta x} =$$

$$\frac{1}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1}{3} f'(1). \text{故选 C.}$$

2. B 解析:因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 也是等差数列. 由题意得 $S_5 = 7, S_{10} - S_5 = 14$, 则 $S_{15} - S_{10} = 21$, 所以 $S_{15} = 21 + 21 = 42$, 故选 B.

3. A 解析:从集合 A, B, C 中各取一个数有 $1 \times 2 \times 3 = 6$ 种不同的取法, 其中 1, 1, 5 三数可确定空间不同点的个数为 C_3^1 个; 另五种每种可确定空间不同点的个数都是 A_3^3 个. $\therefore$ 可确定空间不同点的个数为 $C_3^1 + 5A_3^3 = 33$, 故选 A.

4. A 解析: $\because f(x) = 2x - \sin x, \therefore f'(x) = 2 - \cos x > 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数. 故选 A.

5. C 解析:由随机变量 ξ 的分布列知, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + x = 1$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 所以 $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$, $D(\xi) = \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$, 故选 C.

6. D 解析:程序 A 在第一步或最后一步, 且程序 B 和 C 相邻的概率为 $P = \frac{A_1^1 A_2^2 A_4^4}{A_6^6} = \frac{2}{15}$, 故选 D.

7. A 解析:由题可得, $\bar{x} = 45, \bar{y} = 85$,

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8 \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^8 x_i^2 - 8 \bar{x}^2} = \frac{33\,400 - 8 \times 45 \times 85}{20\,400 - 8 \times 45^2} =$$

$$\frac{2}{3}, \hat{a} = 85 - \frac{2}{3} \times 45 = 55, \text{因为 } 55 + 45 \times \frac{2}{3} - 10 >$$

0, 所以点 $\left(55, \frac{2}{3}\right)$ 在直线 $x + 45y - 10 = 0$ 的右上方, 故选 A.

8. B 解析:由已知条件可得 $\begin{cases} C_{2m}^m = a, \\ C_{2m+1}^{m+1} = b, \end{cases} \therefore 13a = 7b,$

$$\therefore 13C_{2m}^m = 7C_{2m+1}^{m+1}, \therefore 13 \times$$

$$\frac{2m(2m-1) \cdots (m+2)(m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m} = 7 \times$$

$$\frac{(2m+1)2m(2m-1) \cdots (m+2)(m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m \times (m+1)}, \text{即得}$$

$$13 = 7 \times \frac{2m+1}{m+1}, \text{解得 } m=6, \text{故选 B.}$$

9. BC 解析: $f(x) = x^3 - 3\ln x - 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3}{x}(x^3 - 1)$, 令 $f'(x) = \frac{3}{x}(x^3 - 1) = 0$, 解得 $x=1$, 列表得:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极小值, 也是最小值, 为 $f(1) = 0$, 无极大值, 在定义域内不单调, 故 C 正确, A, D 错误; 因为 $f(1) = 0, f'(1) = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 0 = 0(x - 1)$, 即 $y = 0$, 故 B 正确. 故选 BC.

10. AB 解析: $a_{n+1} = 2a_n + 3, \therefore a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3), \therefore$ 数列 $\{a_n + 3\}$ 是等比数列, 又 $\because a_1 = 1, \therefore a_n + 3 = (a_1 + 3)2^{n-1}, \therefore a_n = 2^{n+1} - 3, \therefore a_3 = 13, S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 3n = 2^{n+2} - 3n - 4$, 故选 AB.

11. ABC 解析:对于选项 A, 因为线性回归方程中 x 的系数为 $0.88 > 0$, 所以 y 与 x 具有正的线性相关关系, 故选项 A 正确; 对于选项 B, 因为相关系数 $r = 0.9962$ 接近 1, 所以 x 与 y 具有较强的线性相关关系, 得到的回归直线方程有价值, 故选项 B 正确; 对于选项 C, 由线性回归方程中系数的意义可知身高每增加 1 cm, 其体重约增加 0.88 kg, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 当某男生的身高为 180 cm 时, 其体重估计值是 68.69 kg, 而不是具体值, 故选项 D 错误, 故选 ABC.

