

限时小测试参考答案

小测试(一) 空间向量及其运算

预习自评

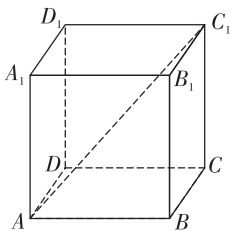
1. (1)× (2)✓ (3)×

2. C

基础过关

1. D 解析: 对于 A, $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的方向相反, 因而不是相等向量, 所以 A 错误; 对于 B, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的方向相反, 因而不是相等向量, 所以 B 错误; 对于 C, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DB}$ 的方向不相同, 因而不是相等向量, 所以 C 错误; 对于 D, $\overrightarrow{DO}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的方向相同, 大小相等, 是相等向量, 所以 D 正确.

2. B 解析: 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $-\overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $-\overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BB_1}$, 所以 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{D_1A_1} - \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$.



3. D 解析: $\because$ 点 D, E, F 分别是 AB, PA, CD 的中点, 且 $\overrightarrow{PA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{PB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{PC} = \mathbf{c}, \therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

4. C 解析: 在 C 中, 由 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$, 得 $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$, 则 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 为共面向量, 即 M, A, B, C 四点共面; 对于 A, 由 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 得 $1-1-1 = -1 \neq 1$, 不能得出 M, A, B, C 四点共面; 对于 B, 由 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 得 $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq 1$, 所以 M, A, B, C 四点不共面; 对于 D, 由 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 得 $\overrightarrow{OM} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, 其系数和不为 1, 所以 M, A, B, C 四点不共面.

5. A 解析: 由 $m+n=1$, 可得 $m=1-n$, 结合题意可知 $\overrightarrow{OP} = (1-n)\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + n(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 即 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = n(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 故 $\overrightarrow{AP} = n\overrightarrow{AB}$, 据此可知 A, P, B 三点共线, 点 P 一定在直线 AB 上.

6. 0 解析: $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

7. 1 $\frac{1}{4}$ 解析: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, 所以 $x=1, y=\frac{1}{4}$.

8. 解: (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1}$.

(2) 因为 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DA}$, 所以 $\overrightarrow{AA_1} + \mathbf{x} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AA_1} + \mathbf{x} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$.

所以 $\overrightarrow{AA_1} + \mathbf{x} + \overrightarrow{B_1A} = \mathbf{0}$,

所以 $\mathbf{x} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

又因为 $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D_1C_1}$,

所以 $\mathbf{x}$ 可以是 $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{D_1C_1}$ 中的任一个.

素养提升

1. B 解析: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

2. AB 解析: A 选项, $\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD_1}$, A 正确; B 选项, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$, B 正确; C 选项, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{B_1D} \neq \overrightarrow{BD_1}$, C 错误; D 选项, $\overrightarrow{B_1D_1} - \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{AA_1} \neq \overrightarrow{BD_1}$, D 错误. 故选 AB.

3. ABD 解析:对于 A,根据共面向量的概念,可知空间中的三个向量,若有两个向量共线,则这三个向量一定共面,所以 A 正确;对于 B,若对空间中任意一点 O ,有 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 因为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$, 所以 P, A, B, C 四点一定共面,所以 B 正确;对于 C,若 a, b 共线,则 p 不一定能用 a, b 表示出来,所以 C 错误;对于 D,若 $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$, 则 $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ 三个向量在同一个平面内, P, M, A, B 四点共面,所以 D 正确.

4. 6 解析:在平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}$, 又 $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{z}{3}\overrightarrow{CC'}$,

$$\therefore \begin{cases} x=1, \\ \frac{y}{2}=1, \\ \frac{z}{3}=1, \end{cases} \therefore \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \end{cases} \therefore x+y+z=6.$$

5. 证明:记 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA_1} = c$,

$$\text{因为 } \overrightarrow{A_1E} = 2\overrightarrow{ED_1}, \overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{5}\overrightarrow{A_1C},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}b,$$

$$\overrightarrow{A_1F} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1})$$

$$= \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1})$$

$$= \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b - \frac{2}{5}c,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A_1F} - \overrightarrow{A_1E}$$

$$= \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b - \frac{2}{5}c - \frac{2}{3}b$$

$$= \frac{2}{5}a - \frac{4}{15}b - \frac{2}{5}c.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{2}{3}b - c + a$$

$$= a - \frac{2}{3}b - c,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} = \frac{2}{5}a - \frac{4}{15}b - \frac{2}{5}c$$

$$= \frac{2}{5}(a - \frac{2}{3}b - c)$$

$$= \frac{2}{5}\overrightarrow{EB}.$$

又因为 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 有公共点 E ,

所以 E, F, B 三点共线.

6. (1) 解:因为 E, F 分别是 OA, AB 的中点,

$$\text{则 } EF \parallel OB \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}OB,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}b,$$

又 F, G 分别是 AB, BC 的中点,

$$\text{则 } FG \parallel AC \text{ 且 } FG = \frac{1}{2}AC,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a.$$

$$(2) \text{ 证明: 因为 } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) -$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(b + c - a),$$

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(c - a),$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}b,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH},$$

故 E, F, G, H 四点共面.

易错辨析

② 解析:根据空间向量的加减运算法则可知,对于①, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 恒成立;对于③,当 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ 方向相同时,有 $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$;对于④,当 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 方向相同且 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 方向相反时,有 $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. 只有②一定不成立.

小测试(二) 空间向量的数量积运算

预习自评

1. AD 2. D 3. 1

基础过关

1. B 解析:由空间向量 a 与 b 的夹角为 120° , $|a| = 2, (a - 2b) \cdot (a + 3b) = 3$, 可得 $a^2 + a \cdot b - 6b^2 = 4 + 2|b| \cos 120^\circ - 6|b|^2 = 3$, 所以 $6|b|^2 + |b| - 1 = 0$. 解得 $|b| = \frac{1}{3}$ 或 $|b| = -\frac{1}{2}$ (舍去).

2. C 解析:由题意得 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) = 3 + 2 \times (0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 5$, 故 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \sqrt{5}$.

3. D 解析: $\because |a| = |b|, \langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}, \therefore a \cdot b =$

$$\frac{1}{2}|a||b| = \frac{1}{2}b^2, b \cdot (a-b) = a \cdot b - b^2 = -\frac{1}{2}b^2,$$

$$|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{a^2 - 2a \cdot b + b^2} =$$

$$\sqrt{b^2 - b^2 + b^2} = |b|, \therefore \cos \langle b, a-b \rangle = \frac{b \cdot (a-b)}{|b||a-b|} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2}b^2}{b^2} = -\frac{1}{2}, \text{ 又 } \langle b, a-b \rangle \in [0, \pi], \therefore b \text{ 与 } a-b$$

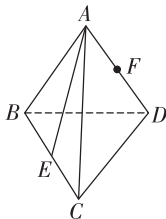
的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

4. B 解析: 设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA_1} = c$, 由题意得 $|a|=1, |b|=1, |c|=2, a \cdot b=0, a \cdot c=1, b \cdot c=1, \therefore \overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (b+c) \cdot (b+a) = b^2 + b \cdot c + b \cdot a + a \cdot c = 1+1+0+1=3$.

5. AD 解析: 根据数量积的性质和运算律可得 A, D 正确; $\frac{a \cdot b}{a^2} = \frac{|b| \cos \langle a, b \rangle}{|a|} \neq \frac{b}{a}$, B 错误; $(a \cdot b)^2 = (|a| \cdot |b| \cos \theta)^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \cos^2 \theta \neq a^2 \cdot b^2$ (当 $\cos \theta \neq \pm 1$ 时), C 错误.

6. $-\frac{3}{8}b - \frac{2}{3}a$ 解析: 由题可得与向量 a, b 同向的单位向量分别为 $\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}$, 因为 $|a|=6, |b|=8, \langle a, b \rangle = 120^\circ$, 根据投影向量的定义, 则 a 在 b 上的投影向量为 $|a| \cos \langle a, b \rangle \frac{b}{|b|} = \frac{-3b}{|b|} = -\frac{3}{8}b$, b 在 a 上的投影向量为 $|b| \cos \langle a, b \rangle \frac{a}{|a|} = \frac{-4a}{|a|} = -\frac{2}{3}a$.

7. $\frac{1}{4}$ 解析: 如图所示, $\therefore$ 四面体 $ABCD$ 是正四面体, $\therefore$ 四面体的每个面都是正三角形, 相对的棱互相垂直, 且棱长为 1. 又点 E, F 分别是 BC, AD 的中点, $\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AF}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$.



8. 证明: 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} +$

$$\overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1},$$

$$\text{又 } AB=AD=2, AA_1=3,$$

$$\angle BAD=90^\circ, \angle DAA_1 = \angle BAA_1 = 60^\circ,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = 4,$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 3.$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0,$$

$$\text{故 } BD \perp AC_1.$$

素养提升

1. B 解析: $\because (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0, \therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0, \therefore |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 = 0$, 即 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$, 故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. 故选 B.

2. D 解析: 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, 所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{2} + 2 \times 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} + 2 \times 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 1 + 1 + 4 + 2 + 2 = 10$, 所以 $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{10}$. 故选 D.

3. ACD 解析: 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, 所以 $D_1A_1 \perp$ 平面 A_1AP . 又 $D_1A_1 \subset$ 平面 D_1A_1P , 所以平面 $D_1A_1P \perp$ 平面 A_1AP , 故 A 正确; $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC_1} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P}) \cdot \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{DC_1} = |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{DC_1}| \cos 45^\circ + |\overrightarrow{A_1P}| \cdot |\overrightarrow{DC_1}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = 1$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC_1}$ 是定值, 故 B 不正确; $V_{B_1-D_1PC} = V_{P-B_1D_1C}$, $\triangle B_1D_1C$ 的面积是定值, 易知 $A_1B \parallel$ 平面 B_1D_1C , 又点 P 为线段 A_1B 上的动点, 所以点 P 到平面 B_1D_1C 的距离是定值, 所以 $V_{B_1-D_1PC} = V_{P-B_1D_1C}$ 是定值, 故 C 正确; 易知 $DC_1 \perp A_1D_1, DC_1 \perp A_1B$, 且 $A_1D_1 \cap A_1B = A_1$, 所以 $DC_1 \perp$ 平面 A_1D_1P , 所以 $DC_1 \perp D_1P$, 故 D 正确. 故选 ACD.

4. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 解析: 因为 $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 0 = 2$. 又 $|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1})^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC} \rangle =$

$$\frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

5. 证明:不妨设 $AD=BD=CD=1$,

则 $AB=AC=\sqrt{2}$.

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 1,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1.$$

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 - 1 = 0$, 即 $BD \perp AC$,

又由已知得 $BD \perp AD$, $AD \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 ADC .

6. 解: (1) $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$$= -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$$

$$= -\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$$

$$= -\mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$= -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

(2) 由题意得 $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=2, |\mathbf{c}|=3$,

则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA_1} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{CO}| = \sqrt{\frac{1}{4} (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \times (2^2 + 2^2 + 3^2 + 0 + 2 \times 3 + 2 \times 3)}$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

故 CO 的长为 $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

易错辨析

AC 解析: $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 2|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 120^\circ =$

$$2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cos 120^\circ = -a^2; 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 2|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot$$

$$\cos 60^\circ = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cos 60^\circ = a^2; 2\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{AC} = 2|\overrightarrow{GF}| \cdot$$

$$|\overrightarrow{AC}| \cos 180^\circ = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \mathbf{a} \cos 180^\circ = -a^2; 2\overrightarrow{EF} \cdot$$

$$\overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \mathbf{a} \cos 120^\circ =$$

$-\frac{a^2}{2}$. 故结果为 $-a^2$ 的有 AC.

小测试(三) 空间向量基本定理

预习自评

1. B 2. C 3. D

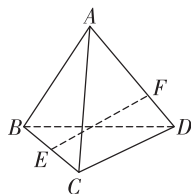
基础过关

1. ABCD 解析: 根据空间基底的概念, 可知任意三个不共面的向量都可以作为一个空间基底, 所以 A 正确; 根据空间基底的概念, 可知 B 正确; 由 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ 不能构成空间的一个基底, 可得 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ 共面, 所以 A, B, M, N 四点共面, 所以 C 正确; 由 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的一个基底, 可得 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 由于 $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, 因此 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}$ 不共面, 所以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}\}$ 也是空间的一个基底, 所以 D 正确. 故选 ABCD.

2. B 解析: 选项 A 对应的说法是正确的, 若四点共线, 则向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 共面, 构不成基底; 选项 B 对应的说法是错误的, 若四点共面, 则 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 共面, 构不成基底; 选项 C 对应的说法是正确的, 若四点共面, 则 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 构不成基底; 选项 D 对应的说法是正确的, 若有三点共线, 则这四点共面, 故向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 构不成基底. 故选 B.

3. B 解析: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{AO_3}$, 又 $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AO_1} + y\overrightarrow{AO_2} + z\overrightarrow{AO_3}$, 所以 $x = y = z = 1$.

4. B 解析: 如图, 在四面体 ABCD 中, 点 F 在 AD 上, 且 $AF = 2FD$, E 为 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$. 故选 B.

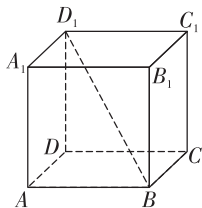


5. B 解析: 以 $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{c}$ 为基向量, 则 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c}$, $|\overrightarrow{BE}| =$

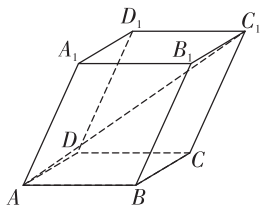
$$\sqrt{\left(\mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{c}^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} =$$

$\sqrt{1+\frac{1}{4}\times 4+1\times 2\times 0}=\sqrt{2}$, 又 $|\overrightarrow{AA_1}|=2, \overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\mathbf{c}$, 所以 $\cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AA_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故直线 BE 与 AA_1 的夹角为 45° .

6. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$ 解析: 如图, $\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$.



7. $\sqrt{113}$ 解析: 由题设, 作出示意图. 由图, 得 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$, $\therefore \overrightarrow{AC_1}^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1})=113$, 则 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{113}$.

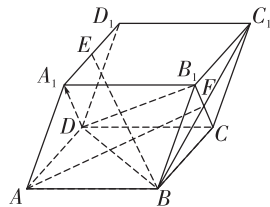


8. 解: (1) $\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB_1}$
 $=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC}$
 $=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$.
 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}$
 $=-\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$
 $=\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
 $=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$.

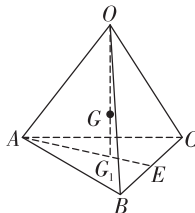
(2) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$
 $=\overrightarrow{DD_1}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})$
 $=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB}$
 $=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}$
 $=\overrightarrow{DA_1}$.

如图, 连接 DA_1 , 则 $\overrightarrow{DA_1}$ 即为所求.



素养提升

1. A 解析: 如图, 连接 AG_1 并延长交 BC 于点 E , 则点 E 为 BC 的中点, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{AG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$. $\therefore \overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OG_1}$, $\therefore \overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OG_1}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_1})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC})=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$. 故选 A.



2. A 解析: 对于 A, 由题图可知 $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共面, $\therefore \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 能构成空间的一个基底, 故 A 正确; 对于 B, 由题图可知 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC_1}$ 共面, $\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC_1}$ 不能构成空间的一个基底, 故 B 错误; 对于 C, 由题图可知 $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{AC}$ 共面, $\therefore \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{AC}$ 不能构成空间的一个基底, 故 C 错误; 对于 D, 由题图可知 $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}$ 共面, $\therefore \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}$ 不能构成空间的一个基底, 故 D 错误. 故选 A.

3. BD 解析: 当 $\overrightarrow{MA}=m\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}$ 时, 可知点 M 与点 A, B, C 共面, 所以 $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}=m(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+n(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})$, 所以 $(m+n-1)\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$, 所以 $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{m+n-1}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n-1}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n-1}\overrightarrow{OC}$. 不妨令 $-\frac{1}{m+n-1}=x, \frac{m}{m+n-1}=y, \frac{n}{m+n-1}=z$, 则 $x+y+z=1$. 因为 $2+(-1)+(-1)=0 \neq 1, 1+1+(-1)=1, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6} \neq 1, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, 所以 B, D 满足要求. 故选 BD.

4. ①③ 解析: 对于①, 因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是空间中三个不

共面的向量,且 $lmn \neq 0$, 所以 la, mb, nc 不共面, 所以①能构成基底; 对于②, 易知 $-9c+3a=3[(a+2b)-(2b+3c)]$, 所以 $a+2b, 2b+3c, -9c+3a$ 是共面向量, 所以②不能构成基底; 对于③, 如果 $a+2b, b+2c, c+2a$ 是共面向量, 那么存在实数 λ, μ , 使得 $c+2a=\lambda(a+2b)+\mu(b+2c)$, 即 $(1-2\mu)c=(\lambda-2)a+(2\lambda+\mu)b$, 所以 $1-2\mu=\lambda-2=2\lambda+\mu=0$, 无解, 所以 $a+2b, b+2c, c+2a$ 不共面, 所以③可以构成基底, 所以应填①③.

$$\begin{aligned} 5. \text{解: } (1) & \because \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}, \\ & \therefore |\overrightarrow{AC'}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AA'}|^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'}) = 85, \\ & \therefore |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{85}, \end{aligned}$$

即 AC' 的长为 $\sqrt{85}$.

$$\begin{aligned} (2) & \because \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC'} + \overrightarrow{CF} \\ & = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} \\ & = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \\ & = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AA'}, \\ & \therefore x = \frac{1}{3}, y = z = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \text{解: } & \text{设 } \overrightarrow{CD} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{c}, \\ & \text{由题可知, } |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = 2. \\ (1) & \text{证明: } \overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CC_1} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 1 - 1 = 0, \\ & \text{所以 } \overrightarrow{DD_1} \perp \overrightarrow{BD}, \\ & \text{即 } DD_1 \perp BD. \\ (2) & \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \overrightarrow{AB} = -\mathbf{a}, \\ & \text{所以 } |\overrightarrow{CA_1}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2} = \sqrt{11}, \\ & |\overrightarrow{AB}| = 1, \\ & \text{又 } \overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (-\mathbf{a}) = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{CA_1}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \frac{\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CA_1}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{11} \times 1} = \\ &= -\frac{5\sqrt{11}}{22}, \end{aligned}$$

又异面直线所成角的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{2}]$,

所以异面直线 CA_1, AB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{11}}{22}$.

易错辨析

解: 如果 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 共面, 那么存在实数 λ, μ 使得 $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{OC}$,

所以 $2e_1 + e_2 - 3e_3$

$$= \lambda(3e_1 + e_2 - 2e_3) + \mu(e_1 - 2e_2 + e_3)$$

$$= (3\lambda + \mu)e_1 + (\lambda - 2\mu)e_2 + (-2\lambda + \mu)e_3,$$

因为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一个基底,

所以 e_1, e_2, e_3 不共面,

$$\text{所以 } \begin{cases} 3\lambda + \mu = 2, \\ \lambda - 2\mu = 1, \\ -2\lambda + \mu = -3, \end{cases} \quad \text{此方程组无解,}$$

所以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 不共面,

所以 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 可以构成空间的一个基底.

小测试(四) 空间直角坐标系及其运算的坐标表示

预习自评

1. D 2. A 3. C

基础过关

1. D **解析:** $\because \mathbf{a} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = (-1, 0, 2), \therefore k\mathbf{a} + \mathbf{b} = (k-1, k, 2), 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3, 2, -2). \therefore k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 互相垂直, $\therefore 3(k-1) + 2k - 4 = 0$, 解得 $k = \frac{7}{5}$.

2. A **解析:** $\because \overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4, 3, 2)$, D 为坐标原点, $\therefore B_1$ 的坐标为 $(4, 3, 2)$, $\therefore BC = 4, DC = 3, CC_1 = 2$, $\therefore C_1$ 的坐标为 $(0, 3, 2)$.

3. AC **解析:** 因为向量 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, 所以 $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, 根据单位向量的关系式 $\mathbf{e} = \pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, 可得 $\mathbf{e} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 或 $\mathbf{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

4. ACD **解析:** 根据题意知点 B_1 的坐标为 $(4, 5, 3)$, A 正确; 点 B 的坐标为 $(4, 5, 0)$, 点 C_1 的坐标为 $(0, 5, 3)$, 故点 C_1 关于点 B 对称的点为 $(8, 5, -3)$, B 错误; 点 A 关于直线 BD_1 对称的点为 $C_1(0, 5, 3)$, C 正确; 点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为 $(8, 5, 0)$, D 正确. 故选 ACD.

5. C **解析:** 设向量 $\mathbf{p}$ 在基底 $\{\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 下的坐标为 (x, y, z) , 则 $\mathbf{p} = 4\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + y(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + z\mathbf{c}$, 整理得 $4\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = (x+y)\mathbf{a} + (x-y)\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, 所以

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2, \\ z=3, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x=3, \\ y=1, \\ z=3, \end{cases} \quad \text{所以向量 } \mathbf{p} \text{ 在基底}$$

$\{a+b, a-b, c\}$ 下的坐标为 $(3, 1, 3)$. 故选 C.

6. $(2, 4, 1)$ 解析: 由题设, 得 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 而 $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 6)$, 令 $P(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (x-1, y-3, z+1)$, $\therefore \begin{cases} x-1=1, \\ y-3=1, \\ z+1=2, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \\ z=1, \end{cases}$ 即 $P(2, 4, 1)$.

7. $(1, -2, 0)$ 解析: 根据空间中点的坐标确定方法知, 空间中点 $A(1, -2, 3)$ 在坐标平面 xOy 上的投影坐标: 竖坐标为 0, 横坐标与纵坐标不变. 所以空间向量 $a = (1, -2, 3)$ 在坐标平面 xOy 上的投影向量的坐标是 $(1, -2, 0)$.

8. 解: (1) 由题意, 得 $CM = \frac{1}{2}CC' = 1$,

$$ON = \frac{1}{3}OC = 1,$$

所以 $M(0, 3, 1), N(0, 1, 0)$.

(2) 以 O 为坐标原点, 取此空间直角坐标系下 x 轴、 y 轴、 z 轴三个方向上的单位向量 $\{i, j, k\}$ 为正交基底,

因为 $OA = 1, OC = 3, OD' = 2$,

所以 $\overrightarrow{OB} = i + 3j + 2k$,

$\overrightarrow{OC} = 0i + 3j + 2k$,

由(1)得 $\overrightarrow{OM} = 0i + 3j + k$,

$\overrightarrow{ON} = 0i + j + 0k$,

所以 $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OM} = i + 0j + k = (1, 0, 1)$,

$\overrightarrow{NC'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{ON} = 0i + 2j + 2k = (0, 2, 2)$.

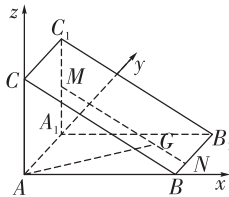
素养提升

1. A 解析: 向量 $a = (x, -4, -5), b = (1, -2, 2)$,
 $\therefore |a| = \sqrt{x^2 + 16 + 25} = \sqrt{x^2 + 41}, |b| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, a \cdot b = x + 8 - 10 = x - 2, \therefore a$ 与 b 的夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{2}}{6}, \therefore \sqrt{x^2 + 41} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right) = x - 2$, 整理得 $x^2 - 8x - 33 = 0$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 11$ (不符合题意, 舍去), $\therefore x$ 的值为 -3 .

2. B 解析: 取此空间直角坐标系下 x 轴、 y 轴、 z 轴三个方向上的单位向量 $\{i, j, k\}$ 为正交基底, 则 $C(0, 2, 0), P(2, 2, 2)$, 即 $\overrightarrow{DC} = 0i + 2j + 0k, \overrightarrow{DP} = 2i + 2j + 2k$, 故 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DP} = -2i + 0j - 2k, \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = -\frac{2}{3}i + 0j - \frac{2}{3}k, \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PQ} = \frac{4}{3}i + 2j +$

$\frac{4}{3}k$, 所以 $Q\left(\frac{4}{3}, 2, \frac{4}{3}\right)$.

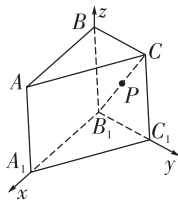
3. C 解析: 不妨设 $AB = 2$, 以 A 为坐标原点, 记 $\left\{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}\right\} = \{i, j, k\}$ 为单位正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$. 则 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} = 2i + \frac{1}{3}j + 0k, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = 0i + j + \frac{1}{2}k$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = 2i - \frac{2}{3}j - \frac{1}{2}k, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{8}k = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$, 所以 $x + y + z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$.



4. $(-10, 15, -3)$ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{19}{4}\right)$ 解析: 因为 $\overrightarrow{CB} = (-4, 5, 5), \overrightarrow{BA} = (3, -5, 4)$, 所以 $\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA} = (-10, 15, -3)$. 设 $M(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (x-1, y+2, z-4)$. 因为 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(-3, 5, -4) + \frac{3}{4}(1, 0, -9) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{35}{4}\right)$,
 所以 $\begin{cases} x-1 = -\frac{3}{4}, \\ y+2 = \frac{5}{2}, \\ z-4 = -\frac{35}{4}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = -\frac{19}{4}, \end{cases}$ 故 $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{19}{4}\right)$.

5. 解: 如图所示, 以 B_1 为原点, B_1A_1, B_1C_1, B_1B 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系. 设 $P(0, m, m) (0 \leq m \leq 3\sqrt{2})$,
 易知 $A_1(6, 0, 0), B(0, 0, 3\sqrt{2})$.
 则 $A_1P + BP = \sqrt{36 + 2m^2} + \sqrt{m^2 + (m - 3\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \times \left[\sqrt{(m-0)^2 + (0-3\sqrt{2})^2} + \right.$

$$\sqrt{\left(m-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2},$$



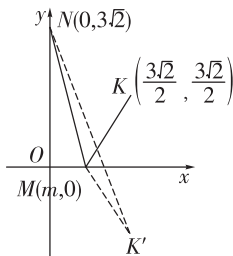
如图所以,在平面直角坐标系中,点 $M(m,0)$ 到点 $N(0,3\sqrt{2})$ 的距离是 $\sqrt{(m-0)^2+(0-3\sqrt{2})^2}$,

点 $M(m,0)$ 到点 $K\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 的距离

$$\text{是 } \sqrt{\left(m-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2},$$

设 $K'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 是点 K 关于 x 轴的对称点.

$$\text{则 } NM+MK=NM+MK'\geqslant NK'=3\sqrt{5},$$



易知当 $m=\sqrt{2}$ 时取等号,

$$\text{所以 } (A_1P+BP)_{\min}=\sqrt{2}\times 3\sqrt{5}=3\sqrt{10}.$$

6. 解:(1)因为正方体的棱长为 1,

所以 $A(1,1,0), B(0,0,1)$.

因为 P 是 AB 的中点,

$$\text{所以 } P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

因为 $2CQ=QD$,

$$\text{所以 } CQ=\frac{1}{3}, \text{ 故 } Q\left(0,1,\frac{1}{3}\right).$$

由两点间的距离公式得

$$PQ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{19}{36}}=\frac{\sqrt{19}}{6}.$$

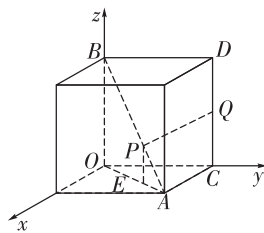
(2)如图,连接 OA ,过点 P 作 $PE\perp OA$,垂足为点 E ,则 PE 垂直于坐标平面 xOy .

设点 P 的横坐标为 x ,

则由正方体的性质可得点 P 的纵坐标也为 x .

由正方体的棱长为 1,

易得 $AE=\sqrt{2}(1-x)$.



$$\text{因为 } \frac{AE}{AO}=\frac{PE}{BO},$$

$$\text{所以 } PE=\frac{\sqrt{2}(1-x)\cdot 1}{\sqrt{2}}=1-x,$$

所以 $P(x,x,1-x)$.

又因为 $Q\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,

所以

$$PQ=\sqrt{(0-x)^2+(1-x)^2+\left[\frac{1}{2}-(1-x)\right]^2}=\sqrt{3x^2-3x+\frac{5}{4}}=\sqrt{3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}},$$

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $PQ_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

易错辨析

B 解析:由于 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3), \boldsymbol{b}=(-4,2,t)$ 的夹角为钝角,从而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,即 $2\times(-4)+(-1)\times 2+3t<0$,解得 $t<\frac{10}{3}$.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时, $\frac{-4}{2}=\frac{2}{-1}=\frac{t}{3}$,解得 $t=-6$.所以实数 t 的取值范围是 $(-\infty,-6)\cup\left(-6,\frac{10}{3}\right)$.故选 B.

滚动卷(一) 小测试(一)至(四)

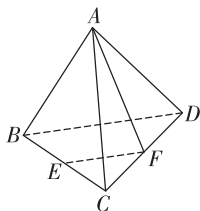
综合拔高

1. C 解析:向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,x), \boldsymbol{b}=(y,2,-1), |\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\therefore \begin{cases} |\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+4+x^2}=\sqrt{5}, \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=y+4-x=0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-4, \end{cases} \therefore x+y=-4.$$

2. C 解析:如图所示,连接 EF, AF , 则 $EF\parallel BD$,

$$EF=\frac{1}{2}BD, \text{ 所以 } \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}.$$



3. ACD 解析: $\overrightarrow{PB} = (3, 1, 0) - (0, 1, 2) = (3, 0, -2)$, 故选项 A 正确; $\overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (0, 1, 0) = (3, 0, 0)$, 故选项 B 不正确; $\overrightarrow{AC} = (0, 3, 0) - (0, 1, 0) = (0, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 0 \times 2 - 2 \times 0 = 0$, 所以 $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{AC}$, 故选项 C 正确; $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

4. AC 解析: $\because A(-1, 0, 1), B(-1, 2, 2), C(-3, 0, 4)$, $\therefore \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 3), \overrightarrow{BC} = (-2, -2, 2)$, 故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3, |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{3}$, $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{65}}{65}$.

5. D 解析: $\because |a| = |b| = 1, \therefore x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1$. $\because a$ 与 c 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, $\therefore a \cdot c = |a| \cdot |c| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\therefore a \cdot c = x_1 + y_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 又 $x_1^2 + y_1^2 = (x_1 + y_1)^2 - 2x_1 \cdot y_1 = 1$, $\therefore 2x_1 \cdot y_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}$, 即 $x_1 \cdot y_1 = \frac{1}{4}$,

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \\ y_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \\ y_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

$$\text{同理 } \begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \\ y_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \\ y_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

$$\because a \neq b, \therefore \begin{cases} x_1 = y_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \\ x_2 = y_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = y_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \\ x_2 = y_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

$$\text{又 } \cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2,$$

$$\therefore \cos \langle a, b \rangle = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \therefore \langle a, b \rangle \in [0, \pi], \therefore \langle a,$$

$$b \rangle = \frac{\pi}{3}. \text{ 故选 D.}$$

6. $\sqrt{38} \quad (-2, -3, -3)$ 解析: $\because \overrightarrow{AB} = (-3, 5, 2)$, $\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$. $\because E, F$ 分别为 BC, AD 的中点, 设 O 是坐标原点, $\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}), \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(-4, -6, -6) = (-2, -3, -3).$$

7. $(-4, -2, 4)$ 解析: 依题意 $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 2)$, 设 $c = (-2k, -k, 2k) (k > 0)$, 又 $|c| = 6$, 即 $\sqrt{(-2k)^2 + (-k)^2 + (2k)^2} = 6$, 解得 $k = 2$ 或 $k = -2$ (舍去), 故 $c = (-4, -2, 4)$.

8. $\frac{\pi}{3}$ 解析: 依题意可知 $CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \frac{\pi}{4} = 1$. 设异面直线 AB 与 CD 所成角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. 因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

9. 解: (1) 由已知可得 $c = \frac{1}{2}b = (-1, 1, 2)$,

$$a = (1, 4, -2),$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \langle a, c \rangle &= \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} \\ &= \frac{1 \times (-1) + 4 \times 1 + (-2) \times 2}{\sqrt{1 + 16 + 4} \times \sqrt{1 + 1 + 4}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{21} \times \sqrt{6}} \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{42}. \end{aligned}$$

(2) 由题意得 $ka + b = (k - 2, 4k + 2, -2k + 4)$,

$$a - 3b = (7, -2, -14).$$

$$\because (ka + b) \parallel (a - 3b),$$

$$\therefore \text{存在实数 } m \text{ 使得 } ka + b = m(a - 3b),$$

$$\therefore k - 2 = 7m, 4k + 2 = -2m, -2k + 4 = -14m,$$

$$\text{联立解得 } k = -\frac{1}{3}.$$

$$(3) \because (ka + b) \perp (a - 3b),$$

$$\therefore (ka+b) \cdot (a-3b)=0,$$

$$\text{即 } 7(k-2)-2(4k+2)-14(-2k+4)=0,$$

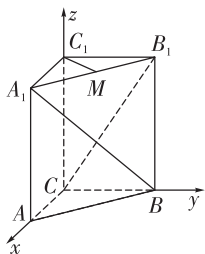
$$\text{解得 } k=\frac{74}{27}.$$

10. (1) 解: 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{则 } A_1(1,0,2), B(0,1,0), C_1(0,0,2), B_1(0,1,2), M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2), \overrightarrow{CB_1}=(0,1,2),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$



$$(2) \text{证明: 由(1)得 } \overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2),$$

$$\overrightarrow{C_1M}=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{C_1M}=0,$$

$$\text{所以 } A_1B \perp C_1M.$$

素养提升

1. AB 解析: 对于 A, 因为 $\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}, \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$, 所以 A, B, C 三点共线, 所以点 P 与 A, B, C 三点共面, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, 所以点 P 与 A, B, C 三点共面, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}, 1+1+1=3 \neq 1$, 所以点 P 与 A, B, C 三点不共面, 故 C 错误; 对于 D, 由 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 得 $\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$, 而 $-1-1-1=-3 \neq 1$, 所以点 P 与 A, B, C 三点不共面, 故 D 错误. 故选 AB.

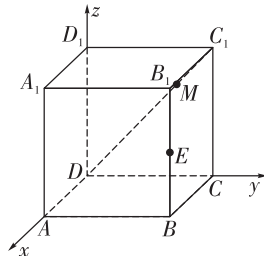
2. D 解析: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐

标系, 由题意得 $A(1,0,0), M\left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 设 $E(1,$

$1, a)$, 则 $\overrightarrow{AM}=\left(-1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{DE}=(1, 1, a)$. 又

$AM \perp DE$, 所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE}=0$, 解得 $a=\frac{1}{2}$, 所以

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}, \text{即 } \lambda=\frac{1}{2}.$$



3. B 解析: 如图所示, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(1,0,0), B(1,1,0), D_1(0,0,1)$. 设 $E(0, t, 1-t)$, 则 $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1), \overrightarrow{BE}=(-1, t-1, 1-t)$.

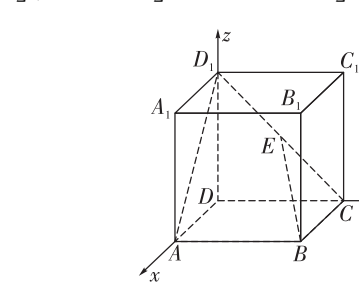
因为直线 BE 与 AD_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$|\cos \langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{BE} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD_1}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} \right| =$$

$$\frac{|1+1-t|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+(t-1)^2+(1-t)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 E 在 CD_1 上, 所以 $0 \leq t \leq 1$, 解得 $t=\frac{1}{2}$, 故 $\overrightarrow{BE}=(-1, -\frac{1}{2},$

$$\frac{1}{2}), |\overrightarrow{BE}|=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$



4. 4 解析: 因为 $A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1)$, 所以 $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0), \overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$, 所以 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, 所以 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量的长度为 $\left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right| = \left| \frac{0-20+0}{5} \right| = 4$.

5. 解: (1) 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{则 } B_1(1,1,1), N\left(0,1,\frac{1}{3}\right), M\left(1,\frac{1}{2},0\right),$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right),$$

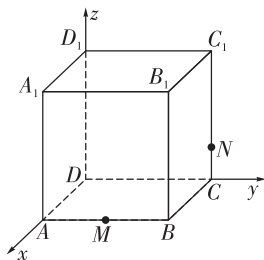
$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{7}{6}.$$

故 MN 的长为 $\frac{7}{6}$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{MN} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{则 } |\cos \langle \overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{MN} \rangle| = \left| \frac{-\frac{1}{6}}{\sqrt{3} \times \frac{7}{6}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{21},$$

故 DB_1 与 MN 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{21}$.



6. 解: (1) 分别取 AC, A_1C_1 的中点 O, O_1 , 建立如图所示的空间直角坐标系.

设正三棱柱的侧棱长为 h ,

由题意得 $A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0),$

$B_1(\sqrt{3}, 0, h), C_1(0, 1, h),$

则 $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, h), \overrightarrow{BC_1} = (-\sqrt{3}, 1, h),$

因为 $AB_1 \perp BC_1,$

所以 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = -3 + 1 + h^2 = 0,$

解得 $h = \sqrt{2}$ 或 $h = -\sqrt{2}$ (舍去).

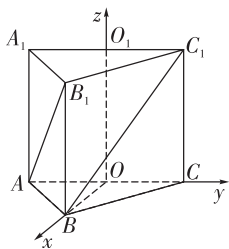
(2) 由 (1) 知 $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{2}), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0).$

所以 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 + 1 = -2.$

因为 $|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{BC}| = 2,$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{-2}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

所以异面直线 AB_1 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



小测试(五) 空间中点、直线和平面的向量表示

预习自评

1. A 2. BC 3. D

基础过关

1. B 解析: 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times (-2) + 2 \times 3 - 2m = 4 - 2m = 0$, 解得 $m = 2$. 故选 B.

2. D 解析: $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2), \overrightarrow{BC} = (-2, 0, 1),$
 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 + \lambda - 2\mu = 0, \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 + \mu = 0$, 可得
 $\mu = 2, \lambda = 5, \lambda + \mu = 7$. 故选 D.

3. A 解析: 因为 $A(0, y, 3)$ 和 $B(-1, 2, z)$, 所以
 $\overrightarrow{AB} = (-1, 2-y, z-3)$. 因为直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{m} = (2, -1, 3)$, 所以设 $\overrightarrow{AB} = k\mathbf{m}$, 所以 $-1 = 2k, 2-y = -k, z-3 = 3k$, 解得 $k = -\frac{1}{2}, y = z = \frac{3}{2}$, 所以 $y-z=0$. 故选 A.

4. B 解析: 由题意可知符合条件的点 P 应满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 0$. 选项 A, $\overrightarrow{PA} = (1, 0, 1), \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 3 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 1 = 5 \neq 0$, 故不在平面 α 内; 选项 B, $\overrightarrow{PA} = (1, -4, \frac{1}{2}), \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 0$, 故在平面 α 内; 选项 C, $\overrightarrow{PA} = (1, 2, \frac{1}{2}), \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 6 \neq 0$, 故不在平面 α 内; 选项 D, $\overrightarrow{PA} = (3, -4, \frac{7}{2}), \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 12 \neq 0$, 故不在平面 α 内. 故选 B.

5. ABC 解析: 设正方体的棱长为 1, $\because AA_1 \parallel DD_1, \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1), \therefore A$ 正确; $\because AD_1 \parallel BC_1, \overrightarrow{AD_1} = (0, 1, 1), \therefore B$ 正确; $AD \perp$ 平面 $ABB_1A_1, \overrightarrow{AD} = (0, 1, 0), \therefore C$ 正确; $\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1)$, 显然与平面 B_1CD 不垂直, $\therefore D$ 错误. 故选 ABC.

6. $(1, 1, 1)$ (答案不唯一) 解析: 设平面 ABC 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 又 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$, 所以 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AC}$, 所以

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -x + y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -x + z = 0, \end{cases} \text{ 取 } x = 1, \text{ 则 } y = 1, z = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, 1, 1). \text{ (答案不唯一)}$$

7. 平行 解析: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = (-1, 2, -3) \cdot (4, -1, -2) = 0$, 所以 $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$. 又 $l \not\subset \alpha$, 所以直线 l 与平面 α 平行, 即 $l \parallel \alpha$.

8. 解: 由题意知 $C(0, 0, 0), A_1(1, 0, 2), B_1(0, 1, 2),$

则 $\overrightarrow{CA_1} = (1, 0, 2), \overrightarrow{CB_1} = (0, 1, 2)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 A_1B_1C 的一个法向量,

所以 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{CA_1}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{CB_1}$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = x + 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = y + 2z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = -2, y = -2$.

故平面 A_1B_1C 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (-2, -2, 1)$

(答案不唯一).

素养提升

1. A 解析: $\because$ 向量 $\mathbf{a} = (2, 3, 5), \mathbf{b} = (3, x, y)$ 分别是

直线 l_1, l_2 的方向向量, $l_1 \parallel l_2, \therefore \frac{3}{2} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$, 解

$$\text{得 } x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}.$$

2. D 解析: 若 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, 则 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$; 另一方面,

若 $l \parallel \alpha$, 则 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. 因此“ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ ”是“ $l \parallel \alpha$ ”的必要不充分条件.

3. A 解析: 如图所示, 设 E, F 分别是 CC_1, DD_1 的中

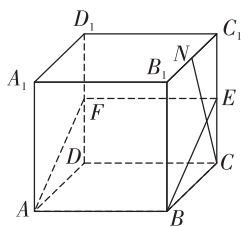
点, 连接 AF, EF, BE , 则 $\tan \angle EBC = \tan \angle NCC_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle NCC_1 + \angle BEC = \angle EBC + \angle BEC =$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $BE \perp CN$. 由正方体的性质可知 $CN \perp AB$,

而 $AB \cap BE = B$, 所以 $CN \perp$ 平面 $ABEF$, 所以点 P 的

轨迹是矩形 $ABEF$, 所以点 P 的运动轨迹形成的

图形的面积是 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.



4. a 或 2a 解析: 以 B 为原点, 建立如图所示的空间

直角坐标系 $B-xyz$, 则 $B_1(0, 0, 3a), D(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2},$

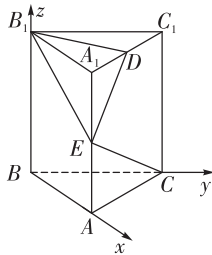
$3a), C(0, \sqrt{2}a, 0)$. 设 $E(\sqrt{2}a, 0, z) (0 \leq z \leq 3a)$, 则

$\overrightarrow{CE} = (\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, z), \overrightarrow{B_1E} = (\sqrt{2}a, 0, z - 3a)$. 因为

$CE \perp$ 平面 $B_1DE, B_1E \subset$ 平面 B_1DE , 所以 $\overrightarrow{CE} \perp$

$\overrightarrow{B_1E}$, 所以 $2a^2 + z^2 - 3az = 0$, 解得 $z = a$ 或 $z = 2a$.

故 $AE = a$ 或 $AE = 2a$.



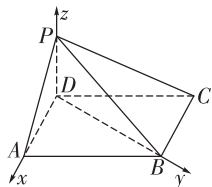
5. 解: 因为 $\angle DAB = 60^\circ, AB = 2AD = 2$,

由余弦定理得 $BD = \sqrt{3}$,

从而 $BD^2 + AD^2 = AB^2$,

故 $BD \perp AD$,

以 D 为坐标原点, 以射线 DA, DB, DP 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正半轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, 1)$,

$\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{PB} = (0, \sqrt{3}, -1)$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$.

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0, \\ \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$$

因此可取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$.

所以平面 PAB 的一个法向量可以为 $(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$.

(答案不唯一)

6. (1) 证明: 因为 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) \cdot (2, -1, -4) = 0$,

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = (-1, 2, -1) \cdot (4, 2, 0) = 0$,

所以 $AP \perp AB, AP \perp AD$.

又 $AB \cap AD = A$,

所以 $AP \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

(2) 解: 因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$,

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (2, -1, -4) \cdot (4, 2, 0) = 6$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{6}{\sqrt{21} \times 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{35}},$$

$$\text{故 } \sin\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \sqrt{\frac{32}{35}},$$

$$S_{\square ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \sin\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = 8\sqrt{6}.$$

易错辨析

1.1.3 解析:由题意知 $a \parallel b$, 所以 $\frac{x}{1} = \frac{x^2+y-2}{2} =$

$$\frac{y}{3}, \text{ 即 } \begin{cases} y=3x, & \text{①} \\ x^2+y-2=2x. & \text{②} \end{cases} \text{ 把①代入②, 得 } x^2 +$$

$x-2=0$, 解得 $x=-2$ 或 $x=1$. 当 $x=-2$ 时,

$$y=-6; \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } y=3. \text{ 当 } \begin{cases} x=-2, \\ y=-6 \end{cases} \text{ 时, } b =$$

$(-2, -4, -6) = -2a$, 此时 a, b 反向, 不符合题

意, 舍去. 当 $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 时, $b = (1, 2, 3) = a$, 此时 a 与 b

同向, 所以 $\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

2. B 解析: $\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3 \times 6 + 3 \times 6 + 3 \times 6 = 54$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 3\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{OB}| = 6\sqrt{3}$, $\cos\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{54}{3\sqrt{3} \times 6\sqrt{3}} = 1$. $\therefore \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle \in [0, \pi]$, $\therefore \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = 0$, $\therefore \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO} \rangle = \pi$.

小测试(六) 空间中直线、平面的平行与垂直

预习自评

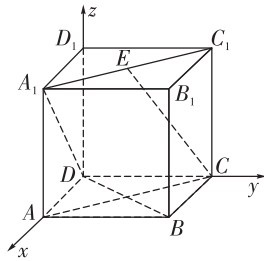
1. C 2. B 3. D

基础过关

1. C 解析:由直线 $l \parallel$ 平面 ABC 可知 $a \cdot n = 0$.

2. D 解析: $\because$ 平面 α 的一个法向量为 a , 平面 β 的一个法向量为 b , 且 $\alpha \perp \beta$, $\therefore a \perp b$, $\therefore a \cdot b = -2 - 8 - 2k = 0$, $\therefore k = -5$. 故选 D.

3. A 解析:如图所示,以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 设正方体的棱长为 1, 则 $C(0, 1, 0), B(1, 1, 0), A(1, 0, 0), D(0, 0, 0), C_1(0, 1, 1), A_1(1, 0, 1), E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, 所以 $\overrightarrow{CE} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{BD} = (-1, -1, 0), \overrightarrow{A_1D} = (-1, 0, -1), \overrightarrow{A_1A} = (0, 0, -1)$, 所以 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \neq 0, \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{A_1D} = -\frac{3}{2} \neq 0, \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{A_1A} = -1 \neq 0$, 所以 $CE \perp BD$. 故选 A.



4. D 解析:若 $a=b$, 则直线 l_1 不垂直于 l_2 , A 错误; 若 $a=\lambda m$, 则直线 $l_1 \perp$ 平面 α , B 错误; 若 $b \cdot n = 0$, 则直线 $l_2 \parallel$ 平面 β , C 错误; 若 $m \cdot n = 0$, 则平面 $\alpha \perp$ 平面 β , D 正确.

5. D 解析:由题得 $D(0, 0, 0), A(1, 0, 0), A_1(1, 0, 1), B(1, 1, 0), B_1(1, 1, 1), C(0, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{A_1C} = (-1, 1, -1), \overrightarrow{B_1D} = (-1, -1, -1), \overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$. 因为 $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 1 \neq 0, \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \neq 0, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 1 \neq 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0$, 所以 A_1C 与 B_1D, A_1C 与 BC, B_1D 与 BC 均不垂直, $B_1D \perp AC$, A, B, C 错误, D 正确.

6. 2 解析:因为 $\alpha \parallel \beta$, 所以 $\frac{3\lambda}{\lambda+1} = \frac{6}{3} = \frac{\lambda+6}{2\lambda}$, 解得 $\lambda = 2$.

7. 平行 解析: $n \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-3) \times 0 + 1 \times (-2) = 0, n \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 0$, $AB \cap AC = A$, 所以 n 也是平面 ABC 的一个法向量. 又因为平面 α 与平面 ABC 不重合, 所以平面 α 与平面 ABC 平行.

8. 证明:(1)如图,以 B_1 为坐标原点, B_1A_1, B_1C_1, B_1B 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

设 $AB=a$,

则 $B_1(0, 0, 0), F(0, 1, 0), E(0, 0, 1), A(a, 0, 4),$

$B(0, 0, 4), D(0, 2, 2), G(\frac{a}{2}, 1, 0),$

所以 $\overrightarrow{B_1D} = (0, 2, 2), \overrightarrow{AB} = (-a, 0, 0),$

$\overrightarrow{BD} = (0, 2, -2),$

所以 $\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + 0 + 0 = 0,$

$\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 4 - 4 = 0,$

所以 $\overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{BD},$

即 $B_1D \perp AB, B_1D \perp BD.$

又 $AB \cap BD = B,$

所以 $B_1D \perp$ 平面 ABD .

所以 $\overrightarrow{AE} = (1, 1, 1)$.

又因为 $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$,

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PD} = 1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times (-2) = 0$,

所以 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{PD}$,

即 $AE \perp PD$.

(2) 因为底面 $ABCD$ 是正方形,

所以 $BD \perp AC$.

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD \perp AP$.

又 $AC \cap PA = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC ,

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$.

设平面 PBD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{PB} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 2x - 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - 2z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = 1, y = 1$,

所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.

因为 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 + 1 \times 0 = 0$,

所以 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{BD}$,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC .

6. 证明: (1) 建立如图所示的空间直角坐标系,

设正方体的棱长为 2,

则 $D(0, 0, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $B_1(2, 2, 2)$,

$C(0, 2, 0)$, $D_1(0, 0, 2)$.

设平面 A_1BD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$\therefore \overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 2x + 2z = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

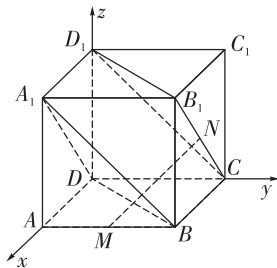
令 $x = -1$, 则 $y = 1, z = 1$,

$\therefore \mathbf{m} = (-1, 1, 1)$.

同理, 平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (-1, 1, 1)$,

$\therefore \mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$,

$\therefore$ 平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 .



(2) $\because M, N$ 分别为 AB, B_1C 的中点,

$\therefore M(2, 1, 0), N(1, 2, 1)$,

$\therefore \overrightarrow{MN} = (-1, 1, 1)$.

$\therefore \overrightarrow{MN} \parallel \mathbf{m}$,

$\therefore MN \perp$ 平面 A_1BD .

易错辨析

C 解析: 设平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 则}$$

$x = 2, y = -3, \therefore \mathbf{m} = (2, -3, 1)$. 题目中不能确定

直线 l 是否在平面 ABC 内, 由 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 1 \times 2 + 2 \times (-3) + 4 \times 1 = 0$, 得直线 l 与平面 ABC 平行或直线 l 在平面 ABC 内. 故选 C.

小测试(七) 距离问题

预习自评

1. D 2. D 3. A

基础过关

1. B 解析: $\because$ 平面 α, β 平行, 且平面 α 经过坐标原点

O , $\therefore$ 两平面间的距离就是点 O 到平面 β 的距离. 又

平面 β 经过点 $A(2, 1, 1)$, 且一个法向量为 $\mathbf{n} =$

$(-1, 0, 1)$, $\therefore$ 点 O 到平面 β 的距离 $d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OA}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{|-2 + 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即两平面间的距离是 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. A 解析: 设平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x,$

$$y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AD}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ -2x + y = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 得}$$

$y = 2, z = 0$, 即 $\mathbf{n} = (1, 2, 0)$. 所以 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 1$, $|\mathbf{n}| =$

$\sqrt{5}$, 所以点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故四棱锥 } P-ABCD \text{ 的高为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3. C 解析: 设直线 l 上一点 $B(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AB} =$

$(x-1, y+1, z-2)$. 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = -3(x-1) +$

$4(z-2) = 0$. 所以直线 l 的方程为 $3x - 4z + 5 = 0$. 所

以点 P 到直线 l 的距离 $d = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5}$.

4. A 解析: 如图所示, 以 A 为原点, 建立空间直角坐

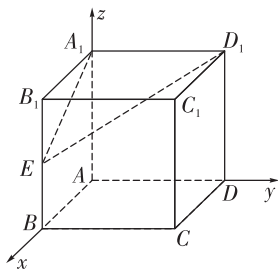
标系, 则 $A_1(0, 0, 1)$, $D_1(0, 1, 1)$, $E(1, 0, \frac{1}{2})$, 据此

可得 $\overrightarrow{A_1D_1} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{A_1E} = (1, 0, -\frac{1}{2})$, 设平面

A_1D_1E 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 - \frac{1}{2}z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_1 = 1, \text{ 则可得平面 } A_1D_1E \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{m} = (1, 0, 2), \text{ 而 } C(1, 1, 0), \text{ 则有 } \overrightarrow{A_1C} = (1, 1, -1), \text{ 故点 } C \text{ 到平面 } A_1D_1E \text{ 的距离为}$$

$$\frac{|\overrightarrow{A_1C} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



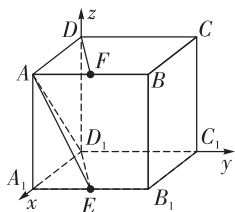
5. C 解析: 由题意得 $\overrightarrow{AP} = (-2-x, -2, 4)$,

所以 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-2-x)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 24}$, 又 $|\mathbf{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = -2(-2-x) + 4 + 4 = 2x + 12$, 所以点 P 到平面 α 的距离是 $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2x+12|}{3} = \frac{10}{3}$, 解得 $x = -1$ 或 $x = -11$.

6. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 解析: 因为 E, F 分别是 A_1B_1 和 AB 的中点,

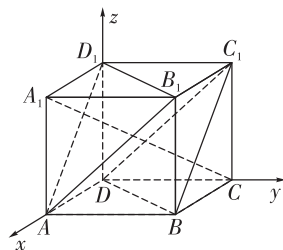
结合正方体几何性质可得 $DF \parallel D_1E$, 又 $D_1E \subset$ 平面 AD_1E , 所以 $DF \parallel$ 平面 AD_1E , 故直线 DF 到平面 AD_1E 的距离即为点 F 到平面 AD_1E 的距离. 以 D_1 为坐标原点, D_1A_1, D_1C_1, D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 D_1-xyz , 则 $D(0, 0, 2), F(2, 1, 2), A(2, 0, 2), E(2, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AF} = (0, 1, 0), \overrightarrow{AE} = (0, 1, -2), \overrightarrow{D_1A} = (2, 0, 2)$. 设平面 AD_1E 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1A} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y - 2z = 0, \\ 2x + 2z = 0, \end{cases}$ 取 $z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (-1, 2, 1)$, 故直线 DF 到平面 AD_1E 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



7. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 解析: 由正方体的性质得, $AB_1 \parallel DC_1$,

$D_1B_1 \parallel DB, AB_1 \cap D_1B_1 = B_1, DC_1 \cap DB = D$, 故平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 则两平面的距离可转化为点 B 到平面 AB_1D_1 的距离. 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $A(a, 0, 0), B(a, a, 0), A_1(a, 0, a), C(0, a, 0), B_1(a, a, a), D_1(0, 0, a)$, 所以 $\overrightarrow{CA_1} = (a, -a, a), \overrightarrow{BA} = (0, -a, 0), \overrightarrow{AB_1} = (0, a, a), \overrightarrow{B_1D_1} = (-a, -a, 0)$, 所以 $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = 0$, 所以 $CA_1 \perp AB_1, CA_1 \perp B_1D_1$. 又 $AB_1 \cap B_1D_1 = B_1$, 可得 $CA_1 \perp$ 平面 AB_1D_1 , 易得平面 AB_1D_1 的一个法向量 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$, 则两平面的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.



8. 解: 由题意可得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{PM} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = \overrightarrow{PN} = (-1, 0, 2)$.

(1) $k\mathbf{a} + \mathbf{b} = (k-1, k, 2)$,
 $k\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (k+2, k, -4)$,
 因为 $(k\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (k\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$,
 所以 $(k-1)(k+2) + k^2 - 8 = 0$,
 整理得 $2k^2 + k - 10 = 0$,
 解得 $k = 2$ 或 $k = -\frac{5}{2}$,

所以 k 的值为 2 或 $-\frac{5}{2}$.

(2) 设直线 PM 的单位方向向量为 $\mathbf{u}$,

$$\text{则 } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

因为 $\overrightarrow{PN} = \mathbf{b} = (-1, 0, 2)$,

$$\text{所以 } b^2 = 5, \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

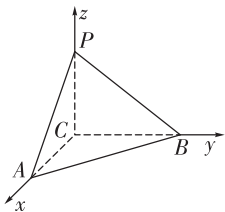
所以点 N 到直线 PM 的距离 $d = \sqrt{b^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})^2} =$

$$\sqrt{5 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

素养提升

1. C 解析: 以点 C 为坐标原点, CA, CB, CP 所在直

线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



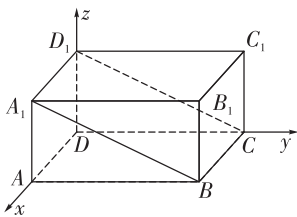
则 $A(4,0,0), B(0,3,0), P(0,0,\frac{9}{5})$,

所以 $\overrightarrow{AB}=(-4,3,0), \overrightarrow{AP}=(-4,0,\frac{9}{5})$, 所以点 P

到 AB 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}{|\overrightarrow{AB}|} =$

$$\sqrt{16 + \frac{81}{25} - \frac{256}{25}} = 3. \text{ 故选 C.}$$

2. C 解析: 以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0,12,0), D_1(0,0,5)$. 设 $B(x,12,0)$, 则 $B_1(x,12,5), x>0$. 设平面 A_1BCD_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(a,b,c)$, 则 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{BC}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{CD_1}$, 得 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = (a,b,c) \cdot (-x,0,0) = -ax = 0, \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD_1} = (a,b,c) \cdot (0,-12,5) = -12b+5c=0$, 所以 $a=0, b=\frac{5}{12}c$, 所以可取 $\mathbf{n}=(0,5,12)$. 又 $\overrightarrow{B_1B}=(0,0,-5)$, 所以点 B_1 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{B_1B} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{60}{13}$. 易知 $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BCD_1 , 所以直线 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\frac{60}{13}$. 故选 C.

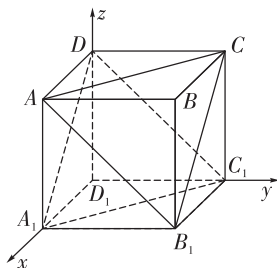


3. B 解析: 以 D_1 为原点, D_1A_1, D_1C_1, D_1D 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A_1(1,0,0), C_1(0,1,0), D(0,0,1), A(1,0,1)$, 所以 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,-1), \overrightarrow{DC_1}=(0,1,-1), \overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$. 设平面 A_1C_1D 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,1)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \perp \overrightarrow{DA_1} \\ \mathbf{m} \perp \overrightarrow{DC_1} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x-1=0, \\ y-1=0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases} \text{ 故 } \mathbf{m}=(1,1,1). \text{ 显然平面 } AB_1C \parallel \text{ 平面}$$

A_1C_1D , 所以平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 之间的距

$$\text{离 } d = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 B.}$$



4. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 解析: 由题意得 $A_1B_1 \parallel EF$, 又 $A_1B_1 \not\subset$ 平面

$D_1EF, EF \subset$ 平面 D_1EF , 所以 $A_1B_1 \parallel$ 平面 D_1EF ,

故点 G 到平面 D_1EF 的距离等于点 A_1 到平面

D_1EF 的距离. 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 方向分别

为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系

$D-xyz$, 则 $D_1(0,0,2), E(2,0,1), F(2,2,1),$

$A_1(2,0,2)$, 所以 $\overrightarrow{D_1E}=(2,0,-1), \overrightarrow{D_1F}=(2,2,$

$-1), \overrightarrow{A_1E}=(0,0,-1)$. 设平面 D_1EF 的一个法向

量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1F}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1E}=0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} 2x+2y-z=0, \\ 2x-z=0, \end{cases} \text{ 令 } x=1, \text{ 则 } y=0, z=2, \text{ 所以平面}$$

D_1EF 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(1,0,2)$. 故点 A_1 到平

面 D_1EF 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{A_1E} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|-1 \times 2|}{\sqrt{5}} =$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 即点 } G \text{ 到平面 } D_1EF \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

5. 解: 以 A 为原点, AB, AD, AP 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0,0,0), C(2,4,0), P(0,0,4), B(2,0,0),$

$D(0,4,0)$,

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-4), \overrightarrow{PD}=(0,4,-4),$

$\overrightarrow{AP}=(0,0,4), \overrightarrow{AC}=(2,4,0).$

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda \overrightarrow{PD} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{PM}=(0,4\lambda,-4\lambda),$

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PB}=(-2,4\lambda,4-4\lambda).$

因为 $BM \perp PD$,

所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 + 16\lambda - 4(4-4\lambda) = 0,$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2},$$

所以 $\overrightarrow{PM} = (0, 2, -2)$,

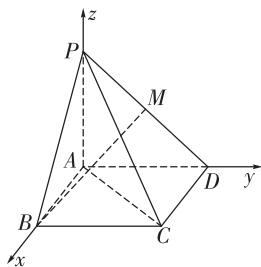
设平面 PAC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 4z = 0, \\ 2x + 4y = 0, \end{cases}$$

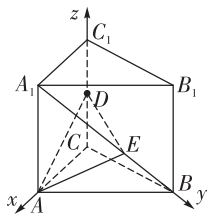
令 $x = 2$, 得 $y = -1, z = 0$, 即 $\mathbf{n} = (2, -1, 0)$.

所以点 M 到平面 PAC 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} =$

$$\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$



6. 解: 假设存在点 E 满足题意, 连接 AE, AD, DE . 以点 C 为坐标原点, CA, CB, CC_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2, 0, 0), A_1(2, 0, 2), D(0, 0, 1), B(0, 2, 0)$,

则 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2), \overrightarrow{AD} = (-2, 0, 1)$,

$\overrightarrow{BA_1} = (2, -2, 2)$.

设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA_1}, \lambda \in (0, 1)$,

则 $E(2\lambda, 2(1-\lambda), 2\lambda), \overrightarrow{AE} = (2\lambda-2, 2(1-\lambda), 2\lambda)$,

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 AED 的一个法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + z = 0, \\ 2(\lambda-1)x + 2(1-\lambda)y + 2\lambda z = 0, \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $y = \frac{1-3\lambda}{1-\lambda}, z = 2$,

即 $\mathbf{n} = (1, \frac{1-3\lambda}{1-\lambda}, 2)$.

由于点 A_1 到平面 AED 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{因此} \frac{4}{\sqrt{5 + \left(\frac{1-3\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

又 $\lambda \in (0, 1)$,

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$.

故存在点 E , 且当点 E 为 A_1B 的中点时, 点 A_1 到平面 AED 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

易错辨析

D 解析: 如图, 以点 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

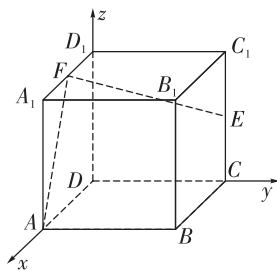
则 $A(2, 0, 0), E(0, 2, 1), F(1, 0, 2)$. $\therefore \overrightarrow{EF} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{FA} = (1, 0, -2)$, $\therefore |\overrightarrow{EF}| =$

$$\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \therefore \overrightarrow{EF} \text{ 的单位向量为 } \mathbf{u} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \therefore \text{点 } A \text{ 到直线}$$

$$EF \text{ 的距离 } d = \sqrt{|\overrightarrow{FA}|^2 - (\overrightarrow{FA} \cdot \mathbf{u})^2} =$$

$$\sqrt{|\overrightarrow{FA}|^2 - \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{6}} = \frac{\sqrt{174}}{6}. \text{ 故选 D.}$$



小测试(八) 夹角问题

预习自评

1. C 2. D 3. D

基础过关

1. C 解析: 如图所示, 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 设 $|\overrightarrow{PA}| = 1$, 则 $A(0, 0, 0)$,

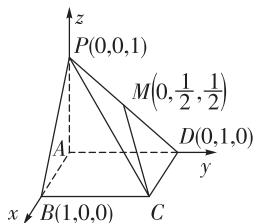
$C(1, 1, 0), P(0, 0, 1), B(1, 0, 0), M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{MC} = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 故

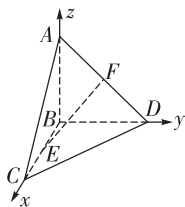
$$\cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{MC} \rangle = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\overrightarrow{MC}|} =$$

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1+1} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 因为异面直线夹角的}$$

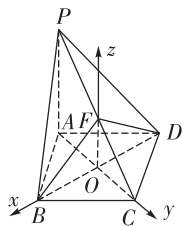
范围是 $(0^\circ, 90^\circ]$, 所以直线 CM 与 PB 所成角的大小为 30° .



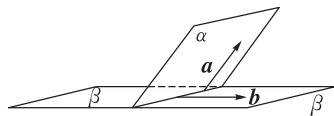
2. C 解析: 如图所示, 以 BC, BD, BA 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0,0,4), B(0,0,0), C(4,0,0), D(0,4,0), E(2,0,0), F(0,2,2)$, $\therefore \vec{AC} = (4,0,-4), \vec{AD} = (0,4,-4), \vec{EF} = (-2,2,2)$, 设平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x,y,z)$, 则
- $$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4x - 4z = 0, \\ 4y - 4z = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 可得 } \mathbf{n} = (1, 1, 1), \therefore \cos \langle \mathbf{n}, \vec{EF} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{EF}}{|\mathbf{n}| |\vec{EF}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$
- 设直线 EF 与平面 ACD 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \cos \langle \mathbf{n}, \vec{EF} \rangle = \frac{1}{3}, \therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



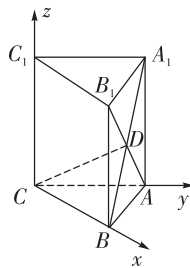
3. D 解析: 设 $AC \cap BD = O$, 连接 OF , 则 $OF \parallel PA$, $\therefore OF \perp$ 平面 $ABCD$. 以 O 为原点, OB, OC, OF 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $PA = AD = AC = 1$, 则 $BD = \sqrt{3}$, $\therefore B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), F(0, 0, \frac{1}{2}), C(0, \frac{1}{2}, 0), D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), \therefore \vec{OC} = (0, \frac{1}{2}, 0)$, 易得 $\vec{OC}$ 为平面 BDF 的一个法向量. 由 $\vec{BC} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \vec{FB} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, 可得平面 BCF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \therefore \cos \langle \mathbf{n}, \vec{OC} \rangle = \frac{\sqrt{21}}{7}, \sin \langle \mathbf{n}, \vec{OC} \rangle = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \therefore \tan \langle \mathbf{n}, \vec{OC} \rangle = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



4. AC 解析: 令 $\mathbf{a} = (0, -1, 3), \mathbf{b} = (2, 2, 4)$, 则
- $$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{(0, -1, 3) \cdot (2, 2, 4)}{\sqrt{1+9} \times \sqrt{4+4+16}} = \frac{-2+12}{\sqrt{10} \times \sqrt{24}} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$
- 因为两个半平面的位置有两种可能, 如图所示, 所以当 β 在 α 右边时, 二面角为锐角, 余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$; 当 β 在 α 左边时, 二面角为钝角, 余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{6}$, 故选 AC.



5. C 解析: 建立如图所示的空间直角坐标系, 由题意得 $C(0,0,0), A(0,1,0), B(\sqrt{2}, 0, 0), B_1(\sqrt{2}, 0, 1), D(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $\vec{CD} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \vec{CB} = (\sqrt{2}, 0, 0), \vec{BD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \vec{BB_1} = (0, 0, 1)$. 设平面 BCD 和平面 B_1BD 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, 易得 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, -1), \mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{2}, 0)$, 所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以平面 B_1BD 与平面 BCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.



6. $\frac{\pi}{4}$ 解析: 因为 $BE \perp$ 平面 BCD , 所以 $\vec{BE}$ 是平面 BCD 的一个法向量. 设直线 AB 与平面 BCD 所成角为 $\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{AB}, \vec{BE} \rangle| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{BE}|}{|\vec{AB}| |\vec{BE}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故直线 AB 与平面 BCD 所成角为 $\frac{\pi}{4}$.

7. $\frac{2}{3}$ 解析: 设锐二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角为 θ , $\vec{CD} = -\vec{AC} + \vec{AB} + \vec{BD}$, 则 $\vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 + \vec{BD}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 36 +$

$16+36-72\cos\theta=40$, 则 $\cos\theta=\frac{2}{3}$.

8. (1) 证明: 连接 BD , 所图所示.

在矩形 $ABCD$ 中, $AB=AD$,

则四边形 $ABCD$ 为正方形,

所以 $AC \perp BD$,

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DD_1 \perp AC$,

又 $BD \cap DD_1 = D$, $BD, DD_1 \subset$ 平面 BDD_1 ,

所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ,

又 $BE \subset$ 平面 BDD_1 ,

所以 $AC \perp BE$.

(2) 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $A(1,0,0), C(0,1,0), B(1,1,0), C_1(0,1,2), E(0,0,1)$,

则 $\overrightarrow{EB}=(1,1,-1), \overrightarrow{EC_1}=(0,1,1)$,

$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,

设平面 BC_1E 的一个法向量 $\mathbf{m}=(x,y,z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x+y-z=0, \\ y+z=0, \end{cases}$$

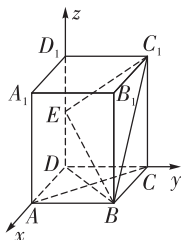
取 $y=1$, 得 $x=-2, z=-1$,

则 $\mathbf{m}=(-2,1,-1)$,

$$\text{则 } |\cos\langle \overrightarrow{AC}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{AC}| |\mathbf{m}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

因为线面角的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

所以直线 AC 与平面 BC_1E 所成角为 $\frac{\pi}{3}$.



素养提升

1. A 解析: 由题意可得 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1), \overrightarrow{CD}=(-2,-3,-3)$, 所以 $\cos\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} =$

$$\frac{5}{3 \times \sqrt{22}} = \frac{5\sqrt{22}}{66}, \text{ 故直线 } AB \text{ 与 } CD \text{ 所成角的余弦}$$

值为 $\frac{5\sqrt{22}}{66}$. 故选 A.

2. A 解析: 如图, 取 AB 的中点 D , 取 A_1B_1 的中点 E , 连接 CD, DE . 分别以 DA, DC, DE 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(1,0,0)$,

$$A_1(1,0,3), B_1(-1,0,3), C_1(0,\sqrt{3},3), \therefore \overrightarrow{AA_1}=(0,0,3), \overrightarrow{AB_1}=(-2,0,3), \overrightarrow{AC_1}=(-1,\sqrt{3},3). \text{ 设平面 } AB_1C_1 \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{m}=(a,b,c), \text{ 则}$$

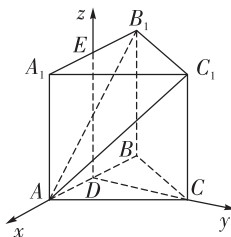
$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0, \end{cases} \quad \text{则} \quad \begin{cases} -2a+3c=0, \\ -a+\sqrt{3}b+3c=0, \end{cases} \quad \text{令 } a=3, \text{ 可得}$$

平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(3,-\sqrt{3},2)$,

$$\therefore \cos\langle \mathbf{m}, \overrightarrow{AA_1} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{1}{2}. \text{ 设 } AA_1 \text{ 与平面}$$

AB_1C_1 所成角为 θ , 则 $\sin\theta = |\cos\langle \mathbf{m}, \overrightarrow{AA_1} \rangle| = \frac{1}{2}$,

故 AA_1 与平面 AB_1C_1 所成角的大小为 30° , 故选 A.

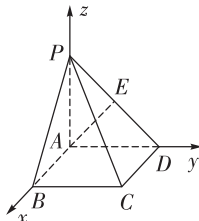


3. B 解析: 如图所示, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

设 $PA=AB=1$, 则 $A(0,0,0), D(0,1,0), P(0,0,1), \therefore \overrightarrow{AD}=(0,1,0)$. 取 PD 的中点 E , 连接 AE , 则 $E(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \therefore \overrightarrow{AE}=(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 易知 $\overrightarrow{AD}$ 是平面 PAB 的一个法向量, $\overrightarrow{AE}$ 是平面 PCD 的一个法向量, $\cos\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故平面 PAB 与平面 PCD

所成角的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

所成角的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.