12. ABD 解析:对于选项 A, 该学校男生对食堂服务满意的概率的估计值为 $\frac{30}{30+20} = \frac{3}{5}$, 故 A 错误; 对于选项 B, 该学校女生对食堂服务满意的概率的估计值为 $\frac{40}{40+10} = \frac{4}{5} > \frac{3}{5}$, 故 B 错误; 因为 $3.841 < x_a \approx 4.762 < 6.635$, 所以有 95% 的把握认为男、女生对该食堂服务的评价有差异, 故 C 正确, D 错误, 故选 ABD.

13. -2 解析:设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 则 $a_2 a_4 a_5 =$

$a_3 a_6 = a_2 q \cdot a_5 q$, 显然 $a_n \neq 0$, 则 $a_4 = q^2$, 即 $a_1 q^3 = q^2$, 则 $a_1 q = 1$, 因为 $a_9 a_{10} = -8$, 则 $a_1 q^8 \cdot a_1 q^9 = -8$, 则 $q^{15} = (q^5)^3 = -8 = (-2)^3$, 则 $q^5 = -2$, 则 $a_7 = a_1 q \cdot q^5 = q^5 = -2$.

14. $\frac{1}{2}$ 解析: 所有的四位数有 24 个, 其中个位数字是 2 或 4 时能够被 2 整除, 共有 12 个, 故所求概率为 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

15. $(-\infty, 2)$ 解析: $f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+a)e^x = e^x(x^2+4x+a+2)$, 若 $f(x)$ 有三个单调区间, 则方程 $x^2+4x+a+2=0$ 有两个不等的实根, 所以 $\Delta = 16-4(a+2) > 0$, 解得 $a < 2$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 2)$.

16. $\frac{7}{9}$ 解析: 由题意, 甲不去 A 校的概率为 $P_1 = \frac{3A_3^3}{A_4^4} = \frac{3}{4}$, 甲不去 A 校且乙不去 B 校的概率为 $P_2 = \frac{C_3^1 \times A_3^3 - C_2^2 \times A_2^2}{A_4^4} = \frac{7}{12}$, 则在甲不去 A 校条件下, 乙不去 B 校的概率 $P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{9}$.

17. 解: (1) 总的安排方法数是 4^5 , 甲、乙两人在同一工厂实习的安排方法数是 4^4 , 所以甲、乙两人不在同一工厂实习的安排方法数是 $4^5 - 4^4 = 768$.
(2) 总的安排方法数是 $C_5^2 \cdot A_4^4$, 甲、乙两人在同一工厂实习的安排方法数是 A_4^4 , 所以甲、乙两人不在同一工厂实习的安排方法数是 $C_5^2 \cdot A_4^4 - A_4^4 = 216$.

18. 解: (1) 此同学没有被任何学校录取的概率为 $(1 - \frac{1}{5}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$.

(2) 此同学至少被两所学校录取的概率为 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

19. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 由 $\begin{cases} S_9 = 45, \\ a_4^2 = a_2 a_8, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} 9a_1 + 36d = 45, \\ (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d), \end{cases}$$

$$\text{整理得} \begin{cases} 9a_1 + 36d = 45, \\ d(a_1 - d) = 0, \end{cases}$$

又 $d \neq 0$,

解得 $a_1 = d = 1$,

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$.