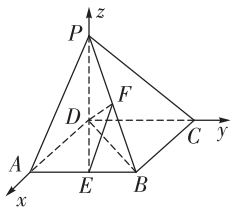
4. $(1,1,4)$ (答案不唯一) $\frac{\sqrt{33}}{11}$ 解析: 依题意可得

$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m} = 0$, 即 $3+1+t-4=0$, 解得 $t=0$, 所以

$\overrightarrow{AB}=(1,1,4)$,即直线 AB 的一个方向向量是 $(1,1,4)$ (答案不唯一). 由 $t=0$, 得 $\overrightarrow{AP}=(-1,-1,5)$. 设直线 AP 与平面 ABC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{AP}| |\mathbf{m}|} = \frac{|-3-1-5|}{\sqrt{27} \times \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$,

故直线 AP 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{11}$.

5. 解: 以 D 为坐标原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), E(2,1,0), P(0,0,2), F(1,1,1)$.



(1) 证明: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC} = (-1, 0, 1) \cdot (0, 2, 0) = 0$,
所以 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DC}$,

所以 $EF \perp CD$.

(2) 设平面 DEF 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DF} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $y=-2, z=1$,

从而 $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$.

设直线 DB 与平面 DEF 所成角为 θ ,

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DB}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{DB}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 DB 与平面 DEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

6. 解: 因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱,

所以 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

又 $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

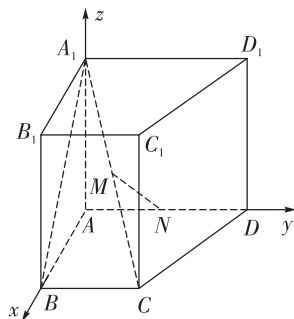
所以 $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AD$,

因为 $\angle BAD = 90^\circ$,

所以 $AB \perp AD$,

所以 AA_1, AB, AD 两两垂直,

以 AB, AD, AA_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示.



由 $AD=2AB=2BC=4, AA_1=4$,

知 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), A_1(0,0,4)$.

因为 M 为 A_1C 的中点,

所以 $M(1,1,2)$.

设 $AN=a$, 所以 $N(0,a,0) (0 \leq a \leq 4)$.

(1) 当 $AN=1$ 时, $N(0,1,0)$,

此时 $\overrightarrow{MN} = (-1, 0, -2), \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -4)$,

$$\text{于是} \cos \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A_1B} \rangle = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{A_1B}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{3}{5},$$

所以异面直线 MN 和 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.

(2) 由题意, 知 $\overrightarrow{MN} = (-1, a-1, -2)$,

$\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -4)$.

设平面 A_1BC 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x - 4z = 0, \end{cases}$$

令 $x=2$, 可得 $\mathbf{n} = (2, 0, 1)$ 是平面 A_1BC 的一个法向量.

因为直线 MN 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$,

$$\text{所以} |\cos \langle \overrightarrow{MN}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{MN}| |\mathbf{n}|} =$$

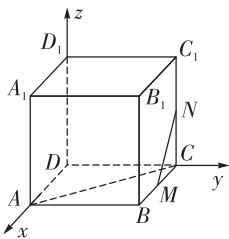
$$\frac{|-2-2|}{\sqrt{5+(a-1)^2} \times \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15},$$

解得 $a=3$ 或 $a=-1$ (舍去),

所以 $AN=3$.

易错辨析

B 解析: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2.



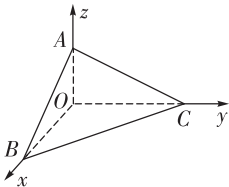
$\because M, N$ 分别为棱 BC 和棱 CC_1 的中点, $\therefore M(1, 2, 0), N(0, 2, 1), A(2, 0, 0), C(0, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{NM} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$. 设异面直线 AC 与 NM 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{NM}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 又 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$. $\therefore$ 异面直线 AC 与 NM 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 故选 B.

滚动卷(二) 小测试(五)至(八)

综合拔高

1. D 解析: 由向量加法的多边形法则, 得 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, $\therefore \overrightarrow{CD}^2 = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 16 + 16 + 16 + 0 + 2|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos 120^\circ + 0 = 48 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 32$. $\therefore |\overrightarrow{CD}| = 4\sqrt{2}$.

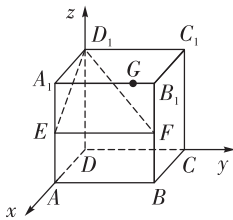
2. B 解析: 如图所示, 由题设, 得 $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (0, 2, -1)$. 设 $m = (x, y, z)$ 是平面 ABC 的一个法向量, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AB} = 3x - z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AC} = 2y - z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 则 $m = (\frac{2}{3}, 1, 2)$. 又 $\overrightarrow{OA} = (0, 0, 1)$, 设原点到平面 ABC 的距离为 d , 则 $d = \frac{|m \cdot \overrightarrow{OA}|}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{\frac{49}{9}}} = \frac{6}{7}$.



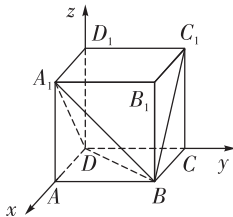
3. D 解析: 如图所示, 以 D 为原点, DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $G(2, \lambda, 2), D_1(0, 0, 2), E(2, 0, 1), F(2, 2, 1), \overrightarrow{ED_1} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{EF} = (0, 2, 0), \overrightarrow{EG} = (0, \lambda, 1)$. 设平面 D_1EF 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{ED_1} = -2x + z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{EF} = 2y = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$, 得

$n = (1, 0, 2)$, 所以点 G 到平面 D_1EF 的距离为 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{EG} \cdot n|}{|n|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



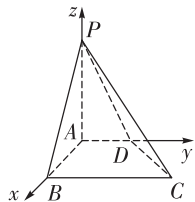
4. C 解析: 如图所示, 以 D 为原点, DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则 $B(1, 1, 0), C_1(0, 1, 1), A_1(1, 0, 1), D(0, 0, 0), \overrightarrow{BC_1} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{DA_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{DB} = (1, 1, 0)$. 设平面 A_1BD 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DA_1} = x + z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DB} = x + y = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$, 得 $n = (1, -1, -1)$. 设直线 BC_1 与平面 A_1BD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BC_1} \cdot n|}{|\overrightarrow{BC_1}| \cdot |n|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以直线 BC_1 与平面 A_1BD 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



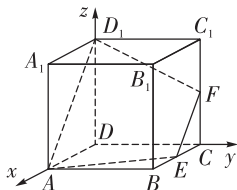
5. AC 解析: 对于 A, 两条不重合直线 l_1, l_2 的方向向量分别是 $a = (2, 3, -1), b = (-2, -3, 1)$, 则 $b = -a$, 所以 $l_1 \parallel l_2$, 故选项 A 正确; 对于 B, 直线 l 的方向向量是 $a = (1, -1, 2)$, 平面 α 的一个法向量是 $u = (6, 4, -1)$, 则 $a \cdot u = 1 \times 6 - 1 \times 4 + 2 \times (-1) = 0$, 所以 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$, 故选项 B 错误; 对于 C, 两个不同的平面 α, β 的法向量分别是 $u = (2, 2, -1), v = (-3, 4, 2)$, 则 $u \cdot v = 2 \times (-3) + 2 \times 4 - 1 \times 2 = 0$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故选项 C 正确; 对于 D, 直线 l 的方向向量是 $a = (0, 3, 0)$, 平面 α 的一个法向量是 $u = (0, -5, 0)$, 则 $u = -\frac{5}{3}a$, 所以 $l \perp \alpha$, 故选项 D 错误.

6. $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$ 解析: 因为 $v = (1, 2, 3), u = (5, 2, -3)$, 则 $1 \times 5 + 2 \times 2 + 3 \times (-3) = 0$, 所以 $v \perp u$, 所以 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$.

7. $\sqrt{2}$ 解析: 由题知 AB, AD, AP 两两垂直, $\therefore$ 以 A 为原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0), C(2,2,0), P(0,0,2), \overrightarrow{PB}=(2,0,-2), \overrightarrow{BC}=(0,2,0)$. 易知 $AD \parallel$ 平面 PBC . 设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n}=(a,b,c)$, 则 $\begin{cases} 2a-2c=0, \\ 2b=0. \end{cases}$ 取 $a=1$, 则 $\mathbf{n}=(1,0,1)$. 又 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, $\therefore d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \sqrt{2}$.



8. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 解析: 以 D 为坐标原点, 以 DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $A(1,0,0), E(\frac{1}{2}, 1, 0), D_1(0,0,1)$, $\therefore \overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1), \overrightarrow{AE}=(\frac{1}{2}, 1, 0)$. 设平面 $AEFD_1$ 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x+z=0, \\ -\frac{x}{2}+y=0, \end{cases}$ 取 $y=1$, 得 $\mathbf{n}=(2, 1, 2)$. 又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{u}=(0,0,1)$, $\therefore \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = \frac{2}{3}, \therefore \sin \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



9. (1) 证明: 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$, 因为 $AD \perp CD, PA \cap AD=A$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD . 因为 $AE \subset$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp AE$. (2) 解: 依题意, 以点 A 为原点建立空间直角坐标系, 如图所示. 由 $AB=AP=2$, 可得 $B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$.

由 E 为棱 PD 的中点, 得 $E(0,1,1)$,

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1), \overrightarrow{BD}=(-2,2,0), \overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$.

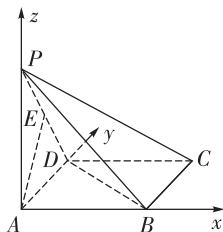
设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB}=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2x+2y=0, \\ 2x-2z=0, \end{cases}$$

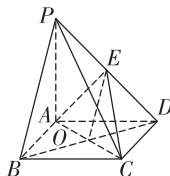
令 $y=1$, 可得 $\mathbf{n}=(1,1,1)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AE}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AE}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以直线 AE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



10. (1) 证明: 如图所示, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 OE ,



则 O, E 分别为 BD, PD 的中点,

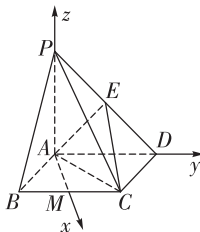
所以 $PB \parallel OE$,

又 $OE \subset$ 平面 $ACE, PB \not\subset$ 平面 ACE ,

所以 $PB \parallel$ 平面 ACE .

(2) 解: 由菱形 $ABCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $\angle BAD = 120^\circ$, 易得菱形的边长为 2.

如图所示, 取 BC 的中点 M , 连接 AM , 易得 $AB=AC$,



所以 $AM \perp BC$.

以点 A 为原点, 以 AM 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, AP 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $D(0, 2, 0)$, $A(0, 0, 0)$, $E(0, 1, \frac{1}{2})$, $C(\sqrt{3}, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AE} = (0, 1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{AE}, \mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{AC} \text{ 得 } \begin{cases} y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \sqrt{3}x + y = 0, \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = -3, z = 6$,

所以平面 ACE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{3}, -3, 6)$.

因为 $AM \perp AD, AM \perp PA$,

所以 $AM \perp$ 平面 PAD ,

所以平面 ADE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+9+36}} = \frac{1}{4},$$

所以平面 DAE 与平面 AEC 所成角的正弦值为

$$\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

素养提升

1. A 解析: 如图所示, 建立空间直角坐标系, 则

$A_1(0, 0, 1), D_1(0, 1, 1), E(1, 0, \frac{1}{2})$, 据此可得

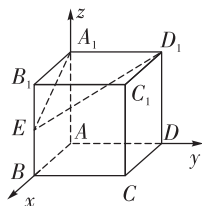
$\overrightarrow{A_1D_1} = (0, 1, 0), \overrightarrow{A_1E} = (1, 0, -\frac{1}{2})$. 设平面

A_1D_1E 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 - \frac{1}{2}z_1 = 0, \end{cases} \text{ 据此可得平面 } A_1D_1E \text{ 的一个法向}$$

量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 2)$. 而 $C(1, 1, 0)$, 据此得 $\overrightarrow{A_1C} = (1, 1, -1)$, 故点 C 到平面 A_1D_1E 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{A_1C} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



2. D 解析: 如图所示, 取 AC 的中点 E , 连接 EB ,

ED , 分别以 EA, ED, EB 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系. 令原菱形 $ABCD$ 的边长为

2, 则 $A(1, 0, 0), C(-1, 0, 0), D(0, \sqrt{3}, 0), B(0, 0,$

$\sqrt{3})$. 设平面 BCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, $\therefore \overrightarrow{BC} =$

$(-1, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

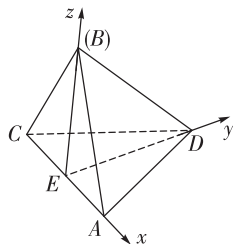
$$\therefore \begin{cases} -x - \sqrt{3}z = 0, \\ \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = \sqrt{3}, \text{ 则 } y = \sqrt{3}, x = -3, \text{ 即}$$

$\mathbf{n} = (-3, \sqrt{3}, \sqrt{3})$. 易知平面 ACD 的一个法向量为

$\mathbf{m} = (0, 0, 1)$. 设平面 BCD 与平面 ACD 所成角为

θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15} \times 1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\sin \theta =$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$



3. ABD 解析: 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 以

点 A 为坐标原点, 分别以 AB, AD, AA_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系. 设正方体的棱长为 2, 则 $A(0, 0, 0), A_1(0, 0, 2)$,

$B(2, 0, 0), B_1(2, 0, 2), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), D_1(0,$

$2, 2)$, 所以 $\overrightarrow{A_1C} = (2, 2, -2), \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AB_1} =$

$(2, 0, 2)$, 因此 $\overrightarrow{A_1C} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A}) = \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AB_1} =$

$4 - 4 = 0$, 故 A 正确; $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1A} +$

$\overrightarrow{B_1C} = (-2, 0, -2) + (0, 2, -2) = (-2, 2, -4)$,

$\overrightarrow{CD} = (-2, 0, 0)$, 所以 $(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C})^2 = 4 +$

$4 + 16 = 24, 6\overrightarrow{CD}^2 = 24$, 因此 $(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} +$

$\overrightarrow{B_1C})^2 = 6\overrightarrow{CD}^2$, 故 B 正确; 因为 $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2)$,

$\overrightarrow{AD_1} = (0, 2, 2)$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{AD_1} \rangle =$

$$\frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{AD_1}|} = \frac{-4}{\sqrt{4+4} \times \sqrt{4+4}} = -\frac{1}{2},$$

因此向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 与向量 $\overrightarrow{AD_1}$ 的夹角是 120° , 故 C 错误; 因为 E ,

F 分别是 BC, A_1C 的中点, 所以 $E(2, 1, 0), F(1, 1,$

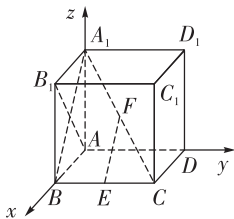
$1)$, 则 $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, 1)$. 又 $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 2)$, 所以

$$\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DD_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DD_1}}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{DD_1}|} = \frac{2}{\sqrt{1+1} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

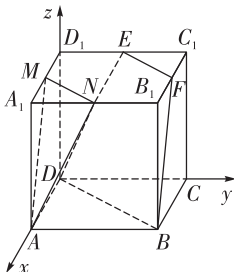
又

异面直线的夹角大于 0° 且小于等于 90° , 所以异面

直线 EF 与 DD_1 所成的角为 45° , 故 D 正确.



4. $\frac{8}{3}$ 解析: 如图所示, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $A(4,0,0), M(2,0,4), B(4,4,0), E(0,2,4), F(2,4,4), N(4,2,4), \therefore \overrightarrow{EF} = (2, 2, 0), \overrightarrow{MN} = (2, 2, 0), \overrightarrow{AM} = (-2, 0, 4), \overrightarrow{BF} = (-2, 0, 4), \therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AM}, \therefore EF \parallel MN, BF \parallel AM$. 又 $\because EF \cap BF = F, MN \cap AM = M, \therefore$ 平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$. 故平面 AMN 到平面 $EFBD$ 的距离就是点 B 到平面 AMN 的距离. 设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 AMN 的法向量, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 2x + 2y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = -2x + 4z = 0, \end{cases}$ 取 $z = 1$, 则 $x = 2, y = -2$, 得 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$ 是平面 AMN 的一个法向量. $\because \overrightarrow{AB} = (0, 4, 0), \therefore$ 平面 AMN 与平面 $EFBD$ 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{8}{3}$.



5. (1) 证明: 因为平面 $ABCD \perp$ 平面 $APBQ$, 平面 $APBQ \cap$ 平面 $ABCD = AB$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 即 $BC \perp AB$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 $APBQ$, 又因为 $AP \subset$ 平面 $APBQ$, 所以 $AP \perp BC$, 因为 $BG \perp$ 平面 $APC, AP \subset$ 平面 APC , 所以 $AP \perp BG$, 因为 $BC \cap BG = B, BC, BG \subset$ 平面 PBC , 所以 $AP \perp$ 平面 PBC , 因为 $AP \subset$ 平面 PAD , 所以平面 $PAD \perp$ 平面 PBC .
(2) 解: 当 $PA = PB$ 时, 四边形 $APBQ$ 是菱形. 设 AB 的中点为 O , 连接 OP , 则 $OP \perp OB$,

以 OP 所在直线为 x 轴, OB 所在直线为 y 轴, 过 O 且平行于 BC 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.

由 $AP \perp$ 平面 PBC , 得 $AP \perp PB$,

又 $AB = 2$, 则 $OP = 1$,

所以 $A(0, -1, 0), B(0, 1, 0), C(0, 1, 2), P(1, 0, 0)$.

所以 $\overrightarrow{AP} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 2, 2), \overrightarrow{BP} = (1, -1, 0)$.

设 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 APC 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

可取 $x = 1$, 则 $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 1)$.

因为四边形 $APBQ$ 为平行四边形,

$\triangle APB$ 为等腰直角三角形,

所以四边形 $APBQ$ 为正方形, 即 $PB \perp BQ$,

由(1)知 $BC \perp$ 平面 $APBQ$,

又 $PB \subset$ 平面 $APBQ$,

故 $BC \perp BP$,

因为 $BC \cap BQ = B, BC, BQ \subset$ 平面 BCQ ,

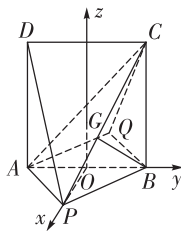
所以 $BP \perp$ 平面 BCQ ,

取平面 BCQ 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{BP} = (1, -1, 0)$,

$$\text{所以} \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以} \sin \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故平面 APC 与平面 BCQ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



6. (1) 证明: 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

$$PA = 2AD = 4, PC = 2\sqrt{6},$$

$$\text{所以} AC = \sqrt{24 - 16} = 2\sqrt{2},$$

$$AB = CD = \sqrt{8 - 4} = 2,$$

所以四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $BD \perp AC$,

又 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $BD \perp PA$,

又 $PA \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC ,

又 $BD \subset$ 平面 BDE ,

所以平面 $BDE \perp$ 平面 PAC .

(2) 解: 由题可知 AB, AD, AP 两两垂直,

建立空间直角坐标系, 如图所示.

则 $A(0, 0, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 4), C(2, 2, 0),$

$E(1, 1, 2),$

所以 $\vec{CP} = (-2, -2, 4), \vec{AE} = (1, 1, 2), \vec{AD} = (0, 2, 0).$

设平面 AED 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

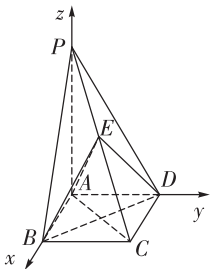
$$\text{则} \begin{cases} \vec{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \vec{AD} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ 2y = 0, \end{cases}$$

令 $x = -2$, 得 $\mathbf{n} = (-2, 0, 1),$

所以直线 PC 与平面 AED 所成的角的正弦值为

$$\frac{|\vec{CP} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{CP}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{8}{2\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$



小测试(九) 倾斜角与斜率

预习自评

1. A 2. B 3. A

基础过关

1. A 解析: $\because (2, 3) = 2 \cdot (1, \frac{3}{2})$, 又 $(1, k)$ 是直线的方向向量, $\therefore k = \frac{3}{2}$.

2. D 解析: $\frac{1-2}{-2-a} = 1$, 解得 $a = -1$.

3. AD 解析: 平面直角坐标系中的任意一条直线都有倾斜角, 故 A 正确; 若直线的倾斜角为 90° , 而 $\tan 90^\circ$ 不存在, 所以斜率不存在, 故 B 错误; 若一条直线的斜率为 $\tan \frac{5\pi}{4}$, 即斜率为 1, 则该直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 C 错误; 若一条直线的倾斜角为 $\alpha (\alpha \neq$

$90^\circ)$, 则该直线的斜率为 $\tan \alpha$, 故 D 正确. 故选 AD.

4. D 解析: 若 $\alpha < \beta < 90^\circ < \gamma$, 则 $\tan \gamma < 0 < \tan \alpha < \tan \beta$, 则 $k_3 < k_1 < k_2$; 若 $\alpha < \beta < \gamma < 90^\circ$, 则 $\tan \alpha < \tan \beta < \tan \gamma$, 则 $k_1 < k_2 < k_3$; 若 $\alpha < 90^\circ < \beta < \gamma$, 则 $\tan \beta < \tan \gamma < 0 < \tan \alpha$, 则 $k_2 < k_3 < k_1$; 若 $90^\circ < \alpha < \beta < \gamma$, 则 $\tan \alpha < \tan \beta < \tan \gamma$, 则 $k_1 < k_2 < k_3$.

5. C 解析: 由题知 l_1 的倾斜角为 45° , 所以 l_2 的倾斜角 α 满足 $30^\circ < \alpha < 45^\circ$ 或 $45^\circ < \alpha < 60^\circ$, 从而 $\alpha \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3})$. 故选 C.

6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 解析: 由直线 l_1 的斜率为 1 得其倾斜角为 45° , 所以直线 l_2 的倾斜角为 $45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, 则直线 l_2 的斜率为 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $-\frac{4}{3}$ 解析: 设直线 l 的倾斜角为 θ_1 , 直线 $y = 2x + 3$ 的倾斜角为 θ_2 , 则 $\tan \theta_2 = 2, \theta_2 \neq 45^\circ$. 由 $\theta_1 = 2\theta_2 \neq 90^\circ$, 可得直线 l 的斜率 $k = \tan \theta_1 = \tan 2\theta_2 = \frac{2\tan \theta_2}{1 - (\tan \theta_2)^2} = -\frac{4}{3}$, 即直线 l 的斜率为 $-\frac{4}{3}$.

8. 解: $k_{AB} = \frac{4-3}{3-2} = 1,$

$$k_{AC} = \frac{6-3}{6-2} = \frac{3}{4},$$

所以 $k_{AB} > k_{AC} > 0$.

则直线 AB 的倾斜角大于直线 AC 的倾斜角.

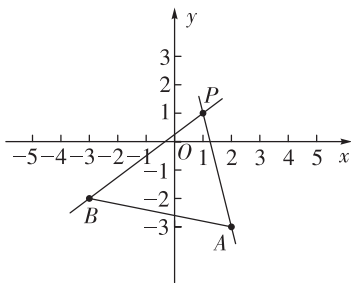
素养提升

1. A 解析: 设直线 l 的斜率为 k , 则 $k = \frac{m-\sqrt{3}}{2+1} = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, 故 $m = -2\sqrt{3}$. 故选 A.

2. B 解析: 根据题意, 知直线 AB 的斜率 $k = \frac{m+1}{3-2} = m+1$. 由 $m \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}-1, \sqrt{3}-1]$, 得 k 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$, 即 $\tan \alpha$ 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$. 又 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$, 所以 $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ 或 $150^\circ \leq \alpha < 180^\circ$. 故选 B.

3. A 解析: 直线 $l: kx - y - k + 1 = 0$ 整理为 $k(x-1) - (y-1) = 0$, 即可知直线 l 过定点 $P(1, 1)$. 作出直线和点对应的图象如图. $\therefore A(2, -3),$

$B(-3, -2), P(1, 1), \therefore k_{PA} = \frac{-3-1}{2-1} = -4, k_{PB} = \frac{-2-1}{-3-1} = \frac{3}{4}$. 要使直线 l 与线段 AB 相交, 则直线 l 的斜率 k 满足 $k_{PB} \leq k$ 或 $k \leq k_{PA}$, $\therefore k \leq -4$ 或 $k \geq \frac{3}{4}$, 即直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty, -4] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$. 故选 A.



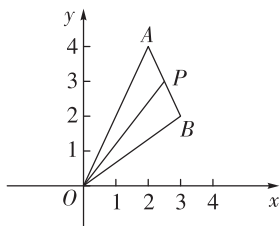
4. $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ 解析: 设 $M(x, y)$, $\frac{y-1}{x-2}$ 的几何意义是过 $M(x, y), N(2, 1)$ 两点的直线的斜率. 由题知点 M 在直线 $x+2y=6$ 上, 且 $x \in [1, 2) \cup (2, 3]$, 当 $x=1$ 时, $y=\frac{5}{2}$; 当 $x=3$ 时, $y=\frac{3}{2}$. 设 $A(1, \frac{5}{2}), B(3, \frac{3}{2})$, 又 $k_{NA} = -\frac{3}{2}, k_{NB} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{y-1}{x-2}$ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.

5. 解: 如图所示, 设点 $P(x, y)$ 满足关系式 $2x+y=8$, 且 $2 \leq x \leq 3$, 可知点 $P(x, y)$ 在线段 AB 上移动, 并且 A, B 两点的坐标分别为 $(2, 4), (3, 2)$.

由于 $\frac{y}{x}$ 表示的是直线 OP 的斜率,

易知 $k_{OA} = 2, k_{OB} = \frac{2}{3}$,

故 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 2, 最小值为 $\frac{2}{3}$.



6. 解: 如图, 由题意可知 $k_{PA} = \frac{4-0}{-3-1} = -1$,

$$k_{PB} = \frac{2-0}{3-1} = 1.$$

(1) 要使直线 l 与线段 AB 有公共点,

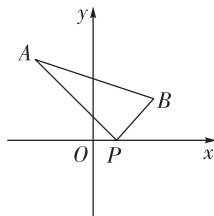
则直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(2) 由题意可知直线 l 的倾斜角介于直线 PB 与 PA 的倾斜角之间,

又直线 PB 的倾斜角是 45° ,

直线 PA 的倾斜角是 135° ,

所以 α 的取值范围是 $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$.



易错辨析

解: 由于直线经过 $A(2, 1), B(m, 4)$ 两点. 当 $m=2$ 时, 直线 l 与 x 轴垂直, 此时斜率不存在, 其倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$. 当 $m \neq 2$ 时, 直线 l 的斜率 $k = \frac{4-1}{m-2} = \frac{3}{m-2}$.

①若 $m > 2$, 则斜率 $k > 0$, 直线的倾斜角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2})$. ②若 $m < 2$, 则斜率 $k < 0$, 直线的倾斜角的取值范围是 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

小测试(十) 两条直线平行与垂直的判定

预习自评

1. ABC 2. ABD

基础过关

1. A 解析: 由题意可知直线 l_1 的斜率 $k_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 直线 l_2 的斜率 $k_2 = \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2-1} = \sqrt{3}$. 因为 $k_1 = k_2$, 所以 $l_1 \parallel l_2$ 或 l_1, l_2 重合.

2. C 解析: A 中, l_1 的倾斜角为 120° , l_2 过点 $P(1, 0), Q(4, \sqrt{3})$, $k_{l_1} = -\sqrt{3}, k_{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故两直线垂直. B

中, l_2 过点 $P(1, 1), Q(0, -\frac{1}{2})$, $k_{PQ} = \frac{3}{2}$. 因为 $(-\frac{2}{3}) \times \frac{3}{2} = -1$, 所以两直线垂直. C 中, $k_{l_1} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}, k_{PQ} = \sqrt{3}$, 故 l_1 不与 l_2 垂直. D 中, l_1 过点 $M(1,$

0), $N(4, -5)$, $k_{MN} = -\frac{5}{3}$, l_2 过点 $P(-6, 0)$, $Q(-1, 3)$, $k_{PQ} = \frac{3}{5}$. 因为 $(-\frac{5}{3}) \times \frac{3}{5} = -1$, 所以两直线垂直. 故选 C.

3. BC 解析: 当 $m=0$ 时, $A(0, 3)$, $B(0, 4)$, $C(1, 2)$, $D(1, 0)$, 则直线 $AB \perp x$ 轴, 直线 $CD \perp x$ 轴, 所以直线 AB 与 CD 平行. 当 $m \neq 0$ 时, $k_{AB} = \frac{m+1}{m}$, $k_{CD} = \frac{2}{m}$, 所以 $\frac{m+1}{m} = \frac{2}{m}$, 所以 $m=1$. 综上可知选 BC.

4. A 解析: 因为 $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(1, 4)$, 所以 $k_{AB} = \frac{-1-1}{2+1} = -\frac{2}{3}$, $k_{AC} = \frac{4-1}{1+1} = \frac{3}{2}$, 所以 $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1$, 所以 $AB \perp AC$, 所以 $\angle A$ 为直角, 故选 A.

5. AC 解析: 设 $B(x, y)$, 根据题意可得

$$\begin{cases} k_{AC} \cdot k_{BC} = -1, \\ |BC| = |AC|, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{3-4}{3-0} \cdot \frac{y-3}{x-3} = -1, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-3)^2}, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases}$ 所以点 B 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $(4, 6)$. 故选 AC.

6. 2 解析: $k_{AB} = \frac{3-1}{1-(-1)} = 1$, 又 $AB \perp BC$, 则 $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$, 所以 $k_{BC} = -1$, 即 $k_{BC} = \frac{3-2}{1-m} = -1$, 解得 $m=2$.

7. 直角三角形 解析: $k_{AB} = \frac{2+2\sqrt{2}-(2-2\sqrt{2})}{2-0} = 2\sqrt{2}$, $k_{AC} = \frac{2+2\sqrt{2}-2}{2-4} = -\sqrt{2}$, $k_{BC} = \frac{2-2\sqrt{2}-2}{0-4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$, 即 $AC \perp BC$, 故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

8. (1) 解: 当 $m=-2$ 时, 直线 $AB \perp x$ 轴, 而 CD 不与 x 轴垂直, 不符合题意.

$\therefore$ 直线 AB 斜率存在.

同理, 当 $m=-1$ 时也不符合题意,

$\therefore$ 直线 CD 斜率存在.

$$\therefore k_{AB} = \frac{4-m}{m+2}, k_{CD} = \frac{2}{m+1},$$

$$\therefore k_{AB} = k_{CD} \Rightarrow \frac{4-m}{m+2} = \frac{2}{m+1} \Rightarrow m^2 - m = 0,$$

解得 $m=0$ 或 $m=1$.

$$\text{又 } k_{BC} = \frac{1-m}{3},$$

且点 A, B, C, D 不共线,

所以 $k_{BC} \neq k_{CD}$,

$$\text{即 } \frac{1-m}{3} \neq \frac{2}{m+1}, m^2 \neq -5 \text{ 显然成立,}$$

故 $m=0$ 或 $m=1$.

(2) 证明: 若 $m=1$, 则 $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(1, 1)$, $AC \perp x$ 轴, $BC \perp y$ 轴,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$;

$$\text{若 } m \neq 1, \text{ 则 } k_{AC} = \frac{3}{m-1}, k_{BC} = -\frac{m-1}{3},$$

$$\text{所以 } k_{AC} \cdot k_{BC} = -1 \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ.$$

综上所述, 无论 m 取何值, 总有 $\angle ACB = 90^\circ$.

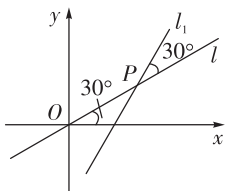
素养提升

1. A 解析: 由方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$, 所以 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$, 知 $k_1 \neq k_2$, 所以 B、C 错误; 根据根与系数的关系得 $k_1 \cdot k_2 = -1$, 则 $l_1 \perp l_2$, 所以 A 正确, D 错误. 故选 A.

2. A 解析: 设点 $D(m, n)$, 直线 AB, DC, AD, BC 的斜率分别为 $k_{AB}, k_{DC}, k_{AD}, k_{BC}$, 由题意, 得 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, 则有 $k_{AB} = k_{DC}$, $k_{AD} = k_{BC}$, 所以 $\begin{cases} \frac{0-1}{1-0} = \frac{3-n}{4-m}, \\ \frac{n-1}{m-0} = \frac{3-0}{4-1}, \end{cases}$ 解得 $m=3, n=4$. 所以顶点 D 的坐标为 $(3, 4)$, 故选 A.

3. A 解析: 由题意可得直线 l_1 的斜率 $k_1 = \frac{4-m}{m-(-2)} = k_2 = -2$, 解得 $m=-8$. 又 $l_2 \perp l_3$, 所以 $k_2 \cdot k_3 = -1$, 即 $(-2) \cdot (-\frac{1}{n}) = -1$, 解得 $n=-2$, 从而 $m+n=-10$. 故选 A.

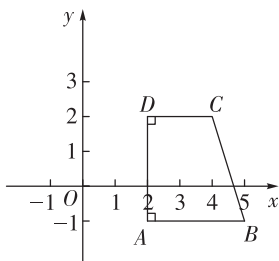
4. $4+\sqrt{3}$ 解析: 如图所示, 可知直线 l_1 的倾斜角为 $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, 所以直线 l_1 的斜率 $k_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. 当 $m=1$ 时, 直线 AB 的斜率不存在, 此时直线 l_2 的斜率为 0, 不满足 l_1 与 l_2 平行; 当 $m \neq 1$ 时, 直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{m-1-2}{1-m} = \frac{m-3}{1-m}$, 所以线段 AB 的垂直平分线 l_2 的斜率 $k_2 = \frac{m-1}{m-3}$. 由于 l_1 与 l_2 平行, 所以 $k_1 = k_2$, 即 $\sqrt{3} = \frac{m-1}{m-3}$, 得 $m=4+\sqrt{3}$.



5. 解: (1) 根据题意得 $\overrightarrow{AB} = (6, 3)$,
 则 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} = (6t, 3t)$,
 又 $\overrightarrow{AC} = (3, -3)$,
 $\therefore \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = (6t - 3, 3t + 3)$,
 $\because \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$,
 $\therefore \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 45t - 9 = 0$,
 $\therefore t = \frac{1}{5}$.

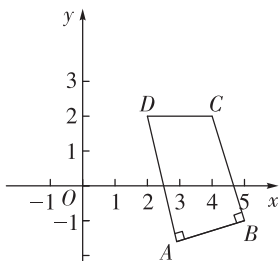
(2) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 点 M 在线段 AB 上,
 $\because$ 直线 AC 的斜率为 -1 , 直线 CB 的斜率为 2 ,
 $\therefore$ 直线 CM 的斜率 k 满足 $k \leq -1$ 或 $k \geq 2$.
 所以 k 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

6. 解: ① 如图, 当 $\angle A = \angle D = 90^\circ$ 时,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为直角梯形,
 $\therefore AB \parallel DC$, 且 $AD \perp AB$.
 $\because k_{DC} = 0$, AD 的斜率不存在,
 $\therefore m = 2, n = -1$.

② 如图, 当 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ 时,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为直角梯形,
 $\therefore AD \parallel BC$, 且 $AB \perp BC$,
 $\therefore k_{AD} = k_{BC}, k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$.

$$\therefore \begin{cases} \frac{n-2}{m-2} = \frac{2-(-1)}{4-5}, \\ \frac{n+1}{m-5} \cdot \frac{2-(-1)}{4-5} = -1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } m = \frac{16}{5}, n = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{综上所述, } m = 2, n = -1 \text{ 或 } m = \frac{16}{5}, n = -\frac{8}{5}.$$

易错辨析

D 解析: 若 $a \neq 0$, 则 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{a}$; 若 $a = 0$, 则 l_2 的斜率不存在. 故选 D.

小测试(十一) 直线的点斜式方程

预习自评

1. D 2. C 3. D

基础过关

1. A 解析: 显然直线 l 的方程为 $y = -2x + 1$, 即 $2x + y - 1 = 0$.

2. B 解析: 直线 l 的方程为 $y + 1 = \frac{5+1}{2+1}(x+1)$, 即 $y = 2x + 1$. 当 $x = 1\ 010$ 时, $y = 2 \times 1\ 010 + 1 = 2\ 021$. 故选 B.

3. BCD 解析: 由于 $\frac{y-y_1}{x-x_1} = k$ 的定义域为 $x \neq x_1$, 故不过点 $M(x_1, y_1)$, 故 A 正确; 当 $a = b = 0$ 时, 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 0 的直线不可用 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 表示, 故 B 不正确; 直线 $y = kx + b$ 与 y 轴的交点为 $(0, b)$, 到原点的距离为 $|b|$, 故 C 不正确; 平面内斜率不存在的直线不可用斜截式表示, 故 D 不正确. 故选 BCD.

4. B 解析: A 中, 斜向下的直线在 y 轴上的截距为负数, 则另一条直线的斜率为负数, 单调递减, 故 A 错误; B 中, 斜向下的直线在 y 轴上的截距为正数, 则另一条直线的斜率为正数且在 y 轴上的截距为负数, 符合题意; C 中, 斜向下的直线在 y 轴上的截距为正数, 则另一条直线的斜率为正数但在 y 轴上的截距为负数, 不符合题意, 故 C 错误; D 中, 两条直线的斜率都为正数, 说明两条直线在 y 轴上的截距应该都为正数, 故 D 错误. 故选 B.

5. ABC 解析: 当直线经过原点时, 斜率为 $k = \frac{2-0}{1-0} = 2$, 故所求的直线方程为 $y = 2x$, 即 $2x - y = 0$; 当直线不过原点时, 设所求的直线方程为 $x \pm y = k$, 把点 $A(1, 2)$ 代入可得 $1 - 2 = k$ 或 $1 + 2 = k$, 解得 $k = -1$ 或 $k = 3$, 故所求的直线方程为 $x - y + 1 = 0$ 或 $x + y - 3 = 0$. 综上知应选 ABC.

6. $y = \pm \frac{4}{3}x - 6$ 解析: 设直线的倾斜角为 α , 则 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 当 α 为锐角时, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $k = \tan \alpha = \frac{4}{3}$; 当 α 为钝角时, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $k = \tan \alpha = -\frac{4}{3}$. 又直线在 y 轴上的截距是 -6 , 故所求直线的斜截式方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x - 6$.

7. $y - 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$ 解析: 因为直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{d} = (3, 4)$, 所以直线 l 的斜率为 $\frac{4}{3}$, 所以直线 l 的方程为 $y - 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$.

8. 解: 直线 $l: 2x - y + 4 = 0$ 的斜率为 2.

(1) 若 $l_1 \perp l$, 则直线 l_1 的斜率 $k_1 = -\frac{1}{2}$,

又直线 l_1 过点 $M(-1, 1)$,

所以直线 l_1 的方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1)$,

即 $x + 2y - 1 = 0$.

(2) 若 $l_2 \parallel l$, 则直线 l_2 的斜率 $k_2 = 2$,

又直线 l_2 过点 $M(-1, 1)$,

所以直线 l_2 的方程为 $y - 1 = 2(x + 1)$,

即 $2x - y + 3 = 0$.

素养提升

1. A 解析: $\because$ 直线 $y = \sqrt{3}(x - 2)$ 的倾斜角是 60° , $\therefore$ 按逆时针方向旋转 60° 后, 所得直线的倾斜角为 120° , $\therefore$ 所求直线的斜率为 $-\sqrt{3}$, 又过点 $(2, 0)$, $\therefore$ 所求直线方程为 $y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2)$, 即 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$. 故选 A.

2. C 解析: 由中点坐标公式, 得线段 MN 的中点是 $(\frac{1+m}{2}, 0)$, 又点 $(\frac{1+m}{2}, 0)$ 在线段 MN 的垂直平分线 $\frac{x}{2} + y = 1$ 上, 所以 $\frac{1+m}{4} + 0 = 1$, 解得 $m = 3$. 故选 C.

3. D 解析: $\because$ 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ 直线的倾斜角为 30° . $\therefore$ 所求直线的倾斜角为 60° , 其斜率为 $\sqrt{3}$. $\therefore$ 所求直线方程为 $y + 3 = \sqrt{3}(x - 2)$, 即 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 3$. 故选 D.

4. (1, 1) 解析: 由 $(m + 2)x - y - (m + 1) = 0$ 得

$(x - 1)m + (2x - y - 1) = 0$, 令 $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ 此时直线过定点 $(1, 1)$.

5. 解: (1) 由题意得边 BC 的中点 D 的坐标为 $(3, -1)$,

所以直线 AD 的斜率 $k_{AD} = \frac{0 - (-1)}{-1 - 3} = -\frac{1}{4}$,

所以 BC 边上的中线 AD 所在直线的方程为

$y - 0 = -\frac{1}{4}(x + 1)$,

即 $x + 4y + 1 = 0$.

(2) 由题意得直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{0 - (-4)}{-1 - 5} = -\frac{2}{3}$,

所以 AB 边上的高线所在直线的方程为 $y - 2 =$

$\frac{3}{2}(x - 1)$,

即 $3x - 2y + 1 = 0$.

6. (1) 证明: 直线 l 的方程可化为 $y - \frac{3}{5} = a(x - \frac{1}{5})$, 由点斜式方程可知直线 l 的斜率为 a , 且过定点 $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$.

设定点为 A , 因为点 $A(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ 在第一象限,

所以无论 a 为何值, 直线 l 一定过第一象限.

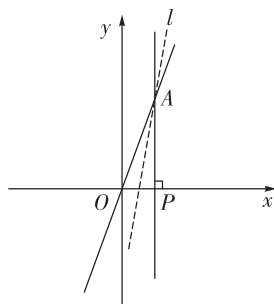
(2) 解: 如图, 由题意得直线 l 的倾斜角介于直线 AO 与 AP 的倾斜角之间,

$k_{AO} = \frac{\frac{3}{5} - 0}{\frac{1}{5} - 0} = 3$,

直线 AP 的斜率不存在,

所以 $a \geq 3$.

故 a 的取值范围为 $[3, +\infty)$.



易错辨析

—1 解析:设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 和 k_2 , 由题意知 $k_1 = -1, k_2 = a^2 - 2$. 由 $l_1 \parallel l_2$, 得 $\begin{cases} a^2 - 2 = -1, \\ 2a \neq 2, \end{cases}$ 解得 $a = -1$.

小测试(十二) 直线的两点式方程

预习自评

1. B 2. C 3. A

基础过关

1. C 解析:当横截距 $a = 0$ 时,纵截距 $b = a = 0$,此时直线过点 $(3, 2)$ 和原点 $(0, 0)$, 直线方程为 $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, 整理,得 $2x - 3y = 0$; 当横截距 $a \neq 0$ 时,纵截距 $b = a$, 此时直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 把 $(3, 2)$ 代入得 $a = 5$, 即直线方程为 $x + y - 5 = 0$. $\therefore$ 过点 $(3, 2)$ 且在两坐标轴上的截距相等的直线方程是 $x + y - 5 = 0$ 或 $2x - 3y = 0$.

2. A 解析:依题意有 $\frac{2}{b} = -\frac{1}{2}$, 所以 $b = -4$, 所以直线方程为 $2x + 4y + 4 = 0$, 即 $-\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$, 所以直线与两坐标轴围成的三角形的面积等于 $\frac{1}{2} \times |-1| \times |-2| = 1$.

3. D 解析:因为直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 过第二、三、四象限, 所以直线在两坐标轴上的截距都小于 0, 所以 $a < 0, b < 0$. 故选 D.

4. D 解析:设点 $A(1, 2)$ 关于直线 $y = x$ 对称的点 $M(x_0, y_0)$, 则 M 在直线 BC 上. 由题意得 $\begin{cases} \frac{y_0 - 2}{x_0 - 1} = -1, \\ \frac{x_0 + 1}{2} = \frac{y_0 + 2}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 1, \end{cases}$ 即 $M(2, 1)$, 又 $C(5, 2)$, 故由两点式可得直线 BC 的方程为 $\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x - 5}{2 - 5}$, 即 $x - 3y + 1 = 0$. 故选 D.

5. C 解析:当直线在两坐标轴上的截距为 0 时,可设 $y = kx$, 因为直线过点 $P(2, 1)$, 所以 $1 = 2k$, 即 $k = \frac{1}{2}$, 此时直线方程为 $y = \frac{1}{2}x$. 当直线在两坐标轴上的截距不为 0 时,则可设 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 由题意可得

$|a| = |b|$ 且 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 解得 $a = b = 3$ 或 $a = 1, b = -1$. 综上所述,满足条件的直线有 3 条.

6. $(6, -6)$ 解析:设顶点 C 的坐标为 (a, b) , $\therefore G(2, 0)$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\therefore$

$$\begin{cases} \frac{-6 + 6 + a}{3} = 2, \\ \frac{2 + 4 + b}{3} = 0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = 6, \\ b = -6, \end{cases} \quad \therefore \text{顶点 } C \text{ 的坐标为 } (6, -6).$$

7. $x + 2y - 2 = 0$ 或 $2x + 3y - 6 = 0$ 解析:设直线 l 在 y 轴上的截距为 a . 当 $a = 0$ 或 $a = -1$ 时,不合题意, $\therefore a \neq 0$ 且 $a \neq -1$, 故由截距式得 $\frac{x}{a+1} + \frac{y}{a} = 1$,

代入 $A(6, -2)$ 得 $\frac{6}{a+1} - \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$, 解

得 $a = 1$ 或 $a = 2$, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $\frac{x}{2} + y = 1$ 或

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, 即 $x + 2y - 2 = 0$ 或 $2x + 3y - 6 = 0$.

8. 解:(1)由 $A(4, 0), C(0, 3)$, 可得 AC 边所在的直线方程是 $\frac{y - 0}{3 - 0} = \frac{x - 4}{0 - 4}$,

即 $3x + 4y - 12 = 0$.

(2)因为 AC 边上的高垂直于 AC ,

$$k_{AC} = \frac{3 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{4},$$

所以 AC 边上的高所在的直线斜率为 $\frac{4}{3}$,

又 AC 边上的高过点 $B(6, 7)$,

所以所求直线方程为 $y - 7 = \frac{4}{3}(x - 6)$,

故 AC 边上的高所在的直线方程是 $4x - 3y - 3 = 0$.

素养提升

1. A 解析:根据题意,设点 A' 的坐标为 (x, y) , 点 $A(-2, -3)$ 与 A' 关于点 $B(1, 0)$ 对称, 则点 B 为线

$$\text{段 } AA' \text{ 的中点, 则有 } \begin{cases} \frac{x - 2}{2} = 1, \\ \frac{y - 3}{2} = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases}$$

即 A' 的坐标为 $(4, 3)$. 故选 A.

2. A 解析:设 $\triangle ABC$ 的重心为 $G(m, n)$, 则 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 即 $(1 - m, 3 - n) + (2 - m, 4 - n) + (3 - m, 2 - n) = (0, 0)$, 解得 $m = 2, n = 3$, 所以重心为 $G(2, 3)$. AB 边上的高所在的直线方程为 $y = -x + 5$, AC 边上的高所在的直线方程为 $y = 2x$, 则

$\triangle ABC$ 的垂心坐标为 $(\frac{5}{3}, \frac{10}{3})$, 故由两点式, 得

$\triangle ABC$ 的欧拉线方程为 $x+y-5=0$. 故选 A.

3. B 解析: 两直线的方程分别化为 $y=\frac{n}{m}x-n, y=$

$\frac{m}{n}x-m$, 易知两直线的斜率符号相同, 只有 B 中的图象符合题意. 故选 B.

4. $x+4y-8=0$ 解析: 由题意可知直线 l 的斜率存在

且不为 0, 可设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-4)$,

即 $y=kx+1-4k$. 在直线 l 的方程中, 令 $x=0$, 可

得 $y=1-4k$; 令 $y=0$, 可得 $x=\frac{4k-1}{k}$. 所以点

$A(\frac{4k-1}{k}, 0), B(0, 1-4k)$, 由题意可得

$$\begin{cases} \frac{4k-1}{k} > 0, \\ 1-4k > 0, \end{cases} \text{ 解得 } k < 0, \text{ 所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times \frac{4k-1}{k} \times$$

$$(1-4k) = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{1}{k} - 16k \right) \geq \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times$$

$$2\sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right) \cdot (-16k)} = 8, \text{ 当且仅当 } -\frac{1}{k} = -16k$$

$(k < 0)$, 即 $k = -\frac{1}{4}$ 时, 等号成立, 所以直线 l 的方

程为 $y-1 = -\frac{1}{4}(x-4)$, 即 $x+4y-8=0$.

5. 解: 因为直线 l 垂直于直线 $3x-4y-7=0$,

所以设直线 l 为 $4x+3y+C=0$,

所以直线 l 与两坐标轴的交点分别为 $(-\frac{C}{4},$

$0), (0, -\frac{C}{3})$,

所以直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积 $S =$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{C}{3} \right| \cdot \left| -\frac{C}{4} \right| = \frac{C^2}{24} = 6,$$

所以 $C = \pm 12$.

当 $C=12$ 时, 直线 l 在 x 轴上的截距为 $-\frac{C}{4} = -3$;

当 $C=-12$ 时, 直线 l 在 x 轴上的截距为 $-\frac{C}{4} = 3$.

综上所述, 直线 l 在 x 轴上的截距为 3 或 -3.

6. 解: (1) $\because B(-3, 4), C(1, 2)$,

$\therefore$ 线段 BC 的中点 D 的坐标为 $(-1, 3)$,

又 BC 边上的中线经过点 $A(4, 0)$,

$$\therefore y = \frac{0-3}{4-(-1)}(x-4),$$

即 $3x+5y-12=0$,

故 BC 边上的中线的方程为 $3x+5y-12=0 (-1 \leq x \leq 4)$.

(2) 当直线在 x 轴和 y 轴上的截距均为 0 时,

可设直线的方程为 $y=kx$,

代入点 $B(-3, 4)$,

则 $4 = -3k$,

$$\text{解得 } k = -\frac{4}{3},$$

所以所求直线的方程为 $y = -\frac{4}{3}x$,

即 $4x+3y=0$;

当直线在 x 轴和 y 轴上的截距均不为 0 时,

可设直线的方程为 $\frac{x}{2m} + \frac{y}{m} = 1$,

代入点 $B(-3, 4)$,

$$\text{则 } \frac{-3}{2m} + \frac{4}{m} = 1,$$

$$\text{解得 } m = \frac{5}{2},$$

所以所求直线的方程为 $\frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = 1$,

即 $x+2y-5=0$.

综上所述, 该直线的方程为 $4x+3y=0$ 或 $x+2y-5=0$.

易错辨析

$2x-y=0$ 或 $x-y+1=0$ 或 $x+y-3=0$ 解析: 设

直线 l 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 a, b . 当 $a \neq 0$,

$b \neq 0$ 时, 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. 因为点 $(1,$

$2)$ 在直线 l 上, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. 若 $a=b$, 则 $a=b=$

3 , 所以直线 l 的方程为 $x+y-3=0$; 若 $a=-b$, 则

$a=-1, b=1$, 所以直线 l 的方程为 $x-y+1=0$; 当

$a=b=0$ 时, 直线 l 过坐标原点, 又过点 $(1, 2)$, 所以

直线 l 的方程为 $y=2x$, 即 $2x-y=0$. 综上所述, 所

求直线 l 的方程为 $2x-y=0$ 或 $x-y+1=0$ 或 $x+$

$y-3=0$.

小测试(十三) 直线的一般式方程

预习自评

1. A 2. D 3. A

基础过关

1. D 解析: 由直线 $mx+2y-2=0$ 与直线 $x+$

$$(m-1)y+2=0 \text{ 平行, 得 } \begin{cases} m(m-1)-1 \times 2=0, \\ 2m-1 \times (-2) \neq 0, \end{cases} \text{ 解}$$

得 $m=2$.

2. D 解析:若直线 l 的方向向量是 $(1, \sin \theta)$, 则直线 l 的斜率 $k = \sin \theta$, 所以 $-1 \leq k \leq 1$, 故 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq \alpha < \pi$.

3. C 解析: $\because$ 线段 AB 的中点 $C(\frac{1+m}{2}, 0)$ 在直线 $x+2y-2=0$ 上, $\therefore \frac{1+m}{2}-2=0$, $\therefore m=3$.

4. B 解析:根据图象易得 $k_1 < 0, k_2 > k_3 > 0$, $\therefore k_1 < k_3 < k_2$.

5. D 解析:因为 $l_1 \perp l_2$, 所以 $\sin \alpha - 3\cos \alpha = 0$, 所以 $\tan \alpha = 3$, 所以 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{5}$.

6. -2 解析:因为直线 $l_1: mx+4y-2=0$ 与直线 $l_2: 2x-5y+n=0$ 垂直, 所以 $2m-20=0$, 解得 $m=10$. 所以直线 l_1 的方程为 $5x+2y-1=0$, 将点 $(1, p)$ 的坐标代入直线 l_1 的方程可得 $4+2p=0$, 解得 $p=-2$.

7. $x+y-4=0$ 解析: $\because$ 直线 PQ 的斜率 $k_1 = \frac{5-1}{3+1} = 1$, 点 $P(-1, 1)$ 与点 $Q(3, 5)$ 关于直线 l 对称, $\therefore$ 直线 l 的斜率 $k_2 = -1$. 又线段 PQ 的中点 $(1, 3)$ 在直线 l 上, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $x+y-4=0$.

8. 解: (1) 由直线 l 在 x 轴上的截距为 -3 , 得直线过点 $(-3, 0)$,

代入方程得 $(m^2 - 2m - 3) \times (-3) - (2m^2 + m - 1) \times 0 + 6 - 2m = 0$,

即 $3m^2 - 4m - 15 = 0$,

解得 $m=3$ 或 $m=-\frac{5}{3}$,

经检验可知 $m=3$ 时, 直线方程为 $y=0$, 不合题意, 舍去,

所以 $m=-\frac{5}{3}$.

(2) 由直线 l 的斜率为 1, 知直线方程中 x, y 的系数互为相反数, 且不为 0,

所以 $(m^2 - 2m - 3) - (2m^2 + m - 1) = 0$,

解得 $m=-2$ 或 $m=-1$.

当 $m=-1$ 时, $2m^2 + m - 1 = 0$, 不合题意, 舍去,

所以 $m=-2$.

素养提升

1. B 解析:两直线垂直 $\Leftrightarrow (m+4)(m-4) + 3m(m+4) = 0 \Leftrightarrow (m+4)(m-1) = 0 \Leftrightarrow m=1$ 或 $m=-4$. 所以“ $m=1$ ”是“直线 $(m+4)x + 3my + 1 = 0$ 与 $(m-4)x + (m+4)y - 5 = 0$ 垂直”的充分不必要条件. 故选 B.

2. A 解析:原方程化为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 所以 $\frac{1}{b} = -1$,

所以 $b=-1$, 所以 $ax+by-1=0$ 的斜率为 $-\frac{a}{b} = a$.

又 $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ 的倾斜角为 60° , 所以 $a = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, 故选 A.

3. B 解析:将 $A(2, 1)$ 代入两条直线 $a_1x + b_1y + 1 = 0$ 和 $a_2x + b_2y + 1 = 0$, 得 $2a_1 + b_1 + 1 = 0$ ①, $2a_2 + b_2 + 1 = 0$ ②, ①-②, 得 $2(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$. 因为过点 $P(a_1, b_1), Q(a_2, b_2)$ 的直线方程为 $\frac{y-b_1}{b_2-b_1} = \frac{x-a_1}{a_2-a_1}$, 所以 $y - b_1 = -2(x - a_1)$, 则 $2x + y - (2a_1 + b_1) = 0$. 由 $2a_1 + b_1 + 1 = 0$, 得 $2a_1 + b_1 = -1$, 所以所求直线的方程为 $2x + y + 1 = 0$. 故选 B.

4. -1 $-\sqrt{3}$ 解析:点 $A(-4, \sqrt{3})$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-4, -\sqrt{3})$, 则直线 $A'B$ 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$, 直线 $A'B$ 与 x 轴交于点 $(-1, 0)$, 所以光线 l 与 x 轴交点的横坐标为 -1 . 由入射角是 60° , 得折射角是 30° , 且光线经过点 $(-1, 0)$, 故折射光线所在直线的方程为 $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$, 所以纵截距为 $-\sqrt{3}$.

5. 解: (1) 因为 l_1 与 l 平行,

故设直线 $l_1: x - 4y + C = 0 (C \neq 1)$,

因为点 $P(1, 3)$ 在直线 l_1 上,

所以 $1 - 4 \times 3 + C = 0$,

解得 $C=11$.

从而直线 l_1 的方程为 $x - 4y + 11 = 0$.

(2) 因为直线 l_2 与直线 l 垂直,

故设直线 $l_2: 4x + y + m = 0$,

又点 $P(1, 3)$ 在直线 l_2 上,

所以 $4 \times 1 + 3 + m = 0$,

解得 $m=-7$,

所以直线 l_2 的方程为 $4x + y - 7 = 0$.

6. (1) 证明: 直线方程为 $(2-m)x + (2m+1)y + 3m + 4 = 0$,

可化为 $(2x+y+4) + m(-x+2y+3) = 0$,

$$\text{由} \begin{cases} -x+2y+3=0, \\ 2x+y+4=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \end{cases}$$

所以直线过定点 $(-1, -2)$.

(2) 解: 由题意设直线方程为 $y+2=k(x+1), k < 0$,

则 $A\left(\frac{2}{k}-1, 0\right), B(0, k-2)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2} \left| \frac{2}{k} - 1 \right| |k-2| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{k} \right) (2-k) \\ &= 2 + \left(\frac{2}{-k} + \frac{-k}{2} \right) \\ &\geq 2 + 2 = 4, \end{aligned}$$

当且仅当 $k = -2$ 时取等号, $S_{\triangle AOB}$ 取得最小值 4,

此时直线的方程为 $2x+y+4=0$.

小测试(十四) 两条直线的交点坐标

预习自评

1. C 2. B 3. C

基础过关

1. B 解析: $\because$ 直线 $2x+y+5=0$ 与直线 $kx+2y=0$

互相垂直, $\therefore 2k+1 \times 2=0$, 解得 $k=-1$, 由

$$\begin{cases} 2x+y+5=0, \\ -x+2y=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=-2, \\ y=-1, \end{cases} \text{可得两直线的交点坐}$$

标为 $(-2, -1)$.

2. C 解析: 由 $\begin{cases} x-2=0, \\ x-y+3=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=5, \end{cases}$ 故直线恒过

定点 $(2, 5)$.

3. D 解析: 联立 $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x-y+6=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$ 设与

直线 $2x+y-3=0$ 垂直的直线方程为 $x-2y+m=0$, 把交点坐标 $(-1, 4)$ 代入所设直线方程, 得 $m=9$. 故所求直线方程为 $x-2y+9=0$. 故选 D.

4. BD 解析: 方程组 $\begin{cases} 2x-y-3=0, \\ y=2x+3, \end{cases}$ 无解, 两直线平

行, A 错误; 解方程组 $\begin{cases} 2x-y-3=0, \\ y=-2x+3, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ y=0, \end{cases}$ 有

唯一解, 两直线相交, B 正确; 方程组

$$\begin{cases} 2x-y-3=0, \\ 4x-2y-6=0 \end{cases} \text{有无数解, 两直线重合, C 错误; 解}$$

$$\text{方程组} \begin{cases} 2x-y-3=0, \\ 4x+2y-3=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=\frac{9}{8}, \\ y=-\frac{3}{4} \end{cases} \text{有唯一解,}$$

两直线相交, D 正确.

5. ABD 解析: 对于 A, 因为 $a \times 1 + (-1) \times a = 0$ 恒

成立, 所以 l_1 与 l_2 互相垂直恒成立, 故 A 正确; 对

于 B, 直线 $l_1: ax-y+1=0$, 当 a 变化时, $x=0, y=$

1 恒成立, 所以 l_1 恒过定点 $A(0, 1)$; 直线 $l_2: x+$

$ay+1=0$, 当 a 变化时, $x=-1, y=0$ 恒成立, 所以

l_2 恒过定点 $B(-1, 0)$, 故 B 正确; 对于 C, 在 l_1 上

任取一点 $(x, ax+1)$, 其关于直线 $x+y=0$ 对称的

点的坐标为 $(-ax-1, -x)$, 代入 $l_2: x+ay+1=0$,

则左边不恒等于 0, 故 C 不正确; 联立

$$\begin{cases} ax-y+1=0, \\ x+ay+1=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=\frac{-a-1}{a^2+1}, \\ y=\frac{-a+1}{a^2+1}, \end{cases} \text{即}$$

$$M\left(\frac{-a-1}{a^2+1}, \frac{-a+1}{a^2+1}\right), \text{所以 } |MO| =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-a-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-a+1}{a^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{a^2+1}} \leq \sqrt{2}, \text{所以}$$

$|MO|$ 的最大值是 $\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. $-2 \frac{1}{2}$ 解析: 将点 $(0, 2)$ 代入直线 $x+by=1$,

$$x-y=a, \text{解得 } b=\frac{1}{2}, a=-2.$$

7. $\left\{-\frac{1}{6}, 4\right\}$ 解析: 当 l_1 与 l_2 平行或重合时, $m=4$;

当 l_1 与 l_3 平行或重合时, $4 \times (-3m) = 2$, 解得

$$m = -\frac{1}{6}, \text{当 } l_2 \text{ 与 } l_3 \text{ 平行或重合时, } m \times (-3m) =$$

2, 此时无解; 当三条直线交于一点时, 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3my=4, \\ mx+y=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=\frac{4}{2+3m^2}, \\ y=-\frac{4m}{2+3m^2}, \end{cases} \text{将} \left(\frac{4}{2+3m^2}, \right.$$

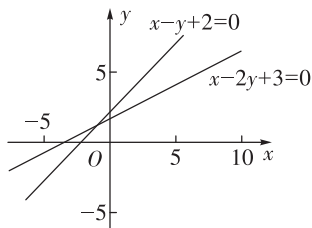
$$\left. -\frac{4m}{2+3m^2}\right) \text{代入 } 4x+y=0 \text{ 得 } 4 \times \frac{4}{2+3m^2} -$$

$$\frac{4m}{2+3m^2} = 0, \text{解得 } m=4, \text{故 } m \text{ 的取值所构成的集合}$$

$$\text{为} \left\{-\frac{1}{6}, 4\right\}.$$

8. 解: (1) 解方程组 $\begin{cases} x-y+2=0, \\ x-2y+3=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1, \end{cases}$

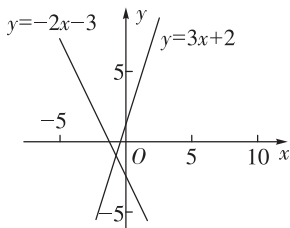
所以交点坐标为 $(-1, 1)$.



- (2) 解方程组 $\begin{cases} y=3x+2, \\ y=-2x-3, \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1, \end{cases}$

所以交点坐标为 $(-1, -1)$.



素养提升

1. B 解析: 已知直线 l_1 的斜率为 $-\frac{a}{4}$, 直线 l_2 的斜率为 $\frac{2}{5}$. 由两直线垂直, 可知 $-\frac{a}{4} \times \frac{2}{5} = -1$, 得

$a=10$. 将交点 $(1, c)$ 的坐标代入直线 l_1 的方程, 得 $c=-2$. 将交点 $(1, -2)$ 的坐标代入直线 l_2 的方程, 得 $b=-12$. 所以 $a+b+c=10-12-2=-4$. 故选 B.

2. C 解析: 联立 $\begin{cases} kx-y+2k+1=0, \\ x+2y-4=0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=\frac{2-4k}{2k+1}, \\ y=\frac{6k+1}{2k+1}. \end{cases}$$

由直线 $kx-y+2k+1=0$ 与 $x+2y-4=0$ 的交点在第四象限可得

$$\begin{cases} x=\frac{2-4k}{2k+1} > 0, \\ y=\frac{6k+1}{2k+1} < 0, \end{cases}$$

解得 $-\frac{1}{2} < k < -\frac{1}{6}$, 即实数 k 的

取值范围为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$. 故选 C.

3. D 解析: 由 $2a+b=1$, 得 $b=1-2a$, 代入直线方程 $ax+3y+b=0$ 中, 得 $ax+3y+1-2a=0$, 即

$$a(x-2)+3y+1=0. \text{ 令 } \begin{cases} x-2=0, \\ 3y+1=0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-\frac{1}{3}, \end{cases}$$

故直线 $ax+3y+b=0$ 必过定点 $(2, -\frac{1}{3})$. 故选 D.

4. $3x+y+1=0$ 解析: 设直线 l 与 l_1 的交点为 $A(x_0, y_0)$, 直线 l 与 l_2 的交点为 B . 由已知条件, 得直线 l 与 l_2 的交点为 $B(-2-x_0, 4-y_0)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} 4x_0+y_0+3=0, \\ 3(-2-x_0)-5(4-y_0)-5=0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 4x_0+y_0+3=0, \\ 3x_0-5y_0+31=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0=-2, \\ y_0=5, \end{cases} \text{ 即 } A(-2, 5).$$

所以直线 l 的方程为 $\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-(-1)}{-2-(-1)}$, 即 $3x+y+1=0$.

5. 解: (1) 由于 l_1 与 l_2 相交于一点 $P(m, 1)$,

故把点 $P(m, 1)$ 代入 l_1, l_2 的方程

$$\text{得 } \begin{cases} m^2+8+n=0, \\ 2m+m-1=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=\frac{1}{3}, \\ n=-\frac{73}{9}. \end{cases}$$

(2) 当 $m=0$ 时, $l_1: 8y+n=0, l_2: 2x-1=0$, 不满足 $l_1 \parallel l_2$.

当 $m \neq 0$ 时,

$\because l_1 \parallel l_2$ 且 l_1 过点 $(3, -1)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{8} = -\frac{2}{m}, \\ 3m-8+n=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=4, \\ n=-4, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=-4, \\ n=20. \end{cases}$$

(3) 由 $l_1 \perp l_2$ 且 l_1 在 y 轴上的截距为 -1 ,

$$\text{得 } \begin{cases} 2m+8m=0, \\ -\frac{n}{8} = -1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=0, \\ n=8. \end{cases}$$

6. 解: (1) 因为边 AC 上的高 BE 所在的直线方程为 $x+y-6=0$,

故边 AC 所在的直线的斜率为 1 ,

所以边 AC 所在的直线方程为 $y-1=x+1$,

即 $x-y+2=0$,

因为 CM 所在的直线方程为 $4x-5y+6=0$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} x-y+2=0, \\ 4x-5y+6=0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=-4, \\ y=-2, \end{cases}$$

所以点 C 的坐标为 $(-4, -2)$.

(2) 设 $B(x_0, y_0)$,

因为 M 为 AB 的中点,

则 M 的坐标为 $(\frac{x_0-1}{2}, \frac{y_0+1}{2})$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} 4 \times \frac{x_0-1}{2} - 5 \times \frac{y_0+1}{2} + 6 = 0, \\ x_0 + y_0 - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x_0 = 3, \\ y_0 = 3, \end{cases}$$

所以 $B(3, 3)$,

又由(1)得 $C(-4, -2)$,

所以直线 BC 的方程为 $y-3 = \frac{3-(-2)}{3-(-4)}(x-3)$,

化简得 $5x-7y+6=0$.

易错辨析

D 解析: 为使三条直线能构成三角形, 需三条直线两两相交且不同时交于一点. ①若 $l_1 \parallel l_2$, 则由 $a \times a-1 \times 1=0$, 得 $a = \pm 1$. ②若 $l_2 \parallel l_3$, 则由 $1 \times 1 - a \times 1=0$, 得 $a=1$. ③若 $l_1 \parallel l_3$, 则由 $a \times 1 - 1 \times 1=0$, 得 $a=1$. 故当 $a=1$ 时, l_1, l_2 与 l_3 三线重合. 当 $a=-1$ 时, l_1, l_2 平行. ④若三条直线交于一点, 由 $\begin{cases} x+ay+1=0, \\ x+y+a=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-a-1, \\ y=1, \end{cases}$ 将 l_2 与 l_3 的交点 $(-a-1, 1)$ 的坐标代入 l_1 的方程, 得 $a(-a-1)+1+1=0$, 解得 $a=1$ (舍去)或 $a=-2$. 所以要使这三条直线能构成三角形, 应满足 $a \neq \pm 1$ 且 $a \neq -2$.

小测试(十五) 两点间的距离公式

预习自评

1. C 2. C 3. B

基础过关

1. B 解析: 由题意得 $|BC| = \sqrt{(4-5)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$$|AB| = \sqrt{[5-(-2)]^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}, \text{ 所以 } \frac{|BC|}{|AB|} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5}.$$

2. A 解析: 由题意得 $|AB| = \sqrt{(2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$, 则以 AB 为直径的圆的半径是 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

3. D 解析: 由已知可得 $|AB| = \sqrt{(-3-3)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{(-3+1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2}$, 所以 $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, 故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

4. B 解析: 设 $P(x, y)$, 则 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2}$, 即 $3x+y+4=0$.

5. AC 解析: 设 $B(x, y)$, 根据题意可得

$$\begin{cases} k_{AC} \cdot k_{BC} = -1, \\ |BC| = |AC|, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{3-4}{3-0} \cdot \frac{y-3}{x-3} = -1, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-3)^2}, \end{cases}$$
$$\text{解得} \begin{cases} x=2, \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4, \\ y=6, \end{cases} \text{ 所以 } B(2, 0) \text{ 或 } B(4, 6).$$

6. $(0, 4)$ 或 $(0, 0)$ 解析: 设 P 点的坐标为 $(0, y)$, 则 $|PB| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (6-y)^2}$, $|PA| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (3-y)^2}$, 又 $|PB| = 2|PA|$, 解得 $y=4$ 或 $y=0$, 故 P 点的坐标为 $(0, 4)$ 或 $(0, 0)$.

7. $3\sqrt{2}$ 解析: 因为 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{(x-2)^2 + 4}$, 其几何意义为点 $P(x, 0)$ 到点 $A(-1, 1), B(2, 2)$ 两点的距离之和. 又点 $A(-1, 1)$ 关于 x 轴的对称点为 $C(-1, -1)$, 所以 $y = |PA| + |PB| = |PC| + |PB| \geq |BC|$, 当且仅当 B, P, C 三点共线时, y 的值最小, 最小值为 $|BC| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

8. 解: (1) 因为 $A(-2, 0), B(0, 4)$,

所以线段 AB 的中点为 $(-1, 2)$,

$$k_{AB} = \frac{0-4}{-2-0} = 2,$$

又线段 AB 的垂直平分线为直线 l ,

$$\text{所以 } k_l = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y-2 = -\frac{1}{2}(x+1),$$

$$\text{即 } x+2y-3=0,$$

所以直线 l 的一般式方程为 $x+2y-3=0$.

(2) 设点 C 的坐标为 (a, b) ,

$$\text{由题意有} \begin{cases} a+2b-3=0, \\ \sqrt{(a+2)^2+b^2}=\sqrt{10}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-3, \\ b=3, \end{cases}$$

所以点C的坐标为(1,1)或(-3,3).

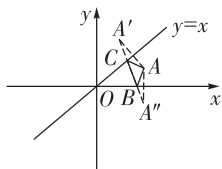
素养提升

1. A 解析: 直线 $l_1: y=3ax-2$ 过定点 $A(0, -2)$, 直线 $l_2: a(2x+5y)-(x+1)=0$ 过定点 $B(-1, \frac{2}{5})$,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(-1-0)^2 + [\frac{2}{5} - (-2)]^2} = \frac{13}{5}.$$

2. C 解析: 点 $A(-3, 1)$ 关于直线 $y=-2$ 的对称点为 $A'(-3, -5)$. 若直线 $y=-2$ 上有一点 P , 它到点 $A(-3, 1)$ 和点 $B(5, -1)$ 的距离之和最小, 则 P 为直线 $A'B$ 与直线 $y=-2$ 的交点, $\therefore (|PA| + |PB|)_{\min} = |A'B| = \sqrt{(-3-5)^2 + [-5-(-1)]^2} = 4\sqrt{5}$. 故选 C.

3. B 解析: 如图所示, 作出点 $A(3, 1)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点 $A'(1, 3)$, 关于 x 轴的对称点 $A''(3, -1)$, 连接 $A'A''$, 交直线 $y=x$ 于点 C , 交 x 轴于点 B , 则 $|AC| = |A'C|$, $|AB| = |A''B|$, $\therefore \triangle ABC$ 周长的最小值为 $|A'A''| = \sqrt{(1-3)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. 故选 B.