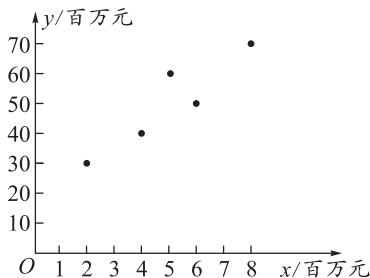
$$(2) \text{由(1)得 } b_n = n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = (1+2+3+\cdots+n) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{n(1+n)}{2} + \frac{1 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$\frac{n^2 + n + 4}{2} - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{即数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{n^2 + n + 4}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

20. 解: (1) 根据表中所列数据画出散点图如下:



(2) 列表如下:

i	1	2	3	4	5
x_i	2	4	5	6	8
y_i	30	40	60	50	70
$x_i y_i$	60	160	300	300	560

$$\text{由已知可得 } \bar{x} = \frac{25}{5} = 5, \bar{y} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 145, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1380.$$

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{1380 - 5 \times 5 \times 50}{145 - 5 \times 5 \times 5} = 6.5,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 50 - 6.5 \times 5 = 17.5.$$

因此所求经验回归方程为 $\hat{y} = 6.5x + 17.5$.

(3) 由(2)得 $\hat{y} = 6.5x + 17.5$,

当广告费支出为 10 百万元时,

$$\hat{y}=6.5 \times 10+17.5=82.5,$$

即这种产品的销售额大约为 82.5 百万元.

21. 解: (1) ① 平均数 $\bar{x}=(55 \times 0.010+65 \times 0.020+75 \times 0.045+85 \times 0.020+95 \times 0.005) \times 10=74$.

② 由题意知, $\mu=\bar{x}=74, \sigma=8$,

$$P(58 < X < 90)=P(\mu-2 \sigma < X < \mu+2 \sigma) \approx 0.9545,$$

$$\text{则 } P(X \leqslant 58) \approx \frac{1-0.9545}{2}=0.02275,$$

$$\text{所以 } P(X > 58) \approx 1-0.02275=0.97725.$$

(2) 以频率估计概率, 则每局小杨获胜的概率为

$$(0.020+0.005) \times 10=0.25=\frac{1}{4},$$

由题意知, 随机变量 Y 的可能取值为 3, 4, 5,

$$\text{所以 } P(Y=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7}{16},$$

$$P(Y=4)=C_3^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}+C_3^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}=\frac{45}{128},$$

$$P(Y=5)=C_4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}+C_4^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}=\frac{27}{128},$$

则 Y 的分布列为

Y	3	4	5
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{27}{128}$

$$\text{所以 } E(Y)=3 \times \frac{7}{16}+4 \times \frac{45}{128}+5 \times \frac{27}{128}=\frac{483}{128}.$$

22. 解: (1) 因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+bx+a$,

$$\text{所以 } f'(x)=x^2-(a+1)x+b.$$

$$\text{令 } f'(0)=0, \text{ 得 } b=0,$$

$$\text{所以 } f'(x)=x(x-a-1).$$

$$\text{因为存在 } x < 0, \text{ 使得 } f'(x)=x(x-a-1)=-9,$$

$$\text{所以 } -a-1=-x-\frac{9}{x} \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上有解,}$$

$$\text{又 } -x-\frac{9}{x}=(-x)+\left(-\frac{9}{x}\right) \geqslant$$

$$2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{9}{x}\right)}=6, \text{ 当且仅当 } x=-3 \text{ 时取等号,}$$

$$\text{所以 } a \leqslant -7,$$

所以 a 的最大值为 -7 .

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+a,$$

$$f'(x)=x(x-a-1),$$

当 $a > 0$ 时,

$$\text{令 } f'(x)=x(x-a-1)=0, \text{ 得}$$

$$x=0 \text{ 或 } x=a+1.$$

当 $x < 0$ 或 $x > a+1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $0 < x < a+1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)$ 的极大值 $f(0)=a > 0$,

$$f(x) \text{ 的极小值 } f(a+1)=a-\frac{1}{6}(a+1)^3=$$

$$-\frac{1}{6}\left[a^3+3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right] < 0,$$

$$\text{又 } f(-2)=-a-\frac{14}{3} < 0,$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2\left[x-\frac{3}{2}(a+1)\right]+a,$$

$$f\left(\frac{3}{2}(a+1)\right)=a > 0,$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 0)$, $(0, a+1)$,

$\left(a+1, \frac{3}{2}(a+1)\right)$ 内各有 1 个零点,

故函数 $f(x)$ 有 3 个零点.