4. (1, 2) $\sqrt{5}$ 解析: 由 $\begin{cases} x+2y-5=0, \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$ 解得交点坐标为(1, 2), 将交点坐标代入 l_1 的方程得 $m+2n=-5$. 点 (m, n) 到原点的距离 $d = \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{5(n+2)^2+5}$, $\therefore$ 当 $n=-2$ 时, d 有最小值 $\sqrt{5}$.

5. 解: 易知直线 AB 的方程为 $x+y-4=0$.

点 P 关于 y 轴的对称点 P' 的坐标是 $(-2, 0)$.

设点 P 关于直线 $AB: x+y-4=0$ 的对称点为 $P''(a, b)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{b-0}{a-2} \times (-1) = -1, \\ \frac{a+2}{2} + \frac{b+0}{2} - 4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=4, \\ b=2, \end{cases}$$

因为 $|PM| = |P'M|$, $|PN| = |P'N|$,

所以 $|PM| + |MN| + |PN| = |P'M| + |MN| + |P'N| = |P'P''|$,

故光线所经过的路程为 $|P'P''| = \sqrt{(-2-4)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{10}$.

6. 解: (1) 当 $t=0$ 时, $l_1: y=1, l_2: x=-1$, 显然 $l_1 \perp l_2$;

当 $t \neq 0$ 时, $k_1=t, k_2=-\frac{1}{t}$, 则 $k_1 k_2 = -1$,

$\therefore l_1 \perp l_2$.

综上所述, $l_1 \perp l_2$.

$$\text{联立方程组} \begin{cases} tx-y+1=0, \\ x+ty+1=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{-t-1}{t^2+1}, \\ y = \frac{-t+1}{t^2+1}, \end{cases}$$

$$\therefore P\left(\frac{-t-1}{t^2+1}, \frac{-t+1}{t^2+1}\right).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } |OP|^2 = \left(\frac{-t-1}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-t+1}{t^2+1}\right)^2 = \frac{2}{t^2+1},$$

$$\therefore |t| \leq 1,$$

$$\therefore 0 \leq t^2 \leq 1,$$

$$\therefore 1 \leq t^2+1 \leq 2,$$

$$\text{则 } 1 \leq \frac{2}{t^2+1} \leq 2,$$

$$\text{即 } |OP|^2 \in [1, 2],$$

$$\text{则 } |OP| \in [1, \sqrt{2}].$$

当 $t^2=1$, 即 $t=\pm 1$ 时, $|OP|$ 取得最小值为 1,

此时 $P(-1, 0)$ 或 $P(0, 1)$;

当 $t^2=0$, 即 $t=0$ 时, $|OP|$ 取得最大值为 $\sqrt{2}$, 此时 $P(-1, 1)$.

小测试(十六) 点到直线的距离及两平行线之间的距离

预习自评

1. B 2. A 3. C

基础过关

1. B 解析: $\because M(3, 2\sqrt{3}), N(-1, 2\sqrt{3}), F(1, 0)$,

$\therefore$ 直线 NF 的斜率 $k = -\sqrt{3}$, $\therefore$ 直线 NF 的方程为

$y = -\sqrt{3}(x-1)$, 即 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$. $\therefore$ 点 M 到直

线 NF 的距离为 $\frac{|3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=2\sqrt{3}$.

2. D 解析: $\because$ 两直线平行, $\therefore 2 = \frac{a}{3}$, 解得 $a = 6$. 将

$2x - y + 3 = 0$ 化为 $6x - 3y + 9 = 0$, $\therefore d =$

$$\frac{|9-4|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. C 解析: 由 $\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$, 化简得 $4ab - 3b^2 = 0$, 所

以 $b = 0$ 或 $4a = 3b$, 所以直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $3x + 4y = 0$.

4. AB 解析: 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = 3$, 此时点 A 到直线 l 的距离为 5, 点 B 到直线 l 的距离为 1, 显然不满足题意; 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y - 5 = k(x - 3)$, 即

$$kx - y + 5 - 3k = 0. \text{ 由已知得 } \frac{|-2k - 3 + 5 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} =$$

$$\frac{|4k + 1 + 5 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \text{ 所以 } k = 2 \text{ 或 } k = -\frac{2}{3}. \text{ 当 } k = 2$$

时, 直线 l 的方程为 $2x - y - 1 = 0$; 当 $k = -\frac{2}{3}$ 时,

直线 l 的方程为 $2x + 3y - 21 = 0$. 所以直线 l 的方程可能为 $2x - y - 1 = 0$ 或 $2x + 3y - 21 = 0$.

5. D 解析: $\because l_1 \parallel l_2$, $\therefore a \cdot (a - 1) = 2$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 2$. 当 $a = -1$ 时, $l_1: x - 2y + 2 = 0$, $l_2:$

$x - 2y - 1 = 0$, 距离为 $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 符合题意; 当 $a = 2$

时, $l_1: x + y + 2 = 0$, $l_2: x + y + \frac{1}{2} = 0$, 距离为 $d =$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}, \text{ 不符合题意.}$$

6. $\frac{19\sqrt{2}}{6}$ 解析: 因为直线 $x - y = 1$ 与直线 $(m - 3)x +$

$my - 8 = 0$ 平行, 所以 $1 \times m = -1 \times (m - 3)$, 解得 $m = \frac{3}{2}$, 所以 $(m - 3)x + my - 8 = 0$, 即为 $3x - 3y +$

$16 = 0$, 又 $x - y = 1$ 可化为 $3x - 3y - 3 = 0$, 所以两

$$\text{平行线间的距离 } d = \frac{|-3-16|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}} = \frac{19\sqrt{2}}{6}.$$

7. $\sqrt{10}$ 解析: 由题意, 直线 $l: kx - y + 1 - 2k = 0 (k \in \mathbf{R})$, 可化为直线的点斜式方程 $y - 1 = k(x - 2)$, 可得直线 l 过定点 $P(2, 1)$. 又由点 $A(5, 0)$, 可得

$|PA| = \sqrt{(5-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$, 当直线 l 与 PA 所在的直线垂直时, 此时点 $A(5, 0)$ 到 l 的距离

取得最大值, 最大值为 $\sqrt{10}$.

8. 解: (1) 不能围成四边形. 理由如下:

$$\text{因为 } k_{AB} = \frac{0 - (-4)}{2 - 0} = 2,$$

$$k_{BC} = \frac{4 - 0}{4 - 2} = 2,$$

$$\text{即 } k_{AB} = k_{BC},$$

所以 A, B, C 三点共线,

所以 A, B, C, D 四点不能围成四边形.

$$(2) \text{ 因为 } k_{AC} = \frac{4 + 4}{4 - 0} = 2,$$

所以直线 AC 的方程为 $y = 2x - 4$,

$$\text{即 } 2x - y - 4 = 0,$$

又点 $D(-5, 1)$ 到直线 AC 的距离 $d =$

$$\frac{|2 \times (-5) - 1 - 4|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5},$$

$$|AC| = \sqrt{(4-0)^2 + [4-(-4)]^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\text{所以 } \triangle ACD \text{ 的面积为 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot d = \frac{1}{2} \times$$

$$4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 30.$$

素养提升

1. B 解析: $|PM|$ 的最小值为点 $P(\sqrt{3}, -1)$ 到直线

$$x + \sqrt{3}y - 2 = 0 \text{ 的距离. 又 } \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 1, \text{ 故}$$

$|PM|$ 的最小值为 1. 故选 B.

2. B 解析: 因为 $A(-2, -4), B(1, 5)$ 两点到直线 $l:$

$$ax + y + 1 = 0 \text{ 的距离相等, 所以 } \frac{|-2a - 4 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} =$$

$$\frac{|a + 5 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}, \text{ 解得 } a = \pm 3. \text{ 故选 B.}$$

3. C 解析: $A(-2, -3), B(4, 5)$ 两点之间的距离 $d =$

$$\sqrt{(-2-4)^2 + (-3-5)^2} = 10, \text{ 两点到直线 } l \text{ 的距}$$

离都等于 5, 则 l 可以为线段 AB 的垂直平分线, 也

可以平行于直线 AB . 当 l 平行于直线 AB 时, 直线 l

$$\text{的斜率为 } \frac{5+3}{4+2} = \frac{4}{3}, \text{ 可设直线 } l \text{ 的方程为 } y =$$

$$\frac{4}{3}x + b, \text{ 即 } 4x - 3y + 3b = 0. \text{ 由 } (-2, -3) \text{ 到直线 } l$$

$$\text{的距离为 } 5, \text{ 可得 } \frac{|4 \times (-2) - 3 \times (-3) + 3b|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5,$$

$$\text{解得 } b = 8 \text{ 或 } b = -\frac{26}{3}; \text{ 当直线为线段 } AB \text{ 的垂直平}$$

分线时, 直线 l 必过线段 AB 的中点 $(1, 1)$, 当斜率

不存在, 即直线 $x = 1$ 时, 不满足题意. 当直线 l 的斜

率存在时,可设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-1)$, 即 $kx-y-k+1=0$. 由 $(-2, -3)$ 到直线 l 的距离为 5, 可得 $\frac{|-2k+3-k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=5$, 解得 $k=-\frac{3}{4}$. 综上

所述, 所求直线 l 有 3 条. 故选 C.

4. $3x-2y-25=0$ 或 $3x-2y-9=0$ 解析: 直线 $l_1: y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ 可化为 $3x-2y-1=0$, 由此可知直线 $l_1 \parallel l_2$. 又由题意知直线 l 与直线 l_1, l_2 都平行. 设直线 l 为 $3x-2y+m=0 (m \neq -1 \text{ 且 } m \neq -13)$, 由两条平行直线间的距离公式, 得 $d_1 = \frac{|m-(-1)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{13}}, d_2 = \frac{|m-(-13)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|m+13|}{\sqrt{13}}$. 由 $d_1 : d_2 = 2 : 1$, 得 $|m+1| = 2|m+13|$, 解得 $m = -25$ 或 $m = -9$. 故所求直线方程为 $3x-2y-25=0$ 或 $3x-2y-9=0$.

5. 解: (1) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = -2$, 满足题意;

当直线 l 的斜率存在时,

设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)$,

即 $kx-y+3+2k=0$,

由原点到直线 l 的距离为 2, 得 $\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,

解得 $k = -\frac{5}{12}$.

故直线 l 的方程为 $y-3 = -\frac{5}{12}(x+2)$,

即 $5x+12y-26=0$.

(2) 设直线 l 夹在直线 l_1, l_2 之间的线段为 AB (其中 A 在 l_1 上, B 在 l_2 上),

并设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为 AB 被点 P 平分,

所以 $\begin{cases} x_1+x_2=-4, \\ y_1+y_2=6, \end{cases}$

从而 $\begin{cases} x_2=-4-x_1, \\ y_2=6-y_1, \end{cases}$

由于 A 在 l_1 上, B 在 l_2 上,

从而 $\begin{cases} 2x_1-y_1-2=0, \\ x_2+y_2+3=0, \end{cases}$

解得 $x_1 = \frac{7}{3}, y_1 = \frac{8}{3}$, 即 $A(\frac{7}{3}, \frac{8}{3})$,

从而直线 l 的方程是 $\frac{y-3}{\frac{8}{3}-3} = \frac{x+2}{\frac{7}{3}+2}$,

即 $x+13y-37=0$.

6. (1) 证明: 因为直线 $l_2: (2k-1)x+(k-1)y-7k+4=0$,

所以 $(2x+y-7)k-(x+y-4)=0$,

由 $\begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x+y-4=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$

可得直线 l_2 过定点 $C(3, 1)$.

(2) 解: 当 $k=2$ 时, 直线 $l_1: 2x-y=0$,

直线 $l_2: 3x+y-10=0$,

由 $\begin{cases} 2x-y=0, \\ 3x+y-10=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$

即 $A(2, 4)$, 易知 $B(2, 0)$.

所以直线 BC 的方程为 $\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-2}{3-2}$,

即 $x-y-2=0$,

可得点 $A(2, 4)$ 到直线 BC 的距离 $d =$

$\frac{|2-4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$.

易知点 C 到直线 AB 的距离为 1, $|AB|=4$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$.

易错辨析

A 解析: 由于直线 l_1 与直线 l_2 平行, 且直线 l_1 可化为 $2x+4y-8=0$, 所以所求距离 $d =$

$\frac{|7-(-8)|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 故选 A.

滚动卷(三) 小测试(九)至(十六)

综合拔高

1. B 解析: $\because A(2, m), B(3, 3)$, 直线 AB 的斜率为 1,

$\therefore \frac{3-m}{3-2} = 1, \therefore m = 2$. 故选 B.

2. C 解析: 由 $\begin{cases} y=kx-3, \\ 2x+3y-6=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{15}{3k+2}, \\ y=\frac{6k-6}{3k+2}. \end{cases}$ 因为

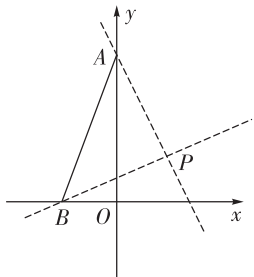
两直线的交点位于第一象限, 所以

$\begin{cases} x=\frac{15}{3k+2} > 0, \\ y=\frac{6k-6}{3k+2} > 0, \end{cases}$ 解得 $k > 1$. 设直线 l 的倾斜角为 α ,

则 $k = \tan \alpha > 1$. 又 $0 \leq \alpha < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以

直线 l 的倾斜角的取值范围是 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. 故选 C.

3. D 解析: 直线 l 的方程为 $y=k(x-1)+1$, 易知直线 l 过定点 $P(1,1)$, 如图所示. 又 $k_{PA} = \frac{3-1}{0-1} = -2$, $k_{PB} = \frac{0-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$, 所以直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $\left\{k \mid -2 \leq k \leq \frac{1}{2}\right\}$. 故选 D.



4. A 解析: 设点 $(3,4)$ 关于直线 $x+y+1=0$ 对称的点的坐标为 (x, y) , 由题意可得
- $$\begin{cases} \frac{y-4}{x-3} \times (-1) = -1, \\ \frac{3+x}{2} + \frac{4+y}{2} + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -5, \\ y = -4. \end{cases} \quad \text{所以点} (3,4)$$
- 关于直线 $x+y+1=0$ 对称的点的坐标为 $(-5, -4)$. 故选 A.

5. C 解析: $\because a > 0, b > 0$, 两直线 $l_1: (a-1)x + y - 1 = 0, l_2: x + 2by + 1 = 0$, 且 $l_1 \perp l_2, \therefore (a-1) + 2b = 0$, 即 $a + 2b = 1 \geq 2\sqrt{2ab}, \therefore ab \leq \frac{1}{8}, \frac{1}{ab} \geq 8$, 当且仅当 $a = 2b = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2b+a}{ab} = \frac{1}{ab}$ 的最小值为 8. 故选 C.

6. $x=3$ 解析: 由题意可知直线 $y=x+1$ 的斜率为 1, 倾斜角为 45° . 因为直线 l 的倾斜角是直线 $y=x+1$ 的倾斜角的 2 倍, 所以直线 l 的倾斜角为 90° , 其斜率不存在. 又直线 l 过定点 $P(3,3)$, 所以直线 l 的方程为 $x=3$.

7. $x-y+4=0$ 解析: $\because$ 直线 l 与直线 $x+y-2=0$ 垂直, $\therefore$ 直线 l 的斜率 $k_l = 1$. $\because$ 直线 l 在 y 轴上的截距为 4, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=x+4$, 整理得 $x-y+4=0$.

8. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ 解析: 由点 P 在直线 $x+3y=0$ 上, 可设 $P(-3a, a)$. $\because$ 点 P 到原点的距离和点 P 到直线 $x+3y-2=0$ 的距离相等, $\therefore$ 由距离公式可得 $\sqrt{(-3a)^2 + a^2} = \frac{|-3a+3a-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}$, 解得

$$a = \pm \frac{1}{5}, \therefore P\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right).$$

9. 解: $\because$ 点 A, B 到直线 l 的距离相等,

$\therefore$ 直线 l 过线段 AB 的中点或 $l \parallel AB$.

- ① 当直线 l 过线段 AB 的中点 $N\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ 时,

直线 l 的斜率不存在, 则 l 的方程为 $x=2$;

- ② 当 $l \parallel AB$ 时, 斜率 $k_l = k_{AB} = \frac{-2-1}{3-1} = -\frac{3}{2}$,

所以直线 l 的方程为 $y-0 = -\frac{3}{2}(x-2)$,

即 $3x+2y-6=0$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $3x+2y-6=0$.

10. 解: (1) 由 $B(5,3), C(-1,5)$, 可知直线 BC 的斜率

$$k_{BC} = \frac{5-3}{-1-5} = -\frac{1}{3},$$

故 $k_l = 3$,

又 $A(2,1)$,

故 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高所在直线 l 的方程为

$$y-1=3(x-2),$$

$$\text{即 } 3x-y-5=0.$$

(2) 设 $D(x, y)$,

由 $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CD}$, 可知 $(6, -2) = 3(x+1, y-5)$,

$$\text{即 } \begin{cases} 3x+3=6, \\ 3y-15=-2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=\frac{13}{3}, \end{cases}$$

$$\text{即 } D\left(1, \frac{13}{3}\right),$$

与直线 l 平行的直线方程设为 $y=3x+b$,

代入点 D 的坐标,

$$\text{解得 } b = \frac{4}{3},$$

$$\text{故所求直线方程为 } y=3x+\frac{4}{3},$$

$$\text{即 } 9x-3y+4=0.$$

素养提升

1. B 解析: 经过 $A(0,2), B(-1,0)$ 两点的直线的方

向量为 $(1, \lambda)$, $\therefore \frac{2-0}{0-(-1)} = \frac{\lambda}{1}$, 解得 $\lambda=2$.

2. C 解析: 因为点 $A(1,2), B(-1,6)$, 所以 $k_{AB} =$

$\frac{6-2}{-1-1} = -2$, 线段 AB 的中点坐标为 $(0,4)$, 所以

$$\begin{cases} k_{AB} \cdot k = -1, \\ 4 = -b, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -4, \end{cases} \text{所以直线 } y = 2kx + b$$

b , 即为 $y = x - 4$. 当 $y = 0$ 时, $x = 4$, 所以直线 $y = 2kx + b$ 在 x 轴上的截距是 4.

3. C 解析: $\because$ 直线 $ax + (a-1)y + 3 = 0$, 即 $a(x+y) + (3-y) = 0$, $\therefore$ 直线 $ax + (a-1)y + 3 = 0$ 是过直线 $x+y=0$ 和 $3-y=0$ 交点的直线系方程. 由 $\begin{cases} x+y=0, \\ 3-y=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-3, \\ y=3, \end{cases} \therefore$ 直线 $ax + (a-1)y + 3 = 0$ 经过定点 $Q(-3, 3)$. $\therefore$ 当直线 $ax + (a-1)y + 3 = 0$ 与 PQ 垂直时, 点 $P(2, 3)$ 到直线 $ax + (a-1)y + 3 = 0$ 的距离 d 最大, $\therefore d$ 的最大值为 $|PQ| = \sqrt{(2+3)^2 + (3-3)^2} = 5$, 此时 $PQ \parallel x$ 轴, 故直线 $ax + (a-1)y + 3 = 0$ 的斜率不存在, 即 $a = 1$.

4. $6x - y - 6 = 0$ 解析: 设点 $M(-3, 4)$ 关于直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的对称点为 $M'(a, b)$, 则反射光线所在

$$\text{直线过点 } M'. \text{ 由题知 } \begin{cases} \frac{b-4}{a-(-3)} \times 1 = -1, \\ \frac{-3+a}{2} - \frac{b+4}{2} + 3 = 0, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases} \text{又反射光线经过点 } N(2, 6), \text{ 所以所求直线}$$

的方程为 $\frac{y-0}{6-0} = \frac{x-1}{2-1}$, 即 $6x - y - 6 = 0$.

5. 解: (1) 直线 $l: a(x-1) - y + 6 = 0$ 即为 $l: a(x-1) + (-y+6) = 0$.

$$\text{令 } \begin{cases} x-1=0, \\ -y+6=0, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases}$$

故直线 l 恒过定点, 定点坐标为 $(1, 6)$.

(2) 将点 $(0, 3)$ 代入直线 l 的方程, 可得 $a = 3$,

$$\therefore l: 3x - y + 3 = 0.$$

$$\because l_1 \parallel l,$$

$$\therefore \text{设 } l_1: 3x - y + m = 0 (m \neq 3).$$

根据两平行直线间的距离公式可知 $d = \frac{|m-3|}{\sqrt{10}} =$

$$\sqrt{10},$$

$$\therefore |m-3| = 10,$$

$$\therefore m = 13 \text{ 或 } m = -7,$$

故 $l_1: 3x - y + 13 = 0$ 或 $3x - y - 7 = 0$.

6. 解: (1) $\because$ 顶点 C 在直线 l 上, 当 $y = 0$ 时, $x = -2$, $\therefore C(-2, 0)$.

$$\because k_{AB} = \frac{3+1}{4-2} = 2,$$

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y = 2(x-2) - 1$,

$$\text{即 } 2x - y - 5 = 0,$$

顶点 C 到直线 AB 的距离 $d = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

$$\because |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{9}{\sqrt{5}} = 9.$$

(2) $\because$ 线段 AB 中点的坐标为 $(3, 1)$, $k_{AB} = 2$,

$\therefore AB$ 的中垂线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$,

$$\text{即 } x + 2y - 5 = 0,$$

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ x - 2y + 2 = 0, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{点 } C\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right).$$

小测试(十七) 圆的标准方程

预习自评

1. C 2. C 3. B

基础过关

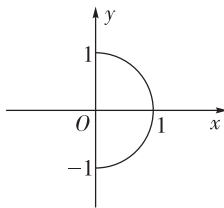
1. A 解析: 易知线段 AB 的中点坐标为 $(3, 0)$, 即圆心为 $(3, 0)$. 易知圆的半径为 $r = \frac{|AB|}{2} =$

$$\frac{\sqrt{(2-4)^2 + (-1-1)^2}}{2} = \sqrt{2}, \text{ 所以圆的方程为}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 2. \text{ 故选 A.}$$

2. A 解析: 由题意, 得 $(a+1-a)^2 + (3-1)^2 < m$, 解得 $m > 5$. 故选 A.

3. D 解析: 由 $x = \sqrt{1-y^2}$ 得 $x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0 \text{ 且 } -1 \leq y \leq 1)$, 表示以 $(0, 0)$ 为圆心, 以 1 为半径的右半圆. 故选 D.



4. C 解析: 由圆 $(x+2)^2 + (y-12)^2 = 4$ 得圆心坐标为 $(-2, 12)$, 半径为 2. 因为所求圆与圆 $(x+2)^2 + (y-12)^2 = 4$ 关于直线 $x - y + 8 = 0$ 对称, 所以其圆心与 $(-2, 12)$ 关于直线 $x - y + 8 = 0$ 对称, 其半径

为 2. 设所求圆的圆心为 (a, b) , 则

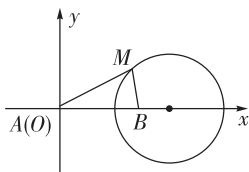
$$\begin{cases} \frac{a-2}{2} - \frac{b+12}{2} + 8 = 0, \\ \frac{b-12}{a+2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4, \\ b=6, \end{cases} \text{ 故所求圆的方程}$$

为 $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 4$. 故选 C.

5. CD 解析: 由圆 C 关于 x 轴对称, 可设圆心 $C(a, 0)$, 又圆 C 被 y 轴分成的两段弧长之比为 $2:1$, $\therefore |a| = \frac{r}{2}$, 则 $(\frac{r}{2})^2 + 1 = r^2$, 得 $r^2 = \frac{4}{3}$, $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x \pm \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + y^2 = \frac{4}{3}$.

6. $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$ 解析: 圆的标准方程为 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$.

7. $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 解析: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 以点 A 为坐标原点, 射线 AB 为 x 轴正半轴建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, 由 $|MA| = 2|MB|$ 可得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, 整理, 得 $(x-4)^2 + y^2 = 4$, 故点 M 的轨迹方程为 $(x-4)^2 + y^2 = 4$.



8. 解: (1) 设 $A(2, 5)$, $B(-2, 1)$, 则线段 AB 的中点为 $(0, 3)$.

经过 $A(2, 5)$, $B(-2, 1)$ 的直线的斜率为 $\frac{5-1}{2+2} = 1$,

所以易得线段 AB 的垂直平分线所在直线的方程为 $y = -x + 3$,

$$\text{由} \begin{cases} y = -x + 3, \\ y = \frac{1}{2}x, \end{cases} \text{ 解得圆心坐标为 } (2, 1),$$

所以圆的半径 $r = \sqrt{(2-2)^2 + (5-1)^2} = 4$,

所以圆的标准方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$.

(2) 由(1)知圆的圆心坐标为 $(2, 1)$, 半径 $r = 4$.

所以圆心到直线 $3x - 4y + 23 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$,

则圆上的点到直线 $3x - 4y + 23 = 0$ 的最小距离为 $d - r = 5 - 4 = 1$.

素养提升

1. ABC 解析: 由圆的标准方程 $(x-3)^2 + (y+2)^2 =$

13 可知, 圆 C 的圆心坐标为 $(3, -2)$, 半径为 $r = \sqrt{13}$, 周长为 $2\pi r = 2\sqrt{13}\pi$, 从而 ABC 均正确. 设圆 D 的半径为 r_1 , 则 $r_1 = 2\sqrt{13}$, 从而圆 D 的面积是 $\pi r_1^2 = 52\pi$, 所以 D 错误. 故选 ABC.

2. B 解析: 由方程 $|y| - 1 = \sqrt{3 - (x-2)^2}$ 知 $|y| - 1 \geq 0$, 所以 $y \geq 1$ 或 $y \leq -1$. 原方程可变形为 $(x-2)^2 + (|y| - 1)^2 = 3$, 从而知曲线为两个半径为 $\sqrt{3}$ 的圆的一半, 从而曲线的长度为 $C = 2\pi \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi$. 故选 B.

3. B 解析: 由题意, 得 AC 为圆的直径, 不妨设点 A 的坐标为 (m, n) , 则点 C 的坐标为 $(-m, -n)$. 设点 $B(x, y)$, 则 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (m-2, n) + (x-2, y) + (-m-2, -n) = (x-6, y)$, 从而 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 的最大值为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点 (x, y) 到点 $(6, 0)$ 的距离的最大值, 易知当 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 0 \end{cases}$ 时, 距离最大, 最大值为 7. 故选 B.

4. $7+4\sqrt{3}$ $7-4\sqrt{3}$ 解析: 根据题意, 点 (x, y) 为圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 上的点, $x^2 + y^2$ 的几何意义为圆上一点到原点的距离的平方. 而 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 上的点到原点的距离的最大值为 $2 + \sqrt{3}$, 最小值为 $2 - \sqrt{3}$, 所以 $x^2 + y^2$ 的最大值为 $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, 最小值为 $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

5. 解: 因为圆 C 过点 $(1, 3)$, $(1, -7)$,

所以圆心在直线 $y = -2$ 上.

设圆心坐标为 $(a, -2)$,

$$\text{则 } (a-1)^2 + 25 = (a-4)^2 + 16,$$

解得 $a = 1$,

$$\text{故 } r^2 = (1-1)^2 + 25 = 25.$$

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

6. 解: (1) 直线方程整理为 $k(x-3) - x - 2y + 5 = 0$,

$$\text{由} \begin{cases} x-3=0, \\ -x-2y+5=0, \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$$

所以 P 点的坐标为 $(3, 1)$.

(2) 由于圆心在直线 $x - 2y = 0$ 上,

故可设圆心坐标为 $(2b, b)$,

$$\text{则 } \sqrt{(2b-4)^2 + b^2} = \sqrt{(2b-3)^2 + (b-1)^2},$$

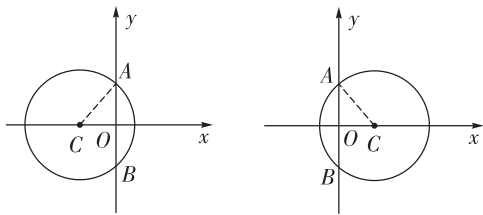
解得 $b=3$,

所以半径为 $r = \sqrt{(6-4)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

所以圆 C 的方程为 $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 13$.

易错辨析

D 解析: 由题意得 $|AC| = 5$, $|AB| = 8$, 所以 $|AO| = \frac{1}{2}|AB| = 4$, 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $|OC| = \sqrt{|AC|^2 - |AO|^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. 如图所示, 有两种情况:



故圆心 C 的坐标为 $(3, 0)$ 或 $(-3, 0)$, 故所求圆的标准方程为 $(x \pm 3)^2 + y^2 = 25$.

小测试(十八) 圆的一般方程

预习自评

1. C 2. A 3. ABC

基础过关

1. B 解析: 将一般方程 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 化为标准方程 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 所以圆的半径为 $\sqrt{5}$. 故选 B.

2. B 解析: 方程 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = a$ 化为标准方程为 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = a+5$, 由 $a+5 > 0$ 得 $a > -5$. 故选 B.

3. AD 解析: 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 可化为圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 设圆心为 A , 则 $A(2, 1)$. 若直线平分圆, 则 $A(2, 1)$ 必在直线上. $\because 2-1-1=0, \therefore$ 点 A 在直线 $x-y-1=0$ 上, 故 A 正确; $\because 2-1+1 \neq 0, \therefore$ 点 A 不在直线 $x-y+1=0$ 上, 故 B 错误; $\because 2 \times 2 - 1 \neq 0, \therefore$ 点 A 不在直线 $2x-y=0$ 上, 故 C 错误; $\because 2 \times 2 - 1 - 3 = 0, \therefore$ 点 A 在直线 $2x-y-3=0$ 上, 故 D 正确. 故选 AD.

4. C 解析: 易知圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 的圆心为 $(1, -2)$. ①当截距 $a=b=0$ 时, 设 $l: y=kx$. 因为直线 l 过圆心 $(1, -2)$, 所以 $-2=k$, 所以 $l: y=-2x$, 即 $2x+y=0$. ②当截距 $a=b=m \neq 0$ 时, 设 $l: \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1$. 因为直线 l 过圆心 $(1, -2)$, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{-2}{m} =$

1, 解得 $m=-1$, 所以 $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$, 即 $x+y+1=0$. 所以直线 l 的方程为 $2x+y=0$ 或 $x+y+1=0$. 故选 C.

5. D 解析: 根据题意, 圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 2my - 4 - 4m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 变形可得 $(x+1)^2 + (y-m)^2 = m^2 + 4m + 5 (m \in \mathbf{R})$. 则其圆心为 $C(-1, m)$, 半径 $r = \sqrt{m^2 + 4m + 5} = \sqrt{(m+2)^2 + 1}$. 当圆 C 的面积最小时, 必有 $m=-2$, 此时 $r=1$, 圆心 $C(-1, -2)$, 所以圆心 C 到坐标原点的距离 $d = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, 所以圆上的点到坐标原点的距离的最大值为 $d+r = \sqrt{5} + 1$. 故选 D.

6. $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ $3 - \sqrt{5}$ 解析: 设点 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{PA} = (-1-x, -y)$, $\overrightarrow{PB} = (3-x, -y)$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-1-x)(3-x) + y^2 = 1$, 整理可得 $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$, 即点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$. 由 $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ 可得 $(x-1)^2 + y^2 = 5$, 其表示圆心为 $(1, 0)$, 半径 $r = \sqrt{5}$ 的圆. 圆心 $(1, 0)$ 到直线 $3x+4y+12=0$ 的距离 $d = \frac{15}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3 > \sqrt{5}$, 故直线与圆不相交(后面会学到), 由圆的性质可得点 P 到直线 $3x+4y+12=0$ 的距离的最小值为 $3-r = 3-\sqrt{5}$.

7. -2 解析: 设圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 将 $(4, 2), (1, 3), (5, 1)$ 代入方程中, 得
$$\begin{cases} 16+4+4D+2E+F=0, \\ 1+9+D+3E+F=0, \\ 25+1+5D+E+F=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D=-2, \\ E=4, \\ F=-20, \end{cases} \text{所以圆} \\ C \text{ 的方程为 } x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0. \text{ 令 } x=0, \text{ 则 } y^2 + 4y - 20 = 0, \text{ 由韦达定理得 } y_1 + y_2 = -4. \text{ 令 } y=0, \text{ 则 } x^2 - 2x - 20 = 0, \text{ 由韦达定理得 } x_1 + x_2 = 2. \text{ 故圆 } C \text{ 在两坐标轴上的四个截距之和为 } y_1 + y_2 + x_1 + x_2 = -4 + 2 = -2.$$

8. 解: (1) 联立
$$\begin{cases} y = -2x + 11, \\ x + 3y + 2 = 0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 7, \\ y = -3, \end{cases}$$

所以顶点 $B(7, -3)$.

因为 $AC \perp BH$,

所以 $k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$,

因为 $k_{BH} = -\frac{1}{3}$,

所以 $k_{AC} = 3$,

所以设直线 AC 的方程为 $y = 3x + b$,

将 $C(2, -8)$ 代入得 $b = -14$,

所以直线 AC 的方程为 $y = 3x - 14$.

由 $\begin{cases} y = -2x + 11, \\ y = 3x - 14, \end{cases}$ 可得顶点 $A(5, 1)$.

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

将 $A(5, 1)$, $B(7, -3)$ 和 $C(2, -8)$ 的坐标分别代入,

$$\begin{cases} 5D + E + F + 26 = 0, \\ 7D - 3E + F + 58 = 0, \\ 2D - 8E + F + 68 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} D = -4, \\ E = 6, \\ F = -12, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC$ 外接圆的一般方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

素养提升

1. D 解析: 依题意, 圆的方程可化为 $(x - \frac{k}{2})^2 +$

$(y - 1)^2 = \frac{5k^2}{4} + 1$, 于是该圆的圆心坐标为

$(\frac{k}{2}, 1)$, 半径 $r = \sqrt{\frac{5k^2}{4} + 1}$, 因此, 该圆面积 $S =$

$\pi r^2 = \pi(\frac{5k^2}{4} + 1) \geq \pi$, 当且仅当 $k = 0$ 时取“=”, 所

以该圆面积最小时, 圆心坐标为 $(0, 1)$. 故选 D.

2. A 解析: 因为圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, 所以圆 C 的圆心坐标为 $(3, -2)$. 又圆 C 上存在两点 P , Q 关于直线 l 对称, 所以直线 l 经过圆 C 的圆心, 从而 $3 - 2m + 2 = 0$, 解得 $m = \frac{5}{2}$. 故选 A.

3. B 解析: 由方程 $x^2 + y^2 + ax + 2ay + 2a^2 + a - 1 = 0$, 得 $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + a)^2 = 1 - a - \frac{3}{4}a^2$. 若该方程表示圆, 则圆心的坐标为 $(-\frac{a}{2}, -a)$, 半径为 $\sqrt{1 - a - \frac{3}{4}a^2}$. 当 $a = -2$ 时, $1 - a - \frac{3}{4}a^2 = 0$, 方程不能表示圆; 当 $a = 0$ 时, $1 - a - \frac{3}{4}a^2 = 1$, 此时圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径为 1, 方程表示一个圆; 当 $a =$

1 时, $1 - a - \frac{3}{4}a^2 < 0$, 方程不能表示一个圆; 当 $a =$

$\frac{2}{3}$ 时, $1 - a - \frac{3}{4}a^2 = 0$, 方程不能表示一个圆. 从而

所给方程表示的圆的个数为 1. 故选 B.

4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 解析: 设 PA 的中点 M 的坐标为 (x, y) , $P(x_1, y_1)$, 因为圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 的圆心为 $A(2, -1)$, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_1 + 2}{2} = x, \\ \frac{y_1 - 1}{2} = y, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = 2x - 2, \\ y_1 = 2y + 1. \end{cases} \quad \text{又 } P \text{ 点在圆 } A \text{ 上, 所}$$

以 $x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 + 2y_1 - 11 = 0$, 所以 $(2x - 2)^2 + (2y + 1)^2 - 4(2x - 2) + 2(2y + 1) - 11 = 0$, 即 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

5. 解: (1) 由已知得圆 $C: (x - 3)^2 + y^2 = 4$,

故圆 C 的圆心为 $(3, 0)$, 半径为 2.

(2) 设 $H(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + y_0^2 - 6x_0 + 5 = 0$ ①.

设 CH 的中点为 M ,

则点 M 的坐标为 $(\frac{x_0 + 3}{2}, \frac{y_0}{2})$,

因为四边形 $ACBH$ 为菱形,

所以 $AM \perp CM$, 即 $OM \perp CM$,

$$\text{所以} \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0 + 3}{2}} \times \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0 + 3}{2} - 3} = -1 \text{ ②,}$$

由 ①② 得 $x_0 = \frac{7}{3}$, $y_0 = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

所以点 M 的坐标为 $(\frac{8}{3}, \pm \frac{2\sqrt{2}}{3})$,

故直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{8}{3} - 3}x$, 即 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$.

6. (1) 解: 当 $a = -1$ 时, 方程为 $x + 2y = 0$, 表示一条直线.

当 $a \neq -1$ 时, 方程为 $(x - \frac{2}{1+a})^2 + (y + \frac{4a}{1+a})^2 = \frac{4+16a^2}{(1+a)^2}$,

因为 $\frac{4+16a^2}{(1+a)^2} > 0$,

所以 $a \neq -1$ 时方程表示圆.

(2) 证明: 方程可变形为 $x^2 + y^2 - 4x + a(x^2 + y^2 + 8y) = 0$,

因为 a 取任何值, 上式都成立,

$$\text{所以 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0, \\ x^2 + y^2 + 8y = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{16}{5}, \\ y=-\frac{8}{5}. \end{cases}$$

所以曲线 C 过定点 $(0,0)$ 和 $(\frac{16}{5}, -\frac{8}{5})$,

故无论 a 为何值, 曲线 C 必过两定点.

(3) 由(2)知曲线 C 过两定点, 设定点分别为 A, B , 在曲线 C 表示的圆中, 以 AB 为直径的圆的面积最小.

$$\text{因为以 } AB \text{ 为直径的圆的方程为 } (x - \frac{8}{5})^2 + (y + \frac{4}{5})^2 = \frac{16}{5},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2}{1+a} = \frac{8}{5}, \\ \frac{4a}{1+a} = \frac{4}{5}, \\ \frac{4+16a^2}{(1+a)^2} = \frac{16}{5}, \end{cases} \text{ 解得 } a = \frac{1}{4}.$$

易错辨析

$(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2})$ 解析: 圆心为 $C(a, 0)$, 半径 $r = \sqrt{3-2a}$, 方程表示圆, 则 $3-2a > 0$, 即 $a < \frac{3}{2}$. 由于过点 $A(a, a)$ 可作圆的两条切线, 所以点 A 在圆外, 即 $a^2 + a^2 - 2a^2 + a^2 + 2a - 3 > 0$, 解得 $a > 1$ 或 $a < -3$. 综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2})$.

小测试(十九) 直线与圆的位置关系

预习自评

1. B 2. C 3. CD

基础过关

1. C 解析: 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为坐标原点 $O(0, 0)$, 半径 $r = 2$, 则圆心 O 到直线 $y = x + 2$ 的距离 $d = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < r$, 所以直线 $y = x + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交, 即有 2 个公共点. 故选 C.

2. A 解析: 因为 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$, 所以 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 6$, 所以圆心 $(3, -1)$ 到直线

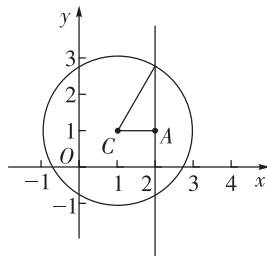
$x + y = 0$ 的距离 $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以直线 $x + y = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ 截得的弦长为

$2\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = 4$. 故选 A.

3. BC 解析: $\because x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0, \therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, \therefore$ 圆心 $(1, 3)$ 到直线 $x = 2$ 的距离等于 1, $\therefore$ 直线 l 的方程可以为 $x - 2 = 0$. 当直线 l 的斜率存在时, 设 $l: y = k(x-2)$, 则 $\frac{|-k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 1, \therefore k = -\frac{4}{3}, \therefore$ 直线 l 的方程为 $y = -\frac{4}{3}(x-2)$, 即 $4x + 3y - 8 = 0$. 故选 BC.

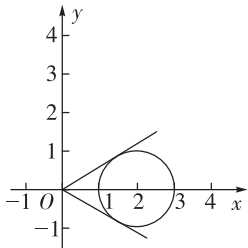
4. AC 解析: 由题意知 $C(-2, 1)$, 圆 C 的半径为 $\sqrt{2}$, 则 $\frac{|-2k-1+1|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{2}$, 解得 $k = \pm 1$. 所以直线 l 的方程为 $y = \pm x + 1$. 由题意知 $D(2, 0)$, 圆 D 的半径为 $\sqrt{3}$. 当 $k = 1$ 时, 圆心 D 到直线 l 的距离为 $\frac{|2+1|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{3}$, 所以直线 l 与圆 D 相离; 当 $k = -1$ 时, 圆心 D 到直线 l 的距离为 $\frac{|-2+1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$, 所以直线 l 与圆 D 相交. 故选 AC.

5. AC 解析: 如图, 设圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 的圆心为 $C(1, 1)$, 半径 $r = 2$. 直线 $x + my - m - 2 = 0$ 变形得 $x - 2 + m(y-1) = 0$, 得直线过定点 $A(2, 1)$. 因为 $|CA| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2} = 1 < 2$, 所以直线与圆必相交, 故 A 正确, B, D 错误. 由平面几何知识可知, 当直线与过定点 A 和圆心的直线垂直时, 所截弦长最短, 此时弦长为 $2\sqrt{r^2 - |CA|^2} = 2\sqrt{3}$, 故 C 正确. 故选 AC.



6. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ 解析: $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 圆心坐标为 $(2, 0)$, $r = 1$, 设 $\frac{y}{x} = k, \therefore y = kx$. 如图所示, 当直线与圆相切时, 圆心到切线的距离 $d = \frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$,

$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.



7. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 解析: 设圆心坐标为 $(a, 0)$ ($a > 0$), 由题可知圆的半径 $r = a$, $\therefore \frac{|a+2|}{2} = a$, 解得 $a = 2$ (负值舍去), 则圆 C 的标准方程是 $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

8. 解: (1) 设所求圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 由题意, 得

$$\begin{cases} a-b=0, \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b+3)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (b-1)^2} = r, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=b=1, \\ r=4, \end{cases}$$

故所求圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$.

(2) 由(1)知圆 C 的圆心坐标为 $(1, 1)$, 半径 $r = 4$.

① 当直线 l 斜率不存在时,

此时直线 l 的方程为 $x = 3$,

此时圆心到直线 l 的距离为 2,

由 $2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2$ 知满足题意.

② 当直线 l 斜率存在时,

设直线 l 的方程为 $y - 2 = k(x - 3)$,

即 $kx - y - 3k + 2 = 0$.

由 $|MN| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{16 - d^2} = 4\sqrt{3}$,

$$\text{得 } d = \frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{3}{4},$$

此时直线 l 的方程为 $3x + 4y - 17 = 0$,

故所求直线 l 的方程为 $x = 3$ 或 $3x + 4y - 17 = 0$.

素养提升

1. A 解析: 因为直线 l 的方程为 $kx - y + k - 1 = 0$,

$$\text{即 } k(x+1) + (-y-1) = 0, \text{ 令 } \begin{cases} x+1=0, \\ -y-1=0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-1, \end{cases} \text{ 即直线 } l \text{ 过定点 } (-1, -1). \text{ 因为}$$

$(-1)^2 + (-1)^2 = 2 < 3$, 所以点 $(-1, -1)$ 在圆 $O: x^2 + y^2 = 3$ 内部, 所以直线 l 与圆 O 相交. 故选 A.

2. D 解析: 把圆的方程化为标准方程得

$$\left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 + (y+1)^2 = 16 - \frac{3}{4}k^2. \text{ 由 } 16 - \frac{3}{4}k^2 >$$

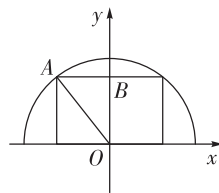
$$0, \text{ 解得 } -\frac{8\sqrt{3}}{3} < k < \frac{8\sqrt{3}}{3}. \text{ 由题意得点 } (1, 2) \text{ 应在已}$$

知圆的外部, 把点 $(1, 2)$ 的坐标代入圆的方程得 $1 + 4 + k + 4 + k^2 - 15 > 0$, 即 $(k-2)(k+3) > 0$, 解得 $k < -3$ 或 $k > 2$. 综上所述, 实数 k 的取值范围是

$$\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}, -3\right) \cup \left(2, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right). \text{ 故选 D.}$$

3. B 解析: 如图, 建立平面直角坐标系, $|OA| = 3.6$,

$|AB| = 0.8$, 则 $|OB| = \sqrt{3.6^2 - 0.8^2} \approx 3.5$, 所以卡车的高度不得超过 3.5 m.



4. $[1, +\infty)$ 解析: 令直线 $kx + y + 1 = 0$ 中 $x = 0$, 可得 $y = -1$, $\therefore$ 直线 $kx + y + 1 = 0$ 过定点 $P(0, -1)$.

$\therefore l$ 和圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ 恒有公共点, $\therefore r \geq |PC| = 1$, 即半径 r 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

5. 解: 设 $t = x + y$,

则 $y = -x + t$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = -x + t, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ 得 } 2x^2 - 2tx + t^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (2t)^2 - 4 \times 2(t^2 - 4) \geq 0,$$

整理, 得 $t^2 \leq 8$,

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2},$$

$$\therefore t \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{2},$$

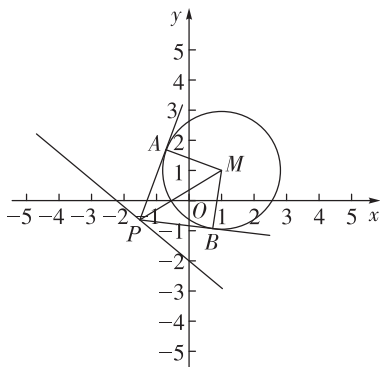
即 $x + y$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

6. 解: (1) 设圆 M 的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($r > 0$), 根据题意, 得

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2, \\ (-1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2, \\ a+b-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=1, \\ r=2. \end{cases}$$

故圆 M 的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

(2)如图.



四边形 $PAMB$ 的面积 $S = S_{\triangle PAM} + S_{\triangle PBM}$,

$$\text{即 } S = \frac{1}{2} (|AM| \cdot |PA| + |BM| \cdot |PB|),$$

又 $|AM| = |BM| = 2, |PA| = |PB|$,

所以 $S = 2|PA|$,

$$\text{而 } |PA| = \sqrt{|PM|^2 - 4},$$

$$\text{所以 } S = 2\sqrt{|PM|^2 - 4}.$$

因此要求 S 的最小值,只需求 $|PM|$ 的最小值即可,
 $|PM|$ 的最小值即为点 M 到直线 $3x + 4y + 8 = 0$ 的距离,

$$\text{所以 } |PM|_{\min} = \frac{|3+4+8|}{5} = 3,$$

所以四边形 $PAMB$ 面积的最小值为

$$2\sqrt{|PM|_{\min}^2 - 4} = 2\sqrt{5}.$$

易错辨析

解:(1)根据题意,得点 P 在圆 C 外,分两种情况讨论:
当直线 l 的斜率不存在时,过点 $P(1,2)$ 的直线方程是 $x=1$,与圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相切,满足题意;

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$,即 $kx-y-k+2=0$,

因为直线 l 与圆 C 相切,

$$\text{所以圆心}(0,0)\text{到直线}l\text{的距离为}\frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{4},$$

此时,直线 l 的方程为 $3x-4y+5=0$.

所以满足条件的直线 l 的方程是 $x=1$ 或 $3x-4y+5=0$.

(2)根据题意,若 $|AB|=\sqrt{2}$,则圆心到直线 m 的

$$\text{距离 } d = \sqrt{1^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

结合(1)知直线 m 的斜率一定存在.

设直线 m 的方程为 $y-2=n(x-1)$,

$$\text{即 } nx-y-n+2=0,$$

$$\text{则 } d = \frac{|2-n|}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $n=1$ 或 $n=7$.

所以满足条件的直线 m 的方程是 $x-y+1=0$ 或

$$7x-y-5=0.$$

小测试(二十) 圆与圆的位置关系

预习自评

1. C 2. C 3. A

基础过关

1. D **解析:**圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $(0,0)$,半径为 2;圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + m = 0$ 的圆心为 $(3,4)$,半径为 $\sqrt{25-m}$,两个圆的圆心距为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

因为两个圆外切,所以 $2 + \sqrt{25-m} = 5$,解得 $m=16$.

2. A **解析:**设点 M 的坐标为 (a,b) ,圆 $x^2 + y^2 = 5$ 的圆心为 $(0,0)$,半径为 $\sqrt{5}$,由题意得

$$\begin{cases} \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} = 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{5}, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} a=3, \\ b=6, \end{cases} \text{所以点}$$

M 的坐标为 $(3,6)$.

3. D **解析:**因为圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2ay = 0$ ①和圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 4$ ②相交,所以①-②得 $2x-2ay+3=0$,即两圆的公共弦方程为 $2x-2ay+3=0$,则圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $C_2(1,0)$ 到公共弦的距离小于半径 2, $d = \frac{5}{\sqrt{2^2 + (-2a)^2}} < 2$,解得 $a > \frac{3}{4}$

$$\text{或 } a < -\frac{3}{4}.$$

4. B **解析:**由题意,圆 C_1 与圆 C_2 有 2 条公切线,则两圆相交,圆 $C_1: x^2 + y^2 = m^2$ 的圆心 $C_1(0,0)$,半径为 $|m|$,圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$,即 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$,圆心 $C_2(-1,\sqrt{3})$,半径为 1,要使两圆相交,则 $||m|-1| < |C_1C_2| = \sqrt{(0+1)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2 < |m| + 1$,解得 $-3 < m < -1$ 或 $1 < m < 3$.

5. C **解析:**由 $|PA| = 2|PO|$,得 $(x-3)^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$,整理得 $(x+1)^2 + y^2 = 4$,表示圆心为 $(-1,0)$,半径为 $R=2$ 的圆.圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的

圆心为(1,0),半径为 $r=1$,则两圆的圆心距为2,满足 $R-r<2<R+r$,所以两个圆相交.

6. $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 解析:设所求圆的圆心为 $C(a,b)$,由题意可得 $|CA|=|CB|$, $k_{OB}=k_{OC}$,
 $\therefore (a-1)^2+(b+1)^2=(a-8)^2+(b-6)^2$,且
 $\frac{b-0}{a-0}=\frac{6-0}{8-0}$,解得 $a=4$, $b=3$,半径 $r=\sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2}=5$,故所求圆的方程为
 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

7. $2\sqrt{2}$ 解析:圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 的圆心 $C(2,0)$,半径 $r=2$,圆心 $C(2,0)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离
 $d=\frac{|2-0+2|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$, $|AC|_{\min}=d=2\sqrt{2}$.因为
 $\frac{1}{2}|AC|\cdot\frac{1}{2}|PQ|=\frac{1}{2}|PA|\cdot|PC|$,所以
 $|PQ|=\frac{2|PA|\cdot|PC|}{|AC|}=\frac{4|PA|}{|AC|}=\frac{4\sqrt{|AC|^2-4}}{|AC|}=4\sqrt{1-\frac{4}{|AC|^2}}$,所以当 $|AC|$ 取最小值 $2\sqrt{2}$ 时, $|PQ|$ 取最小值,为 $2\sqrt{2}$.

8. 解:(1)设圆心 $C_1(a,1)$,则

$$\sqrt{(\sqrt{5}-a)^2+(1-1)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-1-1)^2},$$

解得 $a=0$,

此时圆 C_1 的半径为 $r_1=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$,

所以圆 C_1 的方程为 $x^2+(y-1)^2=5$.

(2)将两圆的方程作差即可得出两圆的公共弦所在的直线方程,

$$\text{即}(x^2+y^2-4x+2y)-(x^2+y^2-2y-4)=0,$$

化简得 $x-y-1=0$,

所以圆 C_1 的圆心 $(0,1)$ 到直线 $x-y-1=0$ 的距离

$$\text{为}d=\frac{|-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2},$$

设两圆分别交于点 A,B ,

$$\text{则}\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=r_1^2-d^2=5-2=3,$$

解得 $|AB|=2\sqrt{3}$,

所以所求公共弦长为 $2\sqrt{3}$.

素养提升

1. A 解析:根据题意,圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$,即圆心为 $C(2,1)$,半径为2, $\therefore$ 点(2,1)在直线 $x+ay-1=0$ 上,即 $2+a-1=0$,
 $\therefore a=-1$, $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-4,-1)$, $\therefore |AC|$

$=\sqrt{(2+4)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{10}$, $\therefore$ 过点 A 作圆 C 的切线所得切线长为 $\sqrt{|AC|^2-2^2}=6$, $\therefore$ 以点 A 为圆心,6为半径的圆 A 的方程为 $(x+4)^2+(y+1)^2=36$,圆 A 与圆 C 的方程作差得 $3x+y-5=0$,即直线 BD 的方程为 $3x+y-5=0$.

2. C 解析:由圆 C_1 与圆 C_2 外切,可得
 $\sqrt{(a+b)^2+(-2+2)^2}=2+1=3$,即 $(a+b)^2=9$.
 根据基本不等式可知 $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

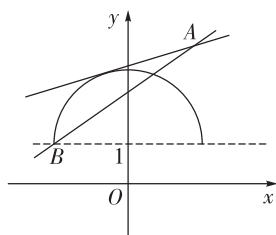
3. ABC 解析:对于A,圆 $C_1:x^2+y^2+2x=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=1$,圆心 $C_1(-1,0)$,半径 $r_1=1$.圆 $C_2:x^2+y^2-4x-8y+4=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=16$,圆心 $C_2(2,4)$,半径 $r_2=4$.又 $|C_1C_2|=5=r_1+r_2$,所以两圆外切,故两圆有3条公切线,故A正确;对于B,圆 $O:x^2+y^2=9$,圆心 $O(0,0)$,半径 $r=3$,圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=1<3$,所以

直线 l 与圆 O 相交,故B正确;对于C,根据题意画出图形,如图所示,直线恒过定点 $A(2,4)$,曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 表示以 $(0,1)$ 为圆心,半径 $r=2$ 的上半圆,当直线与半圆相切时,圆心到直线的距离 $d=r$,即 $\frac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得 $k=\frac{5}{12}$,当直线过 $B(-2,1)$

时,直线的斜率 $k=\frac{4-1}{2-(-2)}=\frac{3}{4}$,所以直线与曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 有两个不同的交点时,实数 k 的取值范围为 $\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right]$,故C正确;对于D,当 $a=1$,即直线 l_1 的斜率不存在时,此时 $l_1:x=1$,不过第三象限.当 $a\neq 1$ 时, $l_1:y=\frac{a}{a-1}x-\frac{1}{a-1}$,不经过第三

象限,则 $\begin{cases} \frac{a}{a-1}\leq 0, \\ -\frac{1}{a-1}>0, \end{cases}$ 解得 $0\leq a<1$.综上所述,实

数 a 的取值范围是 $0\leq a\leq 1$,故D错误.



4.7 解析:因为两圆 $O_1: (x+2)^2 + y^2 = 1$, $O_2: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 是相离的, 所以与两圆都相切且半径为 3 的情况如下: 与两圆都内切的有 1 个, 以原点为圆心, 即 $x^2 + y^2 = 9$. 与两圆都外切的有 2 个, 设圆心为 $(0, b)$, 则 $\sqrt{(0-2)^2 + b^2} = 3 + 1 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3}$, 所以 $x^2 + (y \pm 2\sqrt{3})^2 = 9$. 同理可得, 利用圆与圆的圆心距和半径的关系可得与圆 O_1 外切与圆 O_2 内切的圆有 2 个, 与圆 O_1 内切与圆 O_2 外切的圆有 2 个. 综上所述, 共 7 个圆.

5. 解: (1) 圆 C 的圆心为 $(3, 4)$, 半径为 $\sqrt{36-m}$,

若圆 C 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外切,

则两圆的圆心距等于两圆半径之和,

$$\text{故 } \sqrt{3^2 + 4^2} = 1 + \sqrt{36-m},$$

解得 $m = 20$.

(2) 圆 C 的圆心到直线 $x + y - 3 = 0$ 的距离为 $d =$

$$\frac{|3+4-3|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{由垂径定理得 } \left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2 = (\sqrt{36-m})^2 - d^2,$$

解得 $m = 8$.

6. 解: (1) 当直线的斜率不存在时, 直线方程为 $x = 3$.

显然直线 $x = 3$ 与圆 C 相切.

当直线的斜率存在时, 设切线方程为 $y + 3 = m(x - 3)$,

圆心到直线的距离等于半径,

$$\text{即 } \frac{|-2m-3|}{\sqrt{1+m^2}} = 2, \text{ 解得 } m = -\frac{5}{12},$$

切线方程为 $5x + 12y + 21 = 0$.

综上所述, 过点 $M(3, -3)$ 且与圆 C 相切的直线方程为 $x = 3$ 或 $5x + 12y + 21 = 0$.

(2) 因为圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$,

$$\text{圆 } Q: x^2 + y^2 - 4x + 2ay + a^2 = 0,$$

相减得圆 C 与圆 Q 的公共弦所在直线 l 的方程为:

$$2ay - 2x + a^2 + 3 = 0,$$

圆 C 的圆心为 $(1, 0)$, $r = 2$,

设圆心 $(1, 0)$ 到直线 l 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|-2+a^2+3|}{\sqrt{(2a)^2 + (-2)^2}},$$

又 $\because$ 圆 C 与圆 Q 公共弦长为 $\sqrt{14}$,

$$\therefore d^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 = r^2,$$

$$\text{即 } \frac{(a^2+1)^2}{4a^2+4} + \frac{7}{2} = 4,$$

解得 $a = \pm 1$,

$$\therefore \text{圆 } Q \text{ 的方程为 } x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

易错辨析

解: 设所求圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 16$,

由所求圆与直线 $y = 0$ 相切, 半径为 4,

得圆心 C 的坐标为 $(a, 4)$ 或 $(a, -4)$.

易知圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 的圆心 $A(2, 1)$, 半径为 3.

由两圆相切, 得 $|CA| = 4 + 3 = 7$ 或 $|CA| = 4 - 3 = 1$.

①当圆心 C 的坐标为 $(a, 4)$ 时, $(a-2)^2 + (4-1)^2 = 7^2$ 或 $(a-2)^2 + (4-1)^2 = 1^2$ (无解),

解得 $a = 2 \pm 2\sqrt{10}$,

故所求圆的方程为 $(x-2-2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$

或 $(x-2+2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$.

②当圆心 C 的坐标为 $(a, -4)$ 时, $(a-2)^2 + (-4-1)^2 = 7^2$ 或 $(a-2)^2 + (-4-1)^2 = 1^2$ (无解),

解得 $a = 2 \pm 2\sqrt{6}$,

故所求圆的方程为 $(x-2-2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16$

或 $(x-2+2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16$.

综上所述, 所求圆的方程为 $(x-2-2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$ 或 $(x-2+2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$ 或 $(x-2-2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16$ 或 $(x-2+2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16$.

滚动卷(四) 小测试(十七)至(二十)

综合拔高

1. C 解析: 由直线 $x + y - 3 = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 所

得劣弧所对的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 令劣弧的两个端点为

A, B , 圆心为 O , 则 $\triangle OAB$ 为正三角形, 圆心 O 到直线 $AB: x + y - 3 = 0$ 的距离为正三角形 OAB 的高

$\frac{\sqrt{3}}{2}r$, 因此 $\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{3}{\sqrt{1^2+1^2}}$, 解得 $r = \sqrt{6}$, 所以 r 的值

为 $\sqrt{6}$.

2. C 解析: 根据题意, 过点 P 向圆 $C: (x-2)^2 + (y-$

$3)^2 = 5$ 引切线, 设切点为 T , 圆 $C: (x-2)^2 + (y-$

$3)^2 = 5$, 圆心 $C(2, 3)$, 半径 $r = \sqrt{5}$, 则 $|PT|^2 =$

$|PC|^2 - 5$. 若切线长最小, 必有 $|PC|$ 最小, 而 $|PC|$ 的最小值为圆心 C 到直线 $y = x + 6$ 的距离, 即 $|PC|_{\min} = \frac{|2-3+6|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, 则 $|PT|_{\min} = \sqrt{\frac{25}{2} - 5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

3. A 解析: 根据题意, 圆 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$, 即 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$, 其圆心为 $(-1, -1)$, 半径 $r = \sqrt{2}$. 若直线 $y = mx + 1$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ 相交于 A, B 两点, 且 $AC \perp BC$, 则 C 到直线 AB 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$, $\therefore \frac{|-m+1+1|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$, 解得 $m = \frac{3}{4}$.

4. D 解析: 根据题意, 圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$, 圆心 $C(1, -2)$, 而点 $M(2, -4)$, 则有 $(2-1)^2 + (-4+2)^2 = 5$, 所以点 M 在圆 C 上. 若过点 M 的切线与直线 $m: ax - 2y + 3 = 0$ 垂直, 则直线 CM 与直线 m 平行, 而直线 CM 的斜率 $k = \frac{(-4)-(-2)}{2-1} = -2$, 则有 $\frac{a}{-2} = -2$, 所以 $a = -4$.

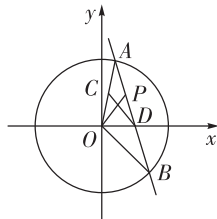
5. AC 解析: 圆 C 的方程可化为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$, 可知圆心 C 为 $(2, 2)$, 半径为 $2\sqrt{2}$. 若圆 C 上存在 4 个点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$, 则圆心 $C(2, 2)$ 到直线 $x - y + m = 0$ 的距离 $d < \sqrt{2}$, 即 $\frac{|2-2+m|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, 解得 $-2 < m < 2$, 则实数 m 的取值可能是 $-1, 0$.

6. $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 解析: 设 $M(x, y)$, 根据题意得到方程 $x^2 + y^2 = 4[(x-3)^2 + y^2]$, 化简得 $(x-4)^2 + y^2 = 4$.

7. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 1$ $5\sqrt{2} - 2$ 解析: 因为圆 $C_1: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$, 所以圆心坐标为 $C_1(-2, 3)$, 半径为 1. 因为圆心 $C_1(-2, 3)$ 关于 x 轴的对称点为 $C_1'(-2, -3)$, 所以圆 C_1 关于 x 轴的对称圆的方程为 $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 1$. 由题意, 设动点 M 关于 x 轴的对称点为 M' , 则 M' 在圆 C_1 的对称圆上, 所以 $|PM| + |PN| = |PM'| + |PN| \geq |C_1'C_2| - 1 - 1 = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} - 2 = 5\sqrt{2} - 2$.

8. $4\sqrt{3}$ 解析: 直线 l 的方程可化为 $m(x-y) + y -$

$1 = 0$, 由 $\begin{cases} x-y=0, \\ y-1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ 即直线 l 恒过定点 $P(1, 1)$. 如图所示, 连接 OP . $\because C, D$ 分别为 OA, AB 的中点, $\therefore |CD| = \frac{1}{2} |OB| = \sqrt{2}$. 当 $OP \perp AB$ 时, $|AB|$ 最小, 此时 $|AB| = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$, $\therefore |AB| \cdot |CD| = \sqrt{2} |AB| \geq \sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3}$.



9. 解: (1) 由题意得 A 在圆外, 过 A 的圆 O 的切线的斜率存在,

设切线方程为 $y = kx + 2$,

即 $kx - y + 2 = 0$.

圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 $r = 1$,

圆心 $(0, 0)$ 到直线 $kx - y + 2 = 0$ 的距离为

$$\frac{2}{\sqrt{1+k^2}} = 1,$$

解得 $k = \pm\sqrt{3}$.

所以切线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x + 2$.

(2) 设 $P(x, y)$, 则 $x^2 + y^2 = 1$,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = (x, y) \cdot (x, y-2) = x^2 + y^2 - 2y = 1 - 2y,$$

因为 $-1 \leq y \leq 1$,

所以 $-2 \leq -2y \leq 2$,

所以 $-1 \leq 1 - 2y \leq 3$,

所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 $[-1, 3]$.

10. 解: (1) 设动点 $M(x, y)$,

$$\text{根据题意得 } \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } 4[(x+1)^2 + y^2] = (x-2)^2 + y^2,$$

$$\text{整理得 } 3x^2 + 3y^2 + 12x = 0,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 + 4x = 0,$$

$$\text{即 } (x+2)^2 + y^2 = 4,$$

所以动点 M 的轨迹方程为 $(x+2)^2 + y^2 = 4$.

(2) $\frac{y}{x-2}$ 表示曲线 C 上的点 (x, y) 与点 $(2, 0)$ 连线的斜率,

由圆的性质可知相切的时候取得最值.

设过点 $(2, 0)$ 的圆的切线方程为 $y = k(x-2)$,

圆心到直线的距离 $d = \frac{|-4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$,

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\frac{y}{x-2}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

素养提升

1. C 解析: 两圆外离, 则 $\sqrt{(2-a)^2 + (3-4)^2} > 2 + 4$, 整理得 $(a-2)^2 > 35$. 设与圆 C_1 相切的直线 l_1 的方程为 $y = kx (k > 0)$, 则 $\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 解得 $k = \frac{5}{12}$.

所以与圆 C_2 相切的直线 l_2 的斜率 $k' = -\frac{1}{k} = -\frac{12}{5}$, 则直线 l_2 的方程为 $y = -\frac{12}{5}x$, 即 $12x + 5y =$

0. 由直线 l_2 与圆 C_2 相切, 得 $\frac{|12a+20|}{\sqrt{12^2+5^2}} = 4$, 解得

$a = -6$ 或 $a = \frac{8}{3}$, 结合 $(a-2)^2 > 35$ 可知 $a = -6$.

2. C 解析: 对于①, 点 M 到直线 $y = x + 1$ 的距离 $d_1 = \frac{|5-0+1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} > 4$, 故不存在点 P 使

$|PM| \leq 4$; 对于②, 点 M 到直线 $y = 2$ 的距离 $d_2 = 2 < 4$, 故存在点 P 使 $|PM| \leq 4$; 对于③, 直线方程为 $4x - 3y = 0$, 点 M 到直线 $4x - 3y = 0$ 的距离 $d_3 = \frac{|5 \times 4 - 3 \times 0|}{5} = 4$, 故存在点 P 使 $|PM| \leq 4$; 对于

④, 点 M 到直线 $y = 2x + 1$ 的距离 $d_4 = \frac{|2 \times 5 - 0 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}} > 4$, 故不存在点 P 使 $|PM| \leq$

4. 综上可知符合条件的有②③.

3. B 解析: 圆 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 10 = 0$ 可化为 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 18$, 则圆心为 $(-2, 2)$, 半径为 $3\sqrt{2}$.

因为该圆上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 所以圆心 $(-2, 2)$ 到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离 $d \leq 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, 即 $\frac{|-2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{2}$, 所以 $a^2 + b^2 - 4ab \leq 0$. 若 $b = 0$, 则

$a = 0$, 不满足题意, 故 $b \neq 0$, 所以 $1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4 \times$

$\frac{a}{b} \leq 0$. 因为直线 $l: ax + by = 0$ 的斜率 $k = -\frac{a}{b}$, 所

以 $k^2 + 4k + 1 \leq 0$, 解得 $-2 - \sqrt{3} \leq k \leq -2 + \sqrt{3}$.

4. 2 解析: 点 $(0, 0)$ 关于直线 $l: x - y + 1 = 0$ 的对称

点为 $B(-1, 1)$, 所以虫子爬行的最短路程是 $|AB| = 2$.

5. (1) 证明: 连接 OQ, OP ,

由 $|PQ| = |PT|$, 得 $|OP|^2 - 1 = |PQ|^2 = |PT|^2$, 所以 $3m + 2n - 7 = 0$,

即动点 P 在定直线 $3x + 2y - 7 = 0$ 上.

(2) 解: 由 $|PQ|^2 = |OP|^2 - 1$, 知要使 $|PQ|$ 最小, 则 $|OP|$ 取最小值即可.

由(1)知点 P 在直线 $3x + 2y - 7 = 0$ 上,

所以 $|OP|_{\min} = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$,

所以 $|PQ|_{\min} = \sqrt{\frac{49}{13} - 1} = \frac{6}{13}\sqrt{13}$.

此时直线 OP 的方程为 $2x - 3y = 0$.

联立 $\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0, \\ 2x - 3y = 0, \end{cases}$ 解得点 $P\left(\frac{21}{13}, \frac{14}{13}\right)$.

6. 解: (1) $\because$ 圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + mx + ny + 4 = 0$,

即 $\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2 - 16)$,

$\therefore$ 圆心 $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$,

又圆 C 关于直线 $x + y + 1 = 0$ 对称,

$\therefore$ 圆心 $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$ 在直线 $x + y + 1 = 0$ 上,

$\therefore -\frac{m}{2} - \frac{n}{2} + 1 = 0 \Rightarrow m + n = 2$.

又圆 C 的半径为 1,

$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 16} = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 20$,

联立 $\begin{cases} m + n = 2, \\ m^2 + n^2 = 20, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m = 4, \\ n = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = -2, \\ n = 4, \end{cases}$

又圆心 C 在第四象限,

$\therefore \begin{cases} m = -2, \\ n = 4, \end{cases}$

$\therefore C(1, -2)$,

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

(2) $\because$ 直径所对的圆周角为直角, $OA \perp AC, OB \perp BC$,

$\therefore$ 点 A, B 在以 OC 为直径的圆上, 且圆心为 OC 的中点,

记为 $Q\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, 半径 $r = \frac{\sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

∴圆Q的标准方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$,

又点A,B在圆C上,

$$\text{联立} \begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=1, \\ (x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}, \end{cases}$$

两个方程相减得直线AB的方程为 $x-2y-4=0$,
点C(1,-2)到直线AB的距离 $d=$

$$\frac{|1+4-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore |AB|=2\sqrt{1^2-d^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

小测试(二十一) 椭圆及其标准方程

预习自评

1. D 2. A 3. D

基础过关

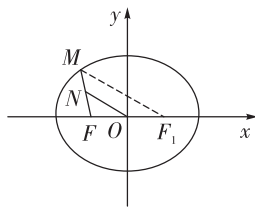
1. C 解析:因为椭圆的方程为 $\frac{y^2}{3}+x^2=1$,所以 $c=\sqrt{2}$,且焦点在y轴上,所以焦点坐标为 $(0,\sqrt{2})$,
 $(0,-\sqrt{2})$.

2. C 解析:由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的方程可得 $a=5$,不妨设左焦点为 F_1 ,右焦点为 F_2 ,由椭圆的定义可得
 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$.若 $|PF_1|=3$,则 $|PF_2|=7$.

3. A 解析:由方程 $\frac{x^2}{m^2}+y^2=1$ 表示焦点在x轴上的椭圆可得 $m^2>1$,解得 $m<-1$ 或 $m>1$,∴“ $m>1$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m^2}+y^2=1$ 表示焦点在x轴上的椭圆”的充分不必要条件.

4. C 解析:由题意得 $2c=2$,即 $c=1$.当焦点在x轴上时, $a^2=m$, $b^2=4$,因为 $a^2=b^2+c^2$,所以 $m=4+1=5$;当焦点在y轴上时, $a^2=4$, $b^2=m$,因为 $a^2=b^2+c^2$,所以 $4=m+1$,解得 $m=3$.综上所述, $m=3$ 或 $m=5$.

5. C 解析:如图所示,不妨设焦点F为左焦点,右焦点为 F_1 ,连接 MF_1 .因为N是MF的中点,O是 FF_1 的中点,故ON是三角形MFF₁的中位线,故
 $ON=\frac{1}{2}MF_1$.由 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ 得 $a=6$,由椭圆的定义可知: $MF+MF_1=2a=12$.因为 $MF=4$,所以
 $MF_1=8$,故 $ON=\frac{1}{2}MF_1=4$.



6. $(-3,1) \cup (1,5)$ 解析:因为方程 $\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{m+3}=1$

$$\text{表示椭圆,所以} \begin{cases} 5-m>0, \\ m+3>0, \\ 5-m \neq m+3, \end{cases} \text{解得} -3<m<1 \text{ 或}$$

$1<m<5$,即m的取值范围为 $(-3,1) \cup (1,5)$.

7. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{49}=1(x \neq 0)$ 解析:∵△ABC的周长为20,
且顶点 $B(0,-3), C(0,3)$,∴ $|BC|=6, |AB|+|AC|=14>6$,∴点A到两个定点的距离之和为定值,∴点A的轨迹是焦点在y轴上的椭圆, $2a=14 \Rightarrow a=7, c=3, b^2=a^2-c^2=49-9=40$,故顶点A的
轨迹方程是 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{49}=1(x \neq 0)$.