综合检测卷(B 卷)

1. B 解析: 因为 $f(x)=x^3-2x+4$, 所以 $f'(x)=3x^2-2$, 所以 $f'(1)=3 \times 1^2-2=1$, 所以曲线 $f(x)=x^3-2x+4$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线的斜率 $k=1$, 所以切线的倾斜角为 45° . 故选 B.

2. C 解析: 由 $a_1 \cdot a_5=16$, 得 $a_3^2=16$, 又各项均为正数, 所以 $a_3=4$, 由 $a_3+a_4=12$, 得 $a_4=8$, 所以公比 $q=\frac{a_4}{a_3}=\frac{8}{4}=2$, 故选 C.

3. A 解析: 依题意, 将 8 支队伍平均分成 2 个小组的方案共有 $\frac{C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2}=35$ (种), 其中甲、乙两队被分在同一小组的方案共有 $C_6^2=15$ (种), 因此满足题意的分组方案共有 $35-15=20$ (种), 故选 A.

4. C 解析: 对于 A, $f'(x)=\ln x+1$, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 排除 A; 对于 B, $f'(x)=(x+1)e^x$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 排除 B; 对于 D, $f'(x)=e^x+6x^2 > 0$, $f(x)$ 单调递增, 排除 D. 故选 C.

5. C 解析: 由分布列可得 $E(\xi) = a + 2b + 0.3$, 由 $E\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{5}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(a + 2b + 0.3) + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow a + 2b = 1.3$, 又 $0.1 + a + b + 0.1 = 1 \Rightarrow a + b = 0.8$, 于是 $b = 0.5, a = 0.3 \Rightarrow a - b = -0.2$, 故选 C.

6. D 解析: $P(-3 < \xi < 3) \approx 0.6827, P(-6 < \xi < 6) \approx 0.9545$, 则 $P(3 < \xi < 6) \approx \frac{1}{2} \times (0.9545 - 0.6827) = 0.1359$, 故选 D.

7. D 解析: $T_3 = T_{2+1} = C_n^2 (x^2)^{n-2} \left(-\frac{i}{\sqrt{x}}\right)^2 = C_n^2 x^{2n-5} \cdot (-i)^2 = -C_n^2 x^{2n-5}, T_5 = T_{4+1} = C_n^4 (x^2)^{n-4} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{x}}\right)^4 = C_n^4 x^{2n-10} (-i)^4 = C_n^4 x^{2n-10}$, 由 $\frac{-C_n^2}{C_n^4} = -\frac{3}{14}$, 得 $n^2 - 5n - 50 = 0, \therefore n = 10$, 又 $T_{r+1} = C_{10}^r (x^2)^{10-r} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{x}}\right)^r = C_{10}^r (-i)^r x^{20-\frac{5}{2}r}$, 由 $20 - \frac{5}{2}r = 0$ 得 $r = 8, \therefore$ 展开式中的常数项为 $C_{10}^8 (-i)^8 = 45$, 故选 D.

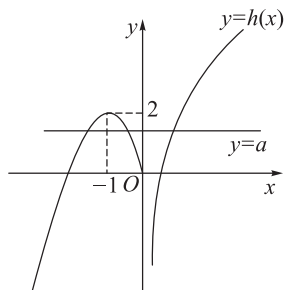
8. C 解析: 由题意, 构造函数 $g(x) = e^x f(x)$, 则 $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) < 0$, 故函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递减函数, 故 $g(-1) > g(0) > g(1) \Leftrightarrow \frac{1}{e} f(-1) > f(0) > e f(1)$, 整理得到 $f(1) < \frac{f(0)}{e} < \frac{f(-1)}{e^2}$, 故选 C.

9. AC 解析: $\because a_1 + a_4 = 18, a_2 + a_3 = 12$, 且公比 q 为整数, $\therefore a_1 + a_1 q^3 = 18, a_1 q + a_1 q^2 = 12, \therefore a_1 = 2, q = 2$, 故 A 正确; $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2, \therefore S_8 = 510$, 故 B 错误; $S_n + 2 = 2^{n+1}$, 故数列 $\{S_n + 2\}$ 是等比数列, 故 C 正确; $\because a_n = 2^n, \therefore \lg a_n = \lg 2^n = n \lg 2$, 故数列 $\{\lg a_n\}$ 是公差为 $\lg 2$ 的等差数列, 故 D 错误. 故选 AC.

10. BCD 解析: 对于选项 A, 易知是错误的; 对于选项 B, C, 易知是正确的; 对分类变量 x 与 y 的观测值 χ^2 来说, χ^2 越大, “ x 与 y 有关系”的可信程度越大, 故选项 D 正确, 故选 BCD.

11. CD 解析: 函数 $g(x) = f(x) + 2x - a$ 有 3 个零点, 即方程 $f(x) + 2x = a$ 有 3 个不同的实根, 即函数 $y = f(x) + 2x$ 的图象与直线 $y = a$ 有 3 个不同

的交点, 令 $h(x) = f(x) + 2x = \begin{cases} x^3 - 3x, x \leq 0, \\ 2\ln x + 2x, x > 0, \end{cases}$ 当 $x < 0$ 时, $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x < -1$ 时, $h'(x) > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 故当 $x \leq 0$ 时, $h(x)_{\max} = h(-1) = 2, h(0) = 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$. 当 $x > 0$ 时, $h(x) = 2\ln x + 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 如图, 作出函数 $h(x)$ 的大致图象, 结合图象可知, 要使函数 $y = f(x) + 2x$ 的图象与直线 $y = a$ 有 3 个不同的交点, 则 a 的取值范围为 $[0, 2)$. 故选 CD.



12. AB 解析: $\because S_n = an^2 - 4an + b, \therefore$ 当 $n = 1$ 时, $a_1 = b - 3a$, 当 $n > 1$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2an - 5a$. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $2a \times 1 - 5a = b - 3a, \therefore b = 0$, 因此, 只需要在数集 $\{-3, 0, 3\}$ 中抽到 0 即可, 概率为 $\frac{1}{3}$, 故 A 正确. 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $a = 1$, 且 $a_1 < a_2$, 即 $b - 3a < -a$, 解得 $b < 2a, \therefore b = -3$ 或 $b = 0, \therefore \{a_n\}$ 是递增数列的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, 故 B 正确. 同理可得, $\{a_n\}$ 是递减数列的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, 故 C 错误. 由已知得 $S_n = a(n-2)^2 + b - 4a$, 如果 $a = 0$, 则 $S_n = b$, 满足 $S_n \geq S_2$, 概率为 $\frac{1}{3}$; 如果 $a \neq 0, S_2$ 是 S_n 的最小值, 则 $a = 1$, 概率为 $\frac{1}{3}, \therefore S_n \geq S_2$ 的概率为 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, 故 D 错误. 故选 AB.

13. 0.8413 解析: $P(\xi > 1) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - P(\xi \geq 3) = 0.8413$.

14. $\frac{7}{15}$ 解析: 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 这 10 个数中

任意抽取三个数共有 C_{10}^3 种抽取方法, 其中仅有两个数是连续整数, 共有 $7+6+6+6+6+6+6+6+7=56$ (种) 抽取方法, 由此可得任意抽取三个数, 其中仅有两个数是连续整数的概率是 $\frac{56}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$.