8. 解:因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{2}$,

所以 $c=\sqrt{2}$,

P是C上一点,由椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,

又 $|PF_1|-|PF_2|=a$,

$$\text{所以} |PF_1|=\frac{3}{2}a, |PF_2|=\frac{a}{2},$$

$$\text{又} \sin \angle PF_1F_2=\frac{1}{3},$$

$$\text{所以} \cos \angle PF_1F_2=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以在△PF₁F₂中,由余弦定理得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1| \cdot |F_1F_2| \cdot \cos \angle PF_1F_2$,

$$\text{即} \left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2+8-2 \times \frac{3a}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

整理得 $a^2-4a+4=0$,解得 $a=2$,

所以 $b^2=a^2-c^2=2$,

所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

素养提升

1. B 解析:由 $5x^2+ky^2=5$,得 $x^2+\frac{y^2}{\frac{5}{k}}=1$,因为一个

焦点是 $(0,2)$,在y轴上,故 $\frac{5}{k}-1=2^2$,解得 $k=1$.

2. ACD 解析: 设椭圆的左焦点为 F' , 则 $|AF'| = |BF|$, 所以 $|AF| + |BF| = |AF| + |AF'| = 6$, 为定值, A 正确; $\triangle ABF$ 周长为 $|AB| + |AF| + |BF|$, 因为 $|AF| + |BF|$ 为定值 6, $|AB|$ 的取值范围是 $(0, 6)$, 所以 $\triangle ABF$ 的周长的取值范围是 $(6, 12)$, B 错误; 将 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 与椭圆方程联立, 解得 $A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 又因为 $F(\sqrt{6}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF} = \left(\sqrt{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{6} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$, 所以 $\triangle ABF$ 为直角三角形, C 正确; 将 $y = 1$ 与椭圆方程联立, 解得 $A(-\sqrt{6}, 1), B(\sqrt{6}, 1)$, 所以 $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 1 = \sqrt{6}$, D 正确.

3. B 解析: 由 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 得 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4a^2$. 又因为 $PF_1 \perp PF_2$, 所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2 = 20$. 由 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 20, |PF_1| \cdot |PF_2| = 8$, 得 $4a^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 20 + 16 = 36$. 所以 $a^2 = 9, a = 3$. 又 $c = \sqrt{5}$, 所以 $b = 2$. 因为椭圆的焦点在 y 轴上, 所以椭圆的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 解析: 因为线段 AQ 的垂直平分线与 CQ 的连线交于点 M , 所以 $|MQ| = |MA|$. 而 $|MQ| + |MC| = |CQ| = 6$, 因此 $|MA| + |MC| = 6$, 而 $|AC| = 2 < 6$, 所以 M 的轨迹是以 A, C 为焦点的椭圆, 可得 $a = 3, c = 1$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{2}$, 因此 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

5. 解: 由题意可得 $S_{\triangle F_1 F_2 A} = 2S_{\triangle F_1 F_2 B}$,
 $\therefore |F_2 A| = 2|F_2 B|$,
 由椭圆的定义得 $|F_1 B| + |F_2 B| = |F_1 A| + |F_2 A| = 2a$,
 设 $|F_2 A| = 2|F_2 B| = 2m$,
 在 $\triangle F_1 F_2 B$ 中, 由余弦定理得 $(2a - m)^2 = 4c^2 + m^2 - 2 \times 2c \cdot m \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$,
 $\therefore m = \frac{2(a^2 - c^2)}{2a + c}$.
 在 $\triangle F_1 F_2 A$ 中, 同理可得 $m = \frac{a^2 - c^2}{2a - c}$.

$\therefore \frac{2(a^2 - c^2)}{2a + c} = \frac{a^2 - c^2}{2a - c}$,
 解得 $2a = 3c$, 可得 $m = \frac{5c}{8}$,
 $\therefore |AB| = 3m = \frac{15c}{8} = \frac{15}{2}$,
 $\therefore c = 4$.
 由 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, 得 $a = 6$,
 $\therefore b^2 = 20$,
 $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

6. 解: (1) 因为 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点,
 所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 4$ ①,
 又因为 $5a^2 = 9b^2$ ②,
 所以由①②可得 $a^2 = 9, b^2 = 5$,
 所以此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.
 (2) 设 $|PF_1| = m, |PF_2| = n (m > 0, n > 0)$,
 由椭圆的定义可知 $m + n = 2a = 6$ ③,
 在 $\triangle F_1 P F_2$ 中, 由余弦定理得 $m^2 + n^2 - 2mn \cos \frac{\pi}{3} = (2c)^2$,
 即 $m^2 + n^2 - mn = 16$ ④.
 由③④式可得 $mn = \frac{20}{3}$,

所以 $S_{\triangle F_1 P F_2} = \frac{1}{2} mn \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,
 即 $\triangle F_1 P F_2$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

易错辨析

AB 解析: 当椭圆的焦点在 x 轴上时, $0 < m < 16$, 焦距 $2c = 2\sqrt{16 - m} = 2\sqrt{7}$, 解得 $m = 9$; 当椭圆的焦点在 y 轴上时, $m > 16$, 焦距 $2c = 2\sqrt{m - 16} = 2\sqrt{7}$, 解得 $m = 23$. 故选 AB.

小测试(二十二) 椭圆的简单几何性质

预习自评

1. A 2. CD 3. A

基础过关

1. D 解析: 由椭圆的性质可知 $4a = 8\sqrt{3}$, 即 $a = 2\sqrt{3}$.
 由椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $c = 2$, $\therefore b^2 = a^2 -$

$c^2=12-4=8$, $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

2. C 解析: 由题意得 $\begin{cases} 2c=4, \\ e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ c=2, \end{cases}$ 所以

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$. 当焦点在 x 轴上时, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$;

当焦点在 y 轴上时, $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3. B 解析: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{x^2}{4} +$

$\frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 离心率不同, A 错

误; $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的焦点为 $(\pm 1, 0)$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦

点为 $(\pm 1, 0)$, 焦点相同, B 正确; $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的顶

点为 $(\pm \sqrt{3}, 0), (0, \pm 2)$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的顶点为

$(\pm 2, 0), (0, \pm \sqrt{3})$, 顶点不同, C 错误; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 离心率不同, D 错误.

4. B 解析: 因为离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, 设 $a = 3k (k >$

$0)$, 则 $c = 2k$, 短轴长为 $2b = 4\sqrt{5}$, $\therefore b = 2\sqrt{5}$. $\because b^2 =$

$a^2 - c^2$, $\therefore 20 = 9k^2 - 4k^2 = 5k^2$, $\therefore k = 2$, $\therefore a = 6$,

$\therefore \triangle ABF_2$ 的周长 $= |AB| + |AF_2| + |BF_2| =$

$|AF_1| + |BF_1| + |AF_2| + |BF_2| = (|AF_1| +$

$|AF_2|) + (|BF_1| + |BF_2|) = 2a + 2a = 4a = 24$.

5. C 解析: 依题意可知 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, $|F_1F_2| =$

$2c$, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, $\therefore |PF_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2| = \sqrt{3}c$,

$|PF_2| = \frac{1}{2} |F_1F_2| = c$. 由椭圆定义可知 $|PF_1| +$

$|PF_2| = 2a = (\sqrt{3} + 1)c$, $\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$.

6. 25 解析: 易知 $2c = 8$, 则 $c = 4$. 由于椭圆的长半轴

长大于半焦距, 所以 $b = 3$, 则长半轴长为

$\sqrt{b^2 + c^2} = 5$, 故 $a = 5^2 = 25$.

7. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 解析: 对于直线 $x + 2y - 2 = 0$, 令

$b = 1, a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{5}$, 故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} +$

$y^2 = 1$.

8. 解: (1) 设椭圆 C 的焦距为 $2c$,

根据题意有 $c = 1$,

由 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 可得 $a = 2$,

则 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设点 P 的坐标为 (m, n) ,

由 $\triangle OPF$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{2} |n| = \frac{1}{2}$,

即 $n = \pm 1$,

由 $\frac{m^2}{4} + \frac{1}{3} = 1$, 得 $m = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

故点 P 的坐标为 $(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -1)$ 或 $(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1)$ 或

$(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -1)$ 或 $(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1)$.

素养提升

1. A 解析: 由题意知 $\triangle F_1PF_2$ 中, 内切圆半径 $r =$

$\frac{|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2|}{2} = a - c = 1$. 又离心率为

$\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$, 解得 $a = 4, c = 3$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 7$, 所以

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

2. D 解析: 由题意知, $F_1(-c, 0), A(a, 0), B(0, 1)$,

则点 $P(-c, \frac{1}{a})$. 所以直线 BA 的斜率为 $k_{BA} =$

$-\frac{1}{a}$, 直线 PO 的斜率为 $k_{PO} = \frac{1}{-c} = -\frac{1}{ac}$. 由

$BA \parallel PO$, 得 $k_{BA} = k_{PO}$. 所以 $-\frac{1}{a} = -\frac{1}{ac}$, 即 $c = 1$.

所以焦距为 $2c = 2$.

3. D 解析: 不妨设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >$

$0)$, c 为半焦距, F 为右焦点. 因为 $\triangle AOF$ 是正三角

形, 且 $F(c, 0)$, 故 $A(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}c)$, 故 $\frac{c^2}{4a^2} + \frac{3c^2}{4b^2} = 1$, 则

$\frac{e^2}{4} + \frac{3e^2}{4(1-e^2)} = 1$, 整理, 得 $e^4 - 8e^2 + 4 = 0$, 故 $e =$

$\sqrt{3} - 1$.

4. 32 解析: 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{36} = 1$, 当点 $(4\sqrt{7},$

4.5)在椭圆上时, $\frac{(4\sqrt{7})^2}{a^2} + \frac{(\frac{9}{2})^2}{36} = 1$, 解得 $a =$

16. 因为车辆高度不超过 4.5 m, 所以 $a \geq 16$, $d = 2a \geq 32$, 即拱宽至少应是 32 m.

5. 解: (1) 设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{由题意得} \begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{解得 } c=1,$$

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\text{所以椭圆 C 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

直线 l 的方程为 $y = x + t$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = x + t, \end{cases} \text{得 } 7x^2 + 8tx + 4(t^2 - 3) = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 64t^2 - 112(t^2 - 3) > 0, \text{得 } 0 \leq t^2 < 7,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{8}{7}t, x_1 x_2 = \frac{4(t^2 - 3)}{7},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |PQ| &= \sqrt{1+t^2} |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8}{7}t\right)^2 - 4 \cdot \frac{4(t^2 - 3)}{7}} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{7} \cdot \sqrt{7 - t^2}. \end{aligned}$$

$$\text{又 } 0 \leq t^2 < 7,$$

$$\text{故当 } t=0 \text{ 时, } |PQ|_{\max} = \frac{4\sqrt{42}}{7}.$$

6. 解: (1) 依题意得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$,

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

$$\text{解得 } a=2, b=1,$$

$$\text{故椭圆 C 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 因为点 P 在椭圆上,

$$\text{由椭圆定义得 } |PF_1| + |PF_2| = 2a = 4,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 4, \\ |PF_1| - |PF_2| = 2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} |PF_1| = 3, \\ |PF_2| = 1, \end{cases}$$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle F_1PF_2 =$

$$\frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} = -\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} &= |\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| \cos \angle F_1PF_2 = \\ &= 3 \times 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1. \end{aligned}$$

易错辨析

C 解析: 由题知 $a = \sqrt{2}, b = c = 1$. 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{PF_1} = (-1 - x_0, -y_0), \overrightarrow{PF_2} = (1 - x_0, -y_0)$, $\therefore \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2} = (-2x_0, -2y_0), \therefore |\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = \sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2} = 2\sqrt{2 - 2y_0^2 + y_0^2} = 2\sqrt{-y_0^2 + 2}$. $\therefore$ 点 P 在椭圆上, $\therefore 0 \leq y_0^2 \leq 1, \therefore$ 当 $y_0^2 = 1$ 时, $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|$ 取得最小值 2. 故选 C.

小测试(二十三) 直线与椭圆的位置关系

预习自评

1. A 2. A 3. A

基础过关

1. A 解析: 根据题意得直线 $x + my + 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 过定点 $(-1, 0)$, 因为点 $(-1, 0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 内, 所以直线 $x + my + 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的位置关系是相交.

2. B 解析: 直线与坐标轴的交点分别为左焦点 $(-1, 0)$, 上顶点 $(0, 2)$, 即 $c=1, b=2$, 故 $a^2=5$, 则所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, 故选 B.

3. A 解析: 由椭圆的对称性可知, $|AF_1| = |BF_1|$, 所以 $|AF_1| + |BF_2| = |BF_1| + |BF_2| = 2a$, 又椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$, 所以 $a^2 = 4$, 解得 $a = 2$, 所以 $|AF_1| + |BF_2| = 4$. 故选 A.

4. C 解析: 设直线 l 被椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 所截得的线段为 $AB, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 $(1, 1), \therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2, \frac{x_1^2}{36} + \frac{y_1^2}{9} = 1, \frac{x_2^2}{36} + \frac{y_2^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{36} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{9} = 0 \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{4}$, 即直线 l 的斜率是 $-\frac{1}{4}$.

5. B 解析: 设 $P(x_0, y_0), \therefore F_1, F_2$ 分别为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 为椭圆上任意一点, $\therefore F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0), \overrightarrow{PF_1} = (-\sqrt{5} - x_0,$

$-y_0), \overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{5} - x_0, -y_0), \therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -1,$
 $\therefore (-\sqrt{5} - x_0) \cdot (\sqrt{5} - x_0) + (-y_0)^2 = -1,$ 即 $x_0^2 + y_0^2 = 4$ ①. 又 $\because P(x_0, y_0)$ 为椭圆上任意一点, $\therefore \frac{x_0^2}{9} +$

$\frac{y_0^2}{4} = 1$ ②, 联立 ①② 得 $\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = -2, \end{cases} \therefore$ 使得

$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -1$ 成立的点 P 的个数为 2.

6. $2\sqrt{5}$ 解析: 由直线 $l: x+2y-4=0$ 与椭圆 $C: x^2+4y^2=16$ 交于 A, B 两点, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

由 $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ x^2+4y^2=16, \end{cases}$ 得 $x^2-4x=0,$ 则 $x_1+x_2=4,$

$x_1 \cdot x_2 = 0,$ 弦长 $|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]} =$

$\sqrt{\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] \times 4^2} = 2\sqrt{5}.$

7. $\frac{3}{5}$ 解析: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), MN$ 的中点为

$P(x_0, y_0),$ 则 $\begin{cases} \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{y_2^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 两式相减得 $b^2(y_1^2 -$

$y_2^2) + a^2(x_1^2 - x_2^2) = 0,$ 所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot$

$\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right),$ 即 $k_{MN} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{k_{OP}}.$ 因为 $k_{MN} = -\frac{5}{4},$

$k_{OP} = \frac{5}{4},$ 所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{25},$ 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{5}.$

8. 解: (1) 由题意, 得 $2a=4, a=2,$

又 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 是椭圆 C 上的点,

所以 $\frac{1}{4} + \frac{9}{b^2} = 1,$

解得 $b=\sqrt{3},$

所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-3} = 1,$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$ 焦点坐标为 $(\pm 1, 0).$

(2) 联立直线 $y = x + m$ 与椭圆 C 的方

程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = x + m, \end{cases}$

消去 $y,$ 整理得 $7x^2 + 8mx + 4m^2 - 12 = 0,$

要使直线 $y = x + m$ 与椭圆 C 有两个不同的交点,

则需 $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 7 \times (4m^2 - 12) = 16(21 - 3m^2) > 0,$

解得 $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7},$

所以 m 的取值范围为 $(-\sqrt{7}, \sqrt{7}).$

素养提升

1. A 解析: 因为直线 $mx + ny = 4$ 和圆 $x^2 + y^2 = 4$ 没

有交点, 所以 $\frac{4}{\sqrt{m^2 + n^2}} > 2,$ 所以 $m^2 + n^2 < 4,$ 所以

点 $P(m, n)$ 在以原点为圆心、2 为半径的圆内. 因为椭圆的长半轴长为 3, 短半轴长为 2, 所以圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内切于椭圆, 所以点 $P(m, n)$ 在椭圆内, 则过

点 $P(m, n)$ 的直线与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的交点个数为

2. 故选 A.

2. A 解析: 由题意知外层椭圆方程为 $\frac{x^2}{(ma)^2} +$

$\frac{y^2}{(mb)^2} = 1, A(ma, 0), B(0, mb).$ 设切线 AC 的方程

为 $y = k_1(x - ma),$ 代入内层椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ 消去

y 得 $(k_1^2 a^2 + b^2)x^2 - 2mk_1^2 a^3 x + m^2 k_1^2 a^4 - a^2 b^2 = 0,$

由 $\Delta = 4m^2 k_1^4 a^6 - 4(k_1^2 a^2 + b^2) \cdot (m^2 k_1^2 a^4 - a^2 b^2) =$

$0,$ 化简得 $k_1^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{m^2 - 1}.$ 同理得 $k_2^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (m^2 -$

$1).$ 所以 $k_1^2 k_2^2 = \frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^4,$ 所以 $\frac{b}{a} = \frac{4}{5},$ 则 $e =$

$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{3}{5}.$

3. ABC 解析: 对于 A, 根据椭圆的对称性可知

$OF_1 = OF_2, OA = OB,$ 故四边形 AF_1BF_2 为平行四边形, 故 A 正确; 对于 B, 根据椭圆的性质, 当 P 在

上、下顶点时, $OP = b = \sqrt{2} = c,$ 此时 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ.$

由题意可知 P 不可能在上、下顶点, 故 $\angle F_1PF_2 <$

$90^\circ,$ 故 B 正确; 对于 C, 如图, 设 B 在第一象限, 作

$BD \perp x$ 轴, 垂足为 $D,$ 则直线 BE 的斜率为 $\frac{BD}{ED} =$

$\frac{BD}{2OD} = \frac{1}{2}k,$ 故 C 正确; 对于 D, 设 $P(x_1, y_1), A(x_2,$

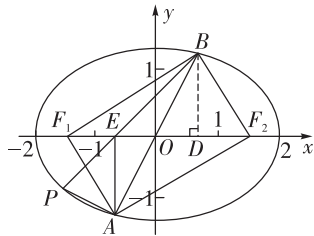
$y_2), B(-x_2, -y_2),$ 则 $k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot$

$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{2 - \frac{x_1^2}{2} - 2 + \frac{x_2^2}{2}}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{1}{2}.$ 又由选

项 C 可知直线 BP 的斜率为 $\frac{1}{2}k,$ 所以 $k_{AP} =$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{k}, \text{ 所以 } k_{AP} \cdot k_{AB} = -\frac{1}{k} \cdot k = -1, \text{ 所以 } \frac{1}{2}k$$

$AP \perp AB$, 即 $\angle PAB = 90^\circ$, 故 D 错误. 故选 ABC.



4. $\frac{4\sqrt{5}}{5}b$ 解析: 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$. 根据

$$\text{题意得 } \frac{y_0 - b}{x_0} \cdot \frac{-y_0 - b}{-x_0} = -\frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{由 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 故 } \frac{-b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}, \text{ 则}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \text{ (舍)}. \text{ 不妨取 } M(a, 0), \text{ 则直线}$$

QM 的方程为 $bx - ay - ab = 0$, 从而点 P 到直线

$$\text{QM 的距离 } d = \frac{|2ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2b}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}b.$$

5. 解: (1) 由题意设椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$(a > b > 0),$$

$$\text{则由题设知 } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4, b = 2,$$

$$\text{所以 } a^2 = 8, \text{ 即 } a = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } M \text{ 的长轴长为 } 2a = 4\sqrt{2}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知椭圆 } M \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x + 2, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 得 } 3x^2 + 8x = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3},$$

$$\text{则 } A(0, 2), B(-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}),$$

$$\text{故 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{4}{3}.$$

6. (1) 解: 依题意, 知 $2c = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

$$\text{解得 } c = 1, a = 2, b = \sqrt{3},$$

$$\text{所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 证明: 设右焦点为 $F(1, 0)$,

直线 l 的方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x - 1), \end{cases}$$

$$\text{得 } (4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{设 } P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P(x_0, y_0),$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3},$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4k^2}{4k^2 + 3},$$

$$y_0 = k(x_0 - 1) = -\frac{3k}{4k^2 + 3},$$

$$\text{所以直线 } OP \text{ 的斜率为 } k_{OP} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{3}{4k},$$

$$\text{所以 } k_{OP} \cdot k = -\frac{3}{4} \text{ 为常数},$$

即直线 l 与直线 OP 的斜率之积为常数.

小测试(二十四) 椭圆的简单几何性质的运用

预习自评

1. B 2. C

基础过关

1. A 解析: $\because \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \therefore$ 该椭圆的焦点为 $(-\sqrt{5},$

$$0), (\sqrt{5}, 0), \text{ 即 } c = \sqrt{5}, \therefore \text{ 要求椭圆经过点 } A(3,$$

$$-2), \text{ 将点 } A \text{ 代入 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 5} = 1, \text{ 得 } \frac{9}{a^2} + \frac{4}{a^2 - 5} =$$

$$1, \text{ 解得 } a^2 = 3 \text{ (舍去) 或 } a^2 = 15, \therefore \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

2. C 解析: 设所求椭圆方程为 $\frac{y^2}{25 - k} + \frac{x^2}{9 - k} = 1 (k <$

$$9), \text{ 将点 } (\sqrt{3}, -\sqrt{5}) \text{ 代入, 可得 } \frac{(-\sqrt{5})^2}{25 - k} + \frac{(\sqrt{3})^2}{9 - k} =$$

$$1, \text{ 解得 } k = 5 \text{ 或 } k = 21 \text{ (舍去)}, \text{ 故所求椭圆的标准方}$$

$$\text{程为 } \frac{y^2}{20} + \frac{x^2}{4} = 1.$$

3. C 解析: 因为 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9}$, 可得

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}. \text{ 若椭圆的焦点在 } x \text{ 轴上, 则 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{4 - k}{9} =$$

$$\frac{8}{9}, \text{ 解得 } k = -4; \text{ 若椭圆的焦点在 } y \text{ 轴上, 则 } \frac{b^2}{a^2} =$$

$$\frac{9}{4 - k} = \frac{8}{9}, \text{ 解得 } k = -\frac{49}{8}. \text{ 综上所述, } k = -4 \text{ 或}$$

$$k = -\frac{49}{8}.$$

4. A 解析: 不妨设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >$

0), A 为长轴的右端点, B 为长轴的左端点. 因为 $\angle CBA = 45^\circ$, $AB = 4$, $BC = \sqrt{2}$, 所以 $2a = 4$, $C(-1, 1)$ 或 $C(-1, -1)$, 所以 $a^2 = 4$, 于是 $\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = \frac{4}{3}$. 所以 $c = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 所以焦距 $2c = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

5. D 解析: 由于椭圆关于 y 轴对称, 且 $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 关于 y 轴对称, 故 P_3, P_4 必然同时在或同时不在椭圆上. 由于四点中恰有三点在椭圆上, 故 P_3, P_4 都在椭圆上. 假设 $P_1(1, 1)$ 在椭圆上, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. 因为 P_3, P_4 都在椭圆上, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$, 两个等式矛盾, 故 $P_1(1, 1)$ 不在椭圆上, 因此 $P_2(0, 1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 三个点在椭圆上, 故 $\frac{1}{b^2} = 1, \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 1$, 则 $a = 2$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: 由题意, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点为 $(2, 0)$, 可得 $c = 2$. 又由 $c^2 = a^2 - b^2$, 可得 $a^2 - 4 = 4$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$, 所以椭圆 C 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 解析: 依题意可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, 即 $a^2 = 3b^2$. 设椭圆上的点 (x, y) 到点 P 的距离为 d , 则 $d^2 = x^2 + (y - 4)^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2}) + y^2 - 8y + 16 = 3b^2(1 - \frac{y^2}{b^2}) + y^2 - 8y + 16 = -2(y + 2)^2 + 3b^2 + 24$. 因为点 (x, y) 在椭圆上, 所以 $-b \leq y \leq b$. 若 $b \geq 2$, 则当 $y = -2$ 时, d^2 有最大值, 于是 $3b^2 + 24 = 25$, 解得 $b = \frac{\sqrt{3}}{3} < 2$, 与 $b \geq 2$ 矛盾, 所以必有 $b < 2$, 此时当 $y = -b$ 时, d^2 有最大值, 所以 $-2(-b + 2)^2 + 3b^2 + 24 = 25$, 解得 $b = 1$ 或 $b = -9$ (舍去), 所以 $a^2 = 3$, 所以所求椭圆的方

程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

8. 解: (1) 由题意可得 $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 = 2^2, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases}$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases}$ 得 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 2 = 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = -2m, x_1 x_2 = 2m^2 - 2$,

$\therefore |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{4m^2 - 8m^2 + 8}$

$= \sqrt{5} \times \sqrt{2 - m^2}$

$= \sqrt{5}$,

解得 $m = \pm 1$.

素养提升

1. A 解析: 因为 $m > 2$, 所以 $m + \frac{4}{m} > 2\sqrt{m \cdot \frac{4}{m}} = 4$, 即 $|PF_1| + |PF_2| > 4 = |F_1 F_2|$, 所以点 P 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的椭圆.

2. C 解析: 因为线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 所以 $PF_2 \perp x$ 轴, $|PF_2| = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{4} = 1, |PF_1| = 2a - |PF_2| = 8 - 1 = 7$, 所以 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|} = \frac{1}{7}$.

3. D 解析: 由题意知, $B(0, b), F_2(c, 0), A(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{BF_2} = (c, -b), \overrightarrow{F_2 A} = (x_0 - c, y_0)$. 因为 $|BF_2| = 2|F_2 A|$, 所以 $(c, -b) = 2(x_0 - c, y_0)$, 解得 $x_0 = \frac{3}{2}c, y_0 = -\frac{b}{2}$, 代入椭圆方程可得, $\frac{(\frac{3}{2}c)^2}{a^2} + \frac{(-\frac{1}{2}b)^2}{b^2} = 1$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, 所以 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 (y \neq 0)$ 解析: 根据题意, 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G , 因为 AC, AB 边上的两条中线之和为 39, 所以 $|GB| + |GC| = \frac{2}{3} \times 39 = 26 > 24 = |BC|$. 根据椭圆定义可知, 点 G 的轨迹是以 B, C 为焦点的椭

圆,且 $a=13, c=12$, 因此 $\triangle ABC$ 的重心的轨迹方程为 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 (y \neq 0)$.

5. 解: (1) 由题意可知 $2c=4, b=2$,
所以 $b^2=4, c^2=4, a^2=b^2+c^2=8$,

所以椭圆 Ω 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由题意得} \begin{cases} \frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1, \\ \frac{x_2^2}{8} + \frac{y_2^2}{4} = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减,}$$

$$\text{得} \frac{x_1^2 - x_2^2}{8} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{4} = 0,$$

$$\text{即} \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{8} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{4} = 0,$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的斜率 } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{2(y_1 + y_2)}.$$

因为点 $P(-2, 1)$ 是线段 AB 的中点,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -4, y_1 + y_2 = 2,$$

$$\text{所以 } k = 1,$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y - 1 = x + 2, \text{ 即 } x - y + 3 = 0.$$

6. 解: (1) 设 $A(x_0, y_0)$, 又 AB, F_1F_2 互相平分且 A, F_1, B, F_2 四点共圆,

$\therefore AB, F_1F_2$ 是圆的直径且 O 是圆心,

$$\therefore x_0^2 + y_0^2 = 3, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} x_0,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{又 } b^2 = a^2 - 3,$$

$$\therefore b^2 = 1, a^2 = 4,$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 由(1)知, $F_2(\sqrt{3}, 0)$,

设 $P(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$,

直线 PM 为 $x = my + \sqrt{3}$,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}my - 1 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 16m^2 + 16 > 0,$$

$$\text{且 } y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 4},$$

$$\therefore (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \frac{16(m^2 + 1)}{(m^2 + 4)^2},$$

连接 MO ,

$$\text{则 } S_{\triangle OPM} = \frac{1}{2} |OF_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$$

$$\frac{4\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 4} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 + 1} + \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}}},$$

$$\therefore \sqrt{m^2 + 1} + \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} \geq 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OPM} \leq 1.$$

当且仅当 $m^2 = 2$ 时取等号,

$$\therefore S_{\triangle PMN} = 2S_{\triangle OPM} \leq 2,$$

故 $\triangle PMN$ 面积的最大值为 2.

小测试(二十五) 双曲线及其标准方程

预习自评

1. A 2. B 3. CD

基础过关

1. B 解析: $2a = |\sqrt{(-5+6)^2 + 2^2} - \sqrt{(-5-6)^2 + 2^2}| = 4\sqrt{5}$, 所以 $a = 2\sqrt{5}$. 又 $c = 6$,
所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 20 = 16$, 所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$.

2. B 解析: 由题意知 $(5-m)(m+3) < 0$, 即 $(m-5)(m+3) > 0$, 解得 $m > 5$ 或 $m < -3$.

3. C 解析: 方程可化为 $\frac{x^2}{\frac{m}{n}} + y^2 = 1$, 因为 $mn < 0$, 所以

$\frac{m}{n} < 0$, 所以方程表示焦点在 y 轴上的双曲线.

4. D 解析: 因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点在 x 轴上,
所以 $4 - a^2 = a^2 + 2$, 解得 $a = \pm 1$.

5. A 解析: 在双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 中, $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{3}$. 由双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2\sqrt{2}$, 又因为 $|PF_1| + |PF_2| = 6\sqrt{2}$, 则 $|PF_2| = 2\sqrt{2}$. 因为 O, M 分别为 F_1F_2, PF_1 的中点, 故 $|OM| = \frac{1}{2}|PF_2| = \sqrt{2}$.

6. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1$ 解析: 设双曲线的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1 (mn < 0)$, 因为所求双曲线经过点 $P(3, 2\sqrt{7})$,
 $Q(-6\sqrt{2}, 7)$, 所以 $\begin{cases} 9m + 28n = 1, \\ 72m + 49n = 1, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} m = -\frac{1}{75}, \\ n = \frac{1}{25}, \end{cases} \quad \text{故所求双曲线方程为 } \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1.$$

7. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x \leq -1)$ 解析: 定圆的圆心为 $C(3, 0)$, 与 $A(-3, 0)$ 关于原点对称. 设动圆 P 的半径为 r , 则有 $|PA| = r$. 因为两圆外切, 所以 $|PC| = 2 + r$, 即 $|PC| - |PA| = 2 < |AC| = 6$, 所以点 P 的轨迹是以 A, C 为焦点的双曲线的左支, 则 $a = 1, c = 3, b^2 = c^2 - a^2 = 8$, 所求轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x \leq -1)$.

8. 解: 由于 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$,

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理, 得

$$\cos 60^\circ = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{(|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1||PF_2| - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|},$$

$$\therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = 4(c^2 - a^2) = 4b^2.$$

$$\therefore S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin 60^\circ = 2b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}b^2.$$

$$\therefore \sqrt{3}b^2 = 12\sqrt{3}, \text{ 即 } b^2 = 12.$$

$$\text{由 } c = 2a, c^2 = a^2 + b^2, \text{ 得 } a^2 = 4.$$

$$\therefore \text{双曲线的标准方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

素养提升

1. D 解析: 因为 l 是线段 AP 的垂直平分线, 所以 $|QA| = |QP|$. 因为 $||QP| - |QO|| = r$, 所以 $||QA| - |QO|| = r < |AO|$, 所以点 Q 的轨迹是以点 A, O 为焦点的双曲线.

2. B 解析: $\because \sin A - \sin B = \frac{1}{2} \sin C$, 由正弦定理得

$$a - b = \frac{1}{2}c, \text{ 即 } |CB| - |CA| = 4 < 8 = |AB|. \text{ 由双曲线的定义可知, 点 } C \text{ 的轨迹是以 } A, B \text{ 为焦点的双曲线的左支, 且 } a' = 2, c' = 4, \therefore b'^2 = c'^2 - a'^2 = 12,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 (x < -2).$$

3. C 解析: 设动点 $M(x, y)$, 则 $x \neq \pm\sqrt{3}, k_{MA} = \frac{y}{x + \sqrt{3}}, k_{MB} = \frac{y}{x - \sqrt{3}} (x \neq \pm\sqrt{3})$, $\therefore$ 直线 AM 与直线 BM 的斜率之积为定值 $\frac{1}{3}$, $\therefore \frac{y}{x + \sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, 化简, 得 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 (y \neq 0)$, 故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 (y \neq 0)$.

4. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ 解析: 双曲线 $\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{4k^2} = 1$ 的焦点在 x 轴上, $\therefore a^2 = 9k^2$, 可得 $a = 3|k|$.

圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 1. 若双曲线 $\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{4k^2} = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 没有公共点, 则

$$3|k| > 1, \text{ 即 } |k| > \frac{1}{3}, \therefore k > \frac{1}{3} \text{ 或 } k < -\frac{1}{3}, \therefore k \in$$

$$(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty).$$

5. 解: 由 $p: x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a > 0)$,

$$\text{可得 } a < x < 3a (a > 0).$$

由 q : 方程 $\frac{x^2}{a-3} + \frac{y^2}{8-2a} = 1$ 表示的曲线是双曲线,

$$\text{可得 } (a-3)(8-2a) < 0,$$

$$\text{所以 } a > 4 \text{ 或 } a < 3.$$

因为 p 是 q 的充分不必要条件,

所以 $(a, 3a)$ 是 $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ 的真子集,

$$\text{所以 } 0 < 3a \leq 3 \text{ 或 } a \geq 4,$$

$$\text{解得 } 0 < a \leq 1 \text{ 或 } a \geq 4.$$

$$\text{所以 } a \text{ 的取值范围是 } 0 < a \leq 1 \text{ 或 } a \geq 4.$$

6. 解: (1) 椭圆的方程可化为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

焦点在 x 轴上, 且 $c = \sqrt{5}$.

设双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ a^2 + b^2 = 5, \end{cases} \text{ 解得 } a^2 = 3, b^2 = 2,$$

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 不妨设点 M 在双曲线的右支上,

$$\text{则有 } |MF_1| - |MF_2| = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{又因为 } |MF_1| + |MF_2| = 6\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } |MF_1| = 4\sqrt{3}, |MF_2| = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } \cos \angle MF_2F_1 = \frac{|MF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |MF_1|^2}{2|MF_2||F_1F_2|} < 0,$$

所以 $\angle MF_2F_1$ 为钝角,

所以 $\triangle MF_1F_2$ 为钝角三角形.

易错辨析

C 解析: 依题意得, $|F_1F_2| = 10$, 所以 $||MF_1| - |MF_2|| = |F_1F_2|$, 故点 M 的轨迹是分别以点 F_1, F_2 为端点的两条射线. 故选 C.

小测试(二十六) 双曲线的简单几何性质

预习自评

1. B 2. A 3. ABD

基础过关

1. D 解析: 因为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$ 的焦点在 y 轴上,

$c^2 = 64 - 16 = 48$, 即 $c = 4\sqrt{3}$, 所以根据题意得所求双曲线的焦点为 $(0, \pm 4\sqrt{3})$. 因为双曲线的一条渐近线方程为 $y = x$, 所以该双曲线为等轴双曲线, 即 $a = b$, 所以 $a^2 + b^2 = c^2 = 2a^2 = 48$, 解得 $a^2 = b^2 = 24$, 所以双曲线的方程为 $y^2 - x^2 = 24$.

2. B 解析: 由双曲线 $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$, 可得 $a = \sqrt{5}, b = 1$,

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x$, 即 $\sqrt{5}x \pm 5y = 0$, 顶点坐标为 $(\pm\sqrt{5}, 0)$, 所以顶点 $(\pm\sqrt{5}, 0)$ 到渐近线 $\sqrt{5}x \pm 5y = 0$ 的距离为 $d = \frac{|\pm\sqrt{5} \times \sqrt{5}|}{\sqrt{5+25}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

3. B 解析: 设与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 有相同渐近线的

双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = m (m \neq 0)$, 将点 $P(4, 6)$ 代入, 得 $16 - \frac{36}{2} = m$, 解得 $m = -2$, 所以所求双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$.

4. D 解析: $P(1, \sqrt{2})$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 上, 代入 $(1, \sqrt{2})$ 可得 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$,

则双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.