15.1 解析: 因为 $x^2(x+3)^3 = [(x+2)-2]^2[(x+2)+1]^3$, 所以 $a_2(x+2)^2 = C_2^0(x+2)^2 \times C_3^3 + C_2^1(x+2) \times (-2) \times C_3^2(x+2) + C_2^2(-2)^2 \times C_3^1(x+2)^2 = (1-12+12) \cdot (x+2)^2 = (x+2)^2$, 所以 $a_2=1$.

16.3 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ **解析:** 因为 $xf'(x) - af(x) \leq 1$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $(3a-a^2)x^3 + (2b-ab) \cdot x^2 + (c-ac)x - 1 \leq 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 因为三次函数在 $\mathbf{R}$ 上的取值不可能恒小于等于零, 所以 $3a-a^2=0$ 且 $a \neq 0$, 所以 $a=3$. 由上述可知 $bx^2 + 2cx + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 当 $b=c=0$ 时, 显然满足, 此时 $\frac{b+2c}{a}=0$; 当 $b \neq 0$ 时, 若满足条件则需 $\begin{cases} b > 0, \\ \Delta = 4c^2 - 4b \leq 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} b > 0, \\ b \geq c^2, \end{cases}$ 所以 $\frac{b+2c}{a} \geq \frac{c^2+2c}{3} = \frac{(c+1)^2-1}{3} \geq -\frac{1}{3}$, 当 $c=-1, b=1$ 时取等号, 所以 $\frac{b+2c}{a}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

17. (1) 证明: 由 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 得

$$2S_n + n^2 = 2a_n n + n, \quad ①$$

$$\text{所以 } 2S_{n+1} + (n+1)^2 = 2a_{n+1}(n+1) + (n+1), \quad ②$$

②-①, 得 $2a_{n+1} + 2n + 1 = 2a_{n+1}(n+1) - 2a_n n + 1$, 化简得 $a_{n+1} - a_n = 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列.

(2) **解:** 由 (1) 知数列 $\{a_n\}$ 的公差为 1.

由 $a_7^2 = a_4 a_9$, 得 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3)(a_1 + 8)$, 解得 $a_1 = -12$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= -12n + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 25n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(n - \frac{25}{2} \right)^2 - \frac{625}{8}, \end{aligned}$$

所以当 $n=12$ 或 $n=13$ 时, S_n 取得最小值, 最小值为 -78 .

18. 解: (1) 派乙参赛比较合适, 理由如下:

由题中数据易得甲的平均分 $\overline{x_{\text{甲}}} = 82$, 乙的平均分 $\overline{x_{\text{乙}}} = 82$,

则甲、乙平均分相同,

又甲的标准差的平方 (即方差) $S_{\text{甲}}^2 = 10$,

乙的标准差的平方 (即方差) $S_{\text{乙}}^2 = 9.6$,

则 $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$,

$\therefore$ 甲、乙平均分相同, 但乙的成绩比甲稳定,

$\therefore$ 派乙去比较合适.

(2) 记乙同学在一次数学竞赛中成绩高于 80 分为事件 A,

$$\therefore P(A) = \frac{3}{5},$$

X 可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^3 = \frac{8}{125},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{36}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{54}{125},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125},$$

故其分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

$$\therefore E(X) = \frac{9}{5}.$$

19. 解: (1) 由所给数据计算得 $\bar{t} = \frac{1}{7} \times (1+2+3+4+$

$$5+6+7) = 4,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} \times (2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9)$$

$$= 4.3,$$

$$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 28,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) &= (-3) \times (-1.4) + (-2) \times (-1) + (-1) \times (-0.7) + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.9 + 3 \times 1.6 = 14, \\ \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{14}{28} = 0.5, \\ \hat{a} &= \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 4.3 - 0.5 \times 4 = 2.3, \end{aligned}$$

所求经验回归方程为 $\hat{y}=0.5t+2.3$.

(2)由(1)知, $\hat{b}=0.5>0$,故 2016 年至 2022 年该地区农村居民家庭人均纯收入逐年增加,平均每年增加 0.5 千元.

将 2024 年的年份代号 $t=9$ 代入(1)中的回归方程,得 $\hat{y}=0.5\times 9+2.3=6.8$,

故预测该地区 2024 年农村居民家庭人均纯收入为 6.8 千元.

20. 解:(1)设戊应聘成功为 A 事件,

$$\text{则 } P(A)=\frac{C_4^1+C_3^1C_2^1}{C_6^1}=\frac{1+8}{15}=\frac{3}{5}.$$

(2)设“参加 A 组测试通过的人数多于参加 B 组测试通过的人数”为 M 事件,

$$\text{则 } P(M)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{36}.$$

(3) ξ 可取 0,1,2,3,4,

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(\xi)=0\times\frac{4}{36}+1\times\frac{12}{36}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{1}{36}=\frac{5}{3}.$$

21. 解:(1)由列联表数据计算 $\chi^2=\frac{200\times(50\times 40-50\times 60)^2}{110\times 90\times 100\times 100}\approx 2.020<2.072$,

所以不能在犯错误的概率不超过 0.15 的前提下认为该市市民网络购物的情况与性别有关.

(2)由题意,抽取的 5 名女性网民中,经常进行网络购物的有 $5\times\frac{60}{100}=3$ (人),

偶尔或从不进行网络购物的有 $5\times\frac{40}{100}=2$ (人),

故从这 5 人中选出 3 人,其中至少有 2 人经常进行网络购物的概率是 $P=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}+\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{7}{10}$.

(3)由列联表可知,经常进行网络购物的频率为 $\frac{110}{200}=\frac{11}{20}$,

由题意,从该市市民中任意抽取 1 人恰好是经常进行网络购物的概率是 $\frac{11}{20}$,

由于该市市民数量很大,故可以认为 $X\sim B\left(10,\frac{11}{20}\right)$,

$$\text{所以 } E(X)=10\times\frac{11}{20}=\frac{11}{2},$$

$$D(X)=10\times\frac{11}{20}\times\frac{9}{20}=\frac{99}{40}.$$

22. 解:(1)由题意得, $f'(x)=ae^{ax}-a=a(e^{ax}-1)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$,

当 $a<0$, $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $a<0$, $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $a>0$, $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $a>0$, $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

综上所述, $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)由题意知,对任意的 $x_1, x_2\in[-1,1]$, $|f(x_1)-f(x_2)|\leq e^2-3$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ 当 $x\in[-1,1]$ 时, $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leq e^2-3$.

由(1)知, $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减,在区间 $(0,1)$ 上单调递增,

所以只需 $\begin{cases} f(1)-f(0)\leq e^2-3, \\ f(-1)-f(0)\leq e^2-3, \end{cases}$

即 $\begin{cases} e^a-a-e^2+2\leq 0, \textcircled{1} \\ e^{-a}+a-e^2+2\leq 0, \textcircled{2} \end{cases}$

设 $h(a)=e^a-a-e^2+2(a\neq 0)$,

则 $h'(a)=e^a-1$,

所以 $h(a)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

易知 $h(2)=0$,

所以当 $0<a\leq 2$ 时, $h(a)\leq 0$,不等式 $\textcircled{1}$ 成立;

当 $a>2$ 时, $h(a)>0$,不等式 $\textcircled{1}$ 不成立.

又 $h(-2)=e^{-2}+2-e^2+2=4+e^{-2}-e^2<0$,

所以当 $-2\leq a<0$ 时, $h(a)<0$,不等式 $\textcircled{1}$ 成立,

所以当 $-2\leq a<0$ 或 $0<a\leq 2$ 时不等式 $\textcircled{1}$ 成立,

此时不等式 $\textcircled{2}$ 也成立,

而当 $a<-2$,即 $-a>2$ 时,由函数 $h(a)$ 的性质知,不等式 $\textcircled{2}$ 不成立.

所以实数 a 的取值范围为 $[-2,0)\cup(0,2]$.