5. C 解析: 因为 F_1 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$

的左焦点, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$, 则点 P 在双曲线的左支上, 因为 $|PF_1| = |F_1F_2| = 2c$, 所以 $|PF_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |F_1F_2|^2} = 2\sqrt{2}c$. 由双曲线的定义可得 $2a = |PF_2| - |PF_1| = 2\sqrt{2}c - 2c$, 所以双曲线 C 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}-2} = \sqrt{2} + 1$.

6. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$ 解析: 依题意得 $e = \sqrt{2}$, 即 $c^2 = 2a^2 =$

$a^2 + b^2$, 可得 $a = b$. 设方程为 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m} = 1$, 将点 $(4, -\sqrt{10})$ 代入, 则 $\frac{16}{m} - \frac{10}{m} = 1$, 解得 $m = 6$. $\therefore \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$.

7. $\frac{4}{5}$ 解析: 设双曲线的半焦距为 c , 由双曲线的渐近

线方程得 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $|PF_2| = |F_1F_2| = 2c$, $|PF_1| = 2c + 2a$, 由余弦定理可得 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{(2c)^2 + (2c+2a)^2 - (2c)^2}{2 \times 2c(2c+2a)} = \frac{a+c}{2c} = \frac{a+\frac{5}{3}a}{\frac{10}{3}a} = \frac{4}{5}$.

8. 解: 由题意得椭圆的焦点坐标为 $(-4, 0), (4, 0)$, 离心率 $e = \frac{4}{5}$,

设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

则其离心率 $\frac{c}{a} = \frac{14}{5} - \frac{4}{5} = 2$,

又 $c = 4$,

所以 $a = 2, b^2 = c^2 - a^2 = 12$,

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$,

渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$,

实轴长 $2a = 4$,

虚轴长 $2b = 4\sqrt{3}$.

素养提升

1. B 解析: 设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = k$, 因为焦

点为 $(0, \pm 3)$ 在 y 轴上, 所以 $k < 0$, 则所求双曲线方程为 $\frac{y^2}{-k} - \frac{x^2}{-2k} = 1$, 由 $-k - 2k = 3^2 = 9$, 得 $k = -3$,

故所求双曲线为 $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$.

2. D 解析: 由题意得, $c = \sqrt{2}a$, 即 $a = b$, 渐近线方程为 $y = \pm x$, 圆 $(x-m)^2 + y^2 = 4 (m > 0)$ 的圆心为 $(m, 0)$, 半径为 2, 可得圆心到直线的距离为 $d =$

$\frac{|m|}{\sqrt{2}}$, 则直线被圆截得的弦长为 $2\sqrt{4 - \frac{m^2}{2}} = 2\sqrt{2}$,

解得 $m = 2$ 或 $m = -2$ (舍去).

3. B 解析: 设 $|BF_2| = m$, 则 $|AF_2| = 3m$, $|AF_1| = 2a + 3m$, $|BF_1| = 2a + m$. 在 $\triangle ABF_1$ 中, 由余弦定理得 $(2a + m)^2 = (4m)^2 + (2a + 3m)^2 - \frac{8}{5} \times 4m(2a + 3m)$, 解得 $m = a$, $\therefore |AF_1| = 5m$, $|AB| = 4m$, $|BF_1| = 3m$, 易知 $\triangle ABF_1$ 为直角三角形. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $2c = |F_1F_2| = \sqrt{10}m$, $c = \frac{\sqrt{10}}{2}m$, 则离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 2 解析: 因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 点 $P(1, \sqrt{3})$ 在渐近线上, 所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, ① 在 $\text{Rt}\triangle OPF$ 中, $|OP| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$, $\angle FOP = 60^\circ$, 所以 $|OF| = \frac{|OP|}{\cos 60^\circ} = 4$, 即 $c = 4$. 又 $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, ② 解得 $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$.

5. 解: (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 双曲线 C 的方程为 $4x^2 - y^2 = 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} x + y = 1, \\ 4x^2 - y^2 = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } 3x^2 + 2x - 2 = 0.$$

设直线 l 与双曲线 C 的两交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}, x_1x_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{28}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{3}. \end{aligned}$$

(2) 将 $y = -x + 1$ 代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$,

$$\text{得 } (1 - a^2)x^2 + 2a^2x - 2a^2 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} 1 - a^2 \neq 0, \\ 4a^4 + 8a^2(1 - a^2) > 0, \end{cases} \text{ 又 } a > 0,$$

$$\therefore 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1.$$

$$\therefore \text{双曲线的离心率 } e = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1},$$

$$\therefore e > \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 且 } e \neq \sqrt{2},$$

即离心率 e 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

6. (1) 解: 由 $e = \sqrt{2}$,

可设双曲线方程为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$,

又双曲线过点 $(4, -\sqrt{10})$,

所以 $\lambda = 16 - 10 = 6$,

所以双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 6$,

$$\text{即 } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

(2) 证明: 由 (1) 知 $a = b = \sqrt{6}$, $c = 2\sqrt{3}$.

所以 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$,

$$\text{所以 } k_{MF_1} = \frac{m}{3+2\sqrt{3}}, k_{MF_2} = \frac{m}{3-2\sqrt{3}},$$

$$\text{所以 } k_{MF_1} \cdot k_{MF_2} = \frac{m^2}{9-12} = \frac{m^2}{-3}.$$

又点 $(3, m)$ 在双曲线上,

所以 $m^2 = 3$,

所以 $k_{MF_1} \cdot k_{MF_2} = -1$,

从而 $MF_1 \perp MF_2$,

$$\text{即 } \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0.$$

(3) 解: 因为在 $\triangle MF_1F_2$ 中, $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$,

且 $|m| = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |m| = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6.$$

易错辨析

解: 可分两种情况: ① 当直线 l 的斜率不存在时, l 为 $x = 1$, 与双曲线相切, 符合题意.

② 当直线 l 的斜率存在时, 可设直线 l 为 $y = k(x - 1) + 1$.

代入双曲线方程, 得 $(4 - k^2)x^2 - (2k - 2k^2)x - k^2 + 2k - 5 = 0$.

当 $4 - k^2 = 0$, 即 $k = \pm 2$ 时, 直线 l 与双曲线的渐近线平行, 直线 l 与双曲线只有一个公共点;

当 $4 - k^2 \neq 0$ 时, $\Delta = (2k - 2k^2)^2 - 4(4 - k^2)(-k^2 + 2k - 5) = 0$, 解得 $k = \frac{5}{2}$.

综上所述, 直线 l 斜率的值为 $\frac{5}{2}$ 或 ± 2 或斜率不存在.

小测试(二十七) 双曲线的标准方程 及性质的应用

预习自评

1. A 2. A 3. C

基础过关

1. D 解析:由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{2}$, 可得 $a = \sqrt{2}$, 所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$,

所以该双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$.

2. A 解析:双曲线的一条渐近线方程为 $2x - ay = 0$, 圆 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 的圆心为 $(0, 2)$, 半径为 1, 所以

$$\begin{cases} a > 0, \\ \frac{|0-2a|}{\sqrt{2^2+a^2}} = 1, \end{cases} \text{解得 } a = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3. D 解析: $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m+6} = 1 (m > 0)$,

$$\therefore a^2 = m, b^2 = m+6, \text{又 } c^2 = a^2 + b^2, \therefore c^2 = 2m+6.$$

$$\because \text{离心率为 } \sqrt{5}, \therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2m+6}{m} = 5, \text{解得 } m = 2,$$

$$\therefore \text{双曲线的标准方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

4. A 解析:由双曲线 $C: \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$, 点 $A(-10, 0)$,

点 $B(10, 0)$, 可知 A, B 是双曲线的焦点, $a = 6, c =$

$10, a + c = 16$, 因为点 P 为双曲线 $C: \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ 上

的动点, $|PA| = 15$, 所以点 P 在双曲线的左支, 所以 $|PB| = 2a + |PA| = 12 + 15 = 27$.

5. B 解析:设 $M(x_0, y_0), A_1(0, a), A_2(0, -a)$, 则

$$k_{MA_1} = \frac{y_0 - a}{x_0}, k_{MA_2} = \frac{y_0 + a}{x_0}, \text{所以 } k_{MA_1} \cdot k_{MA_2} =$$

$$\frac{y_0^2 - a^2}{x_0^2} > 2 \text{ ①. 又点 } M(x_0, y_0) \text{ 在双曲线 } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

上, 所以 $y_0^2 = a^2 \left(\frac{x_0^2}{b^2} + 1 \right)$, 代入①式化简得 $\frac{a^2}{b^2} > 2$,

$$\text{所以 } \frac{b^2}{a^2} < \frac{1}{2}, \text{所以 } \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1 < \frac{1}{2}, \text{解得 } 1 <$$

$$e < \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

6. -6 或 6 解析:当 $k > 0$ 时, 方程化为标准方程形

$$\text{式为 } \frac{x^2}{\frac{k}{2}} - \frac{y^2}{k} = 1. \because c^2 = \frac{k}{2} + k = \frac{3}{2}k, \therefore \frac{3}{2}k = 3^2,$$

$$\therefore k = 6. \text{当 } k < 0 \text{ 时, 方程化为标准方程形式为}$$

$$\frac{y^2}{-k} - \frac{x^2}{-\frac{k}{2}} = 1. \because c^2 = -k - \frac{k}{2} = -\frac{3}{2}k = 3^2,$$

$$\therefore k = -6. \text{综上所述, } k = -6 \text{ 或 } 6.$$

7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 解析:由椭圆方程 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得焦

点为 $(3, 0), (-3, 0)$, 设双曲线的半焦距为 c , 则 $c =$

3 , 因为双曲线的离心率为 $\frac{3}{2}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} =$

$\frac{3}{2}$, 故 $a = 2$, 所以 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5}$, 所以双曲线 C

$$\text{的方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

8. 解:设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$\therefore A$ 为 P, Q 的中点,

$$\therefore x_1 + x_2 = 16, y_1 + y_2 = 8.$$

$\therefore P, Q$ 在双曲线上,

$$\therefore \begin{cases} \frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1 & \text{①,} \\ \frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{9} = 1 & \text{②,} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{16} - \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{9} = 0,$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{9(x_1 + x_2)}{16(y_1 + y_2)} = \frac{9}{8} = k_{PQ},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } y - 4 = \frac{9}{8}(x - 8),$$

$$\text{即 } 9x - 8y - 40 = 0.$$

$$\therefore \text{所求直线方程为 } 9x - 8y - 40 = 0.$$

素养提升

1. B 解析:因为 $\triangle AF_1F_2$ 是顶角为 120° 的等腰三角形, 所以 $c = \sqrt{3}b$, 所以 $c^2 = 3b^2$, 即 $a^2 + b^2 = 3b^2, a^2 =$

$2b^2$, 解得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, 所以双曲线的渐近线

$$\text{方程为 } y = \pm\sqrt{2}x \text{ 或 } y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

2. C 解析:由双曲线方程可得 $c = \sqrt{1+6} = \sqrt{7}$, 则焦

距为 $2c = 2\sqrt{7}$, 故 A 错误;由双曲线方程可得 $a = 1$,

$b = \sqrt{6}$, 故实轴长为 2, 虚轴长为 $2\sqrt{6}$, 故虚轴长是实

轴长的 $\sqrt{6}$ 倍, 故 B 错误;双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{6} = 1$ 的渐

近线方程为 $y = \pm\sqrt{6}x$, 双曲线 $\frac{y^2}{6} - x^2 = 1$ 的渐

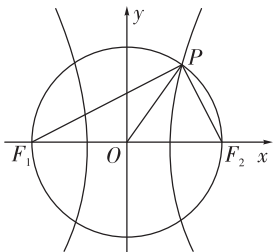
近线方程为 $y = \pm\sqrt{6}x$, 故 C 正确;将 $y = 3x$ 代入双曲

线方程可得 $x^2 = -2$, 方程无解, 没有公共点, 故 D

3. A 解析: 由题知 $c=2$, 所以 $|F_1F_2|=4$, 又 $|F_1F_2|=2|PF_2|$, 所以 $|PF_2|=2$, 又 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 10, 所以 $|PF_1|+2+4=10$, 解得 $|PF_1|=4$, 所以 $|PF_1|-|PF_2|=2=2a$, 解得 $a=1$, 又 $a^2+b^2=c^2$, 所以 $b=\sqrt{3}$, 所以双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$,

所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

4. $\sqrt{3}+1$ 解析: 如图所示, $\triangle POF_2$ 为正三角形, 则 $\angle POF_2=60^\circ$, 因为 P 为圆 O 上的一点, 且 F_1F_2 为圆 O 的直径, 所以 $\angle F_1PF_2=90^\circ$, $\angle PF_1F_2=30^\circ$. 因为 $|F_1F_2|=2c$, 所以在 $\text{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中, $|PF_2|=c$, $|PF_1|=\sqrt{3}c$, 又因为 P 为双曲线右支上的一点, 所以 $|PF_1|-|PF_2|=2a$, 所以 $\sqrt{3}c-c=2a$, 故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1$.



5. 解: (1) 设所求双曲线 F 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=\lambda (\lambda \neq 0)$,

将点 $M(2, 2\sqrt{3})$ 代入, 得 $\lambda = \frac{2^2}{4} - \frac{(2\sqrt{3})^2}{3} = -3$,

故双曲线 F 的方程为 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{12} = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

因为点 A, B 在双曲线 E 上,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases}$$

两式相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4} - \frac{y_1^2-y_2^2}{3} = 0$,

$$\text{即} \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{3(x_1+x_2)}{4(y_1+y_2)} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以所求直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{则由} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{得 } 9x^2 - 36x - 39 \times 4 = 0,$$

所以 $x_1+x_2=4, x_1x_2=-\frac{39 \times 4}{9}$,

将 $x=0$ 代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 得 $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} |x_1-x_2| =$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 12.$$

6. 解: (1) 由 $e=\sqrt{2}$, 可设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda (\lambda \neq 0)$,

又双曲线过点 $(4, -\sqrt{10})$,

所以 $\lambda = 16 - 10 = 6$.

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$.

(2) 由(1)不妨设 $F_1(2\sqrt{3}, 0), F_2(-2\sqrt{3}, 0)$.

所以 $\overrightarrow{MF_1} = (2\sqrt{3} - 3, -m), \overrightarrow{MF_2} = (-2\sqrt{3} - 3, -m)$.

所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = -3 + m^2$.

又 $M(3, m)$ 在双曲线上,

所以 $m^2 = 3$.

所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$.

(3) 因为在 $\triangle MF_1F_2$ 中, $|F_1F_2|=4\sqrt{3}$, 且 $|m|=\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |m| = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$.

易错辨析

$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$ 或 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{18} = 1$ 解析: 当双曲线的焦点

在 x 轴上时, 由 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \\ c^2 = a^2 + b^2 = 26, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 18, \\ b^2 = 8, \end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.

当双曲线的焦点在 y 轴上时, 由 $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \\ c^2 = a^2 + b^2 = 26, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 18, \end{cases}$ 所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{18} = 1$.

综上所述, 所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$ 或 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{18} = 1$.

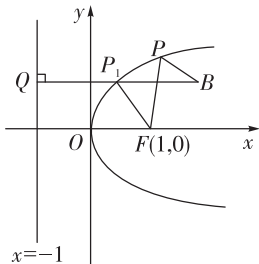
小测试(二十八) 抛物线及其标准方程

预习自评

1. C 2. C 3. $(-9, 6)$ 或 $(-9, -6)$

基础过关

1. A 解析: $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, $\therefore$ 其准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$, 由题意知 $3 + \frac{p}{2} = 5$, $\therefore p = 4$, $\therefore$ 抛物线方程为 $y^2 = 8x$.
2. A 解析: 设动圆的圆心坐标为 (x, y) , 则圆心到点 $(1, 0)$ 的距离与到直线 $x = -1$ 的距离相等, 根据抛物线的定义知动圆圆心的轨迹方程为抛物线 $y^2 = 4x$.
3. D 解析: 因为等边三角形 AOB 的边长为 1, 且 $AB \perp x$ 轴, 不妨设点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 因为点 A 在抛物线上, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2p \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $p = \frac{\sqrt{3}}{12}$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}x$.
4. D 解析: 抛物线 $C: y^2 = 8px$ 的准线方程是 $x = -2p$, 焦点为 F , 由 $\begin{cases} x^2 = py, \\ y^2 = 8px, \end{cases}$ 解得 $x = 2p$, 因为抛物线 C 与抛物线 $x^2 = py$ 在第一象限的交点为 M , 所以 $|MF| = 2p - (-2p) = 4$, 解得 $p = 1$.
5. C 解析: 设 P 点的坐标为 (x, y) , $A(2, 0)$, 动圆的半径为 r , P 到 l 的距离为 d , 则根据两圆相外切及直线与圆相切的性质, 可得 $|PA| = 1 + r, d = r$, P 在直线 l 的右侧, 故 P 到定直线 l 的距离是 $x + 1$, 所以 $|PA| - d = 1$, 即 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - (x+1) = 1$, 化简得 $y^2 = 8x$.
6. 4 解析: 由抛物线方程可知准线方程为 $x = -1$, 结合抛物线定义可得 $|PF| = x_0 + 1 = 5$, 解得 $x_0 = 4$.
7. 4 解析: 因为 $2^2 < 4 \times 3$, 所以点 $B(3, 2)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 的内部, 如图所示, 过点 B 作 BQ 垂直准线于点 Q , 交抛物线于点 P_1 , 根据抛物线的定义可得 $|P_1Q| = |P_1F|$, 又 P 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一个动点, 所以 $|PB| + |PF| \geq |P_1B| + |P_1Q| = |BQ| = 4$, 当且仅当点 P 与点 P_1 重合时, $|PB| + |PF|$ 取得最小值, 即 $|PB| + |PF|$ 的最小值为 4.



8. 解: (1) 因为抛物线的准线方程为 $x = 2$,

所以抛物线焦点在 x 轴负半轴上,

所以 $\frac{p}{2} = 2$, 解得 $p = 4$,

所以抛物线的标准方程为 $y^2 = -8x$.

(2) 因为抛物线经过点 $P(4, -2)$,

设抛物线的标准方程为 $y^2 = mx (m > 0)$ 或 $x^2 = ny (n < 0)$,

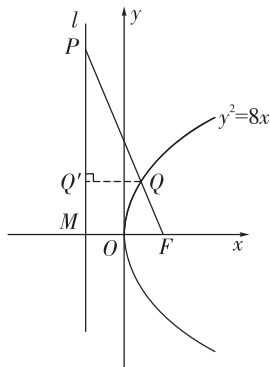
所以 $(-2)^2 = 4m$ 或 $4^2 = -2n$,

解得 $m = 1$ 或 $n = -8$,

所以抛物线的标准方程为 $y^2 = x$ 或 $x^2 = -8y$.

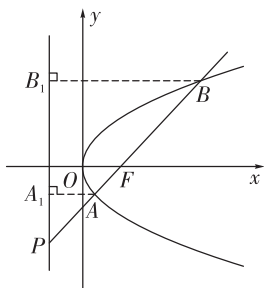
素养提升

1. B 解析: 由题意知抛物线的焦点坐标为 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$. 因为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一点 P 到焦点的距离为 5, 由抛物线的定义可知, 点 P 到准线 $x = -1$ 的距离是 5, 则点 P 到 y 轴的距离是 4, 所以 $P(4, \pm 4)$, 所以 $\triangle PFO$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$. 故选 B.
2. B 解析: 由抛物线的定义, 知 $|AF| = y_1 + \frac{1}{2}$, $|BF| = y_2 + \frac{1}{2}$, 所以 $|AF| - |BF| = y_1 - y_2 = 2$, 又 $x_1^2 = 2y_1, x_2^2 = 2y_2$, 所以 $x_1^2 - x_2^2 = 2(y_1 - y_2) = 4$, 所以 $y_1 + x_1^2 - y_2 - x_2^2 = (y_1 - y_2) + (x_1^2 - x_2^2) = 2 + 4 = 6$. 故选 B.
3. B 解析: 如图所示, 过点 Q 作 $QQ' \perp l$ 交 l 于点 Q' , 利用抛物线定义得 $|QF| = |QQ'|$. 设准线 l 交 x 轴于点 M , 因为 $\vec{FP} = 4\vec{FQ}$, 所以 $|QQ'| : |FM| = |PQ| : |PF| = 3 : 4$, 又焦点 F 到准线 l 的距离为 4, 所以 $|QQ'| = 3$, 所以 $|QF| = |QQ'| = 3$. 故选 B.



4. -2 解析: 如图所示, 抛物线 $y^2 = 4x$, 则直线 $x = -1$ 为其准线. 分别过 A, B 作直线 $x = -1$ 的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 . 根据抛物线的定义可得

$|AF| = |AA_1|$, $|BF| = |BB_1|$. 由 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{AF}$, 得 $|\overrightarrow{PA}| = 2|\overrightarrow{AF}|$, 即 $|PA| = 2|AA_1|$. 由 $AA_1 \parallel BB_1$, 得 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|AA_1|}{|BB_1|}$, 即 $\frac{|PA|}{|AA_1|} = \frac{|PB|}{|BB_1|} = \frac{|PB|}{|BF|} = 2$, 由 $\overrightarrow{PB} = \mu\overrightarrow{BF}$, 得 $\mu = -2$.



5. 解: (1) 由抛物线 C 的方程可得其准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

依抛物线的性质得 $\frac{p}{2} + 4 = 5$, 解得 $p = 2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 将 $A(4, m)$ 代入 $y^2 = 4x$, 得 $m = 4$,

所以 $A(4, 4)$.

直线 OA 的方程为 $y = x$, 即 $x - y = 0$,

设 $B(t^2, 2t)$,

则点 B 到直线 OA 的距离 $d = \frac{|t^2 - 2t|}{\sqrt{2}}$,

又 $|OA| = 4\sqrt{2}$,

由题意得 $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{|t^2 - 2t|}{\sqrt{2}} = 6$,

解得 $t = -1$ 或 $t = 3$,

所以点 B 的坐标是 $(1, -2)$ 或 $(9, 6)$.

6. 解: (1) 因为双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

所以 $a^2 = 1, b^2 = 3$,

所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 4$,

即 $c = 2$,

所以双曲线的焦点坐标为 $(-2, 0), (2, 0)$.

(2) 因为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点与双曲线的一个焦点相同,

所以抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点是 $(2, 0)$,

所以 $p = 4$,

因为点 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线上一点,

所以点 $P(x_0, y_0)$ 到抛物线的焦点的距离等于点 $P(x_0, y_0)$ 到抛物线的准线 $x = -2$ 的距离.

因为点 P 到抛物线的焦点的距离是 5,

所以 $x_0 + 2 = 5$,

所以 $x_0 = 3$.

易错辨析

A 解析: 因为点 A 在直线 $x + 2y = 3$ 上, 所以所求点的轨迹是过点 $(1, 1)$ 且与直线 $x + 2y = 3$ 垂直的直线. 故选 A.

小测试(二十九) 抛物线的简单几何性质

预习自评

1. B 2. CD 3. B

基础过关

1. C 解析: 在方程 $2x - 4y + 11 = 0$ 中, 令 $y = 0$ 得 $x = -\frac{11}{2}$, $\therefore$ 抛物线的焦点为 $F(-\frac{11}{2}, 0)$, 即 $\frac{p}{2} = -\frac{11}{2}$, $\therefore p = 11$, $\therefore$ 抛物线的方程是 $y^2 = -22x$.

2. A 解析: 若抛物线的开口最小, 则说明一次项系数的绝对值最小, 故 A 正确.

3. C 解析: 因为抛物线 $y = -8x^2$ 的标准方程为 $x^2 = -\frac{1}{8}y$, 所以抛物线的焦点坐标是 $(0, -\frac{1}{32})$.

4. A 解析: 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的标准方程为 $x^2 = 4y$, 焦点为 $(0, 1)$, $\therefore$ 定点 A 为抛物线的焦点, 要使圆过点 $A(0, 1)$ 且与定直线 l 相切, 需圆心到定点的距离与其到定直线的距离相等, 则 l 为抛物线的准线, l 的方程为 $y = -1$.

5. A 解析: 抛物线 C 的准线方程为 $y = -2$, 设点 $P(x_0, y_0)$, 由抛物线的定义可得 $|PF| = y_0 + 2 = 8$, 解得 $y_0 = 6$, 因为点 $F(0, 2)$, 故点 $M(\frac{x_0}{2}, 4)$, 因此, PF 的中点 M 到抛物线 C 的准线 l 的距离为 $4 + 2 = 6$.

6. $x^2 = -4y$ 解析: 设 $x^2 = -2py (p > 0)$, 抛物线上的点 $P(a, -2)$ 到焦点的距离等于点 P 到准线 $y = \frac{p}{2}$ 的距离, 则 $\frac{p}{2} + 2 = 3$, 解得 $p = 2$, 故抛物线方程为 $x^2 = -4y$.

7. 10 解析: 由抛物线的定义可知, $|P_1F| = x_1 + \frac{1}{2}$,

$|P_2F| = x_2 + \frac{1}{2}, \dots, |P_{10}F| = x_{10} + \frac{1}{2}$.

则 $|P_1F| + |P_2F| + |P_3F| + \dots + |P_{10}F| = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} \times 10 = 10.$$

8. 解: 设点 A, M, B 的纵坐标分别为 y_1, y_2, y_3 , F 为抛物线的焦点, A, M, B 三点在抛物线准线上的射影分别为 A', M', B' , 分别连接 AA', MM', BB', AF, BF , 如图所示.

由抛物线的定义, 知

$$|AF| = |AA'| = y_1 + \frac{1}{4},$$

$$|BF| = |BB'| = y_3 + \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } y_1 = |AF| - \frac{1}{4},$$

$$y_3 = |BF| - \frac{1}{4},$$

又 M 是线段 AB 的中点,

$$\text{所以 } y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3) = \frac{1}{2}\left(|AF| + |BF| - \frac{1}{2}\right) \geq$$

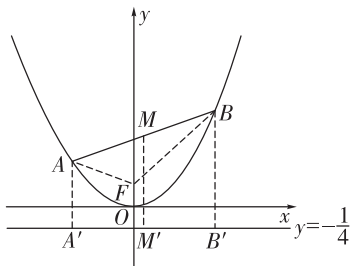
$$\frac{1}{2}\left(|AB| - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(2a - 1),$$

当且仅当 AB 过焦点 F 时, 等号成立,

即当定长为 a 的弦 AB 过焦点 F 时,

点 M 到 x 轴的距离最小,

$$\text{最小距离为 } \frac{1}{4}(2a - 1).$$



素养提升

1. B 解析: 由题意得 $|y_P| = x_P$, $\therefore x_P^2 = 2px_P$,

$\therefore x_P = 2p$, 因此点 P 与抛物线的焦点 F 之间的距

离为 $x_P + \frac{p}{2} = \frac{5p}{2}$.

2. A 解析: 根据对称性, 可知 $AB \perp x$ 轴, 由于正三角

形 OAB 的面积是 $4\sqrt{3}$, 则 $\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 = 4\sqrt{3}$, 故

$|AB| = 4$, 则正三角形 OAB 的高为 $2\sqrt{3}$, 故可设点

A 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 2)$, 代入抛物线方程得 $4 = 4\sqrt{3}p$,

解得 $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故所求抛物线的方程为 $y^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

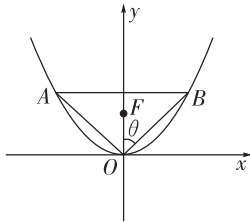
3. C 解析: 如图所示, 因为 $|OA| = |OB|$, 所以 A, B

两点关于 y 轴对称, 设 $A(-a, \frac{a^2}{2}), B(a, \frac{a^2}{2})$, 所

以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{a^2}{2} = 12\sqrt{3}$, 解得 $a = 2\sqrt{3}$, 所以

$B(2\sqrt{3}, 6)$, 所以 $\tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\theta = 30^\circ$, 所

以 $\angle AOB = 2\theta = 60^\circ$.



4. 5 $4\sqrt{5}$ 解析: 因为抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 故

$p = 2$ 且 $F(1, 0)$. 因为 $|MF| = 6$, 所以 $x_M + \frac{p}{2} = 6$,

解得 $x_M = 5$, 故 $|y_M| = 2\sqrt{5}$, 所以 $S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2} \times$

$$(5 - 1) \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

5. 解: (1) 设 $M(x, y)$, 依题意得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x+1|$,

整理得 $y^2 = 4x$,

则曲线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 显然直线斜率存在且不为 0, 设 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 设直线 AB 的方程为 $y = k(x-1), k \neq 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-1), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } ky^2 - 4y - 4k = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 16 + 16k^2 > 0, y_1 + y_2 = \frac{4}{k}, y_1 y_2 = -4,$$

设线段 AB 的中点为 $N(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{k}, x_0 = \frac{1}{k}y_0 + 1 = \frac{2}{k^2} + 1,$$

$$\text{则 } k \cdot k_{NP} = k \cdot \frac{y_0}{x_0 - 1} = k \cdot \frac{\frac{2}{k}}{\frac{2}{k^2} - 3} = \frac{2}{\frac{2}{k^2} - 3} = -1,$$

解得 $k^2 = 2$.

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2|$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \left(\frac{16}{k^2} + 16\right)}$$

$$= 6.$$

6. 解: (1) 选择条件①:

由抛物线的定义可得 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$,

因为 $|PF| = x_0 + 2$,

所以 $x_0 + \frac{p}{2} = x_0 + 2$,

解得 $p = 4$,

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

选择条件②:

因为 $y_0 = 2x_0 = 4$,

所以 $x_0 = 2, y_0 = 4$,

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 C 上,

所以 $y_0^2 = 2px_0$, 即 $16 = 4p$,

解得 $p = 4$.

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

选择条件③:

当 $PF \perp x$ 轴时, $|PF| = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 4$,

解得 $p = 4$.

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2 - 10x + 1 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = 10, x_1 x_2 = 1$.

所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

又 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1$,

所以 $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$,

故 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = 8\sqrt{3}$.

因为点 $F(2, 0)$ 到直线 $l: x - y - 1 = 0$ 的距离 $d =$

$$\frac{|2 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\triangle ABF$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

易错辨析

C 解析: ①当过点 $(0, 2)$ 的直线斜率不存在时, 显然 $x = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2x$ 有且只有一个公共点.

②当过点 $(0, 2)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2x$ 的对称轴平行, 即斜率为 0 时, 显然 $y = 2$ 与抛物线 $y^2 = 2x$ 有且只有一个公共点.

③当直线过点 $(0, 2)$, 斜率存在且不为 0 时, 设直线

方程为 $y = kx + 2$, 将其代入抛物线方程 $y^2 = 2x$, 消去 y 得 $k^2 x^2 + 2 \cdot (2k - 1)x + 4 = 0$, 由 $k \neq 0$, 得 $\Delta = 4(2k - 1)^2 - 16k^2 = 0$, 解得 $k = \frac{1}{4}$, 即直线的方程为

$$y = \frac{1}{4}x + 2.$$

综上所述, 过点 $(0, 2)$ 且与抛物线 $y^2 = 2x$ 有且只有一个公共点的直线共有三条. 故选 C.

小测试(三十) 抛物线的标准方程及性质的应用

预习自评

1. D 2. D 3. 0 或 1

基础过关

1. D 解析: 设直线与抛物线的交点为 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 联立方程 $\begin{cases} y^2 = -8x, \\ 2x + y + 8 = 0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -4, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -8, \\ y_2 = 8, \end{cases} \therefore |AB| = \sqrt{(-2+8)^2 + (-4-8)^2} = 6\sqrt{5}.$$

2. D 解析: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} =$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{p^2}{4} - p^2 = -\frac{3}{4}p^2, \text{ 又 } \because p = 2, \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3.$$

3. C 解析: 由题意知 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 则直线 AB 的方程

为 $y = x - \frac{p}{2}$, 代入 $y^2 = 2px$, 化简可得 $x^2 - 3px +$

$\frac{p^2}{4} = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = 3p$.

$\therefore |AB| = 8, \therefore x_1 + x_2 + p = 8$, 解得 $p = 2$.

4. C 解析: $\because y^2 = 8x, \therefore Q(-2, 0)$ (Q 为准线与 x 轴的交点), 设过 Q 点的直线 l 的方程为 $y = k(x + 2)$.

$\because l$ 与抛物线有公共点, $\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y^2 = 8x, \\ y = k(x + 2) \end{cases}$ 有

解, $\therefore \Delta = (4k^2 - 8)^2 - 16k^4 \geq 0$, 即 $k^2 \leq 1, \therefore -1 \leq k \leq 1$.

5. B 解析: 由题意知抛物线的准线方程为 $y = -\frac{m}{4}$,

$\therefore$ 线段 PQ 中点的纵坐标为 4, 则 $y_P + y_Q = 2 \times 4 =$

8, 由抛物线的性质得 $|PQ| = y_P + y_Q + \frac{m}{2} = 8 +$

$\frac{m}{2}$, 由题意得 $8 + \frac{m}{2} = \frac{3m}{2}$, 解得 $m = 8$.

6.2 解析: 设抛物线的焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 由题意可知 $x_A = x_B = x_F = \frac{p}{2}$, 所以 $|AB| = |AF| + |BF| = x_A + \frac{p}{2} + x_B + \frac{p}{2} = 2p$, 又 $|AB| = 4$, 所以 $p = 2$.

7.2 8 解析: 因为抛物线经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$, 所以 $(-2\sqrt{2})^2 = 4p$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线 $C: y^2 = 4x$, $F(1, 0)$, 所以直线 l 的方程为 $y = x - 1$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x - 1, \end{cases}$ 得 $x^2 - 6x + 1 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = 6$, 所以 $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = 8$.

8. 解: (1) 因为抛物线 C 的顶点在原点, 焦点为 $F(1, 0)$, 设抛物线的方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

所以 $\frac{p}{2} = 1, p = 2$,

则其方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x - 2 \end{cases}$ 可得 $y^2 - 4y - 8 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 4$,

则 $\frac{y_1 + y_2}{2} = 2$,

所以弦 AB 的中点 N 的纵坐标为 2,

则横坐标为 $x = y + 2 = 4$,

所以弦 AB 的中点 N 的坐标为 $(4, 2)$.

素养提升

1. C 解析: $y^2 = 6x$ 的焦点 $F(\frac{3}{2}, 0)$, 直线 l 的方程为 $y = 2x - 3$, 代入抛物线的方程, 可得 $4x^2 - 18x + 9 = 0$, 所以 $|AB| = \frac{15}{2}$.

2. C 解析: 由抛物线 $C: y^2 = 8x$, 知 $F(2, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 因为直线 l 过 $(2, 0)$ 且其斜率大于零, 所以 A, B 在 x 轴两侧. 又 $|AF| = 2|BF|$, 知 $x_1 > x_2$, 且 $x_1 + 2 = 2(x_2 + 2)$, 即 $x_1 = 2x_2 + 2$. 由 $\begin{cases} y = k(x - 2), \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 可得 $k^2 x^2 - (8 + 4k^2)x + 4k^2 = 0$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8}{k^2} + 4, \\ x_1 x_2 = 4, \end{cases}$ 代入 $x_1 = 2x_2 + 2$, 可得

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 1, \text{ 又 } k > 0, \text{ 故 } k = 2\sqrt{2}. \\ k^2 = 8, \end{cases}$$

3. BCD 解析: 对于选项 A, 由抛物线的定义可得 $|AF| = x_A + \frac{p}{2} = \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$, 解得 $p = 2$, 所以 A

不正确. 对于选项 B, $A(\frac{1}{2}, a), F(1, 0)$, 抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 将点 $A(\frac{1}{2}, a)$ 代入抛物线方程, 得

$a^2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$, 所以 $a = \pm\sqrt{2}$, 所以 B 正确. 对于选

项 C, 如图所示, 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 则 $k_l = \frac{\sqrt{2} - 0}{\frac{1}{2} - 1} =$

$-2\sqrt{2}$, 所以直线 l 的方程为 $y = -2\sqrt{2}(x - 1)$, 由

$\begin{cases} y = -2\sqrt{2}(x - 1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $2x^2 - 5x + 2 = 0$, 解得 $x_1 =$

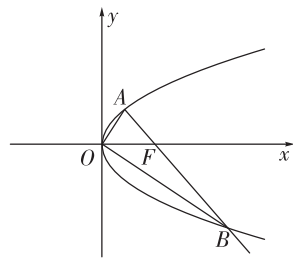
$\frac{1}{2}, x_2 = 2$. 所以 $x_B = 2$, 所以 $|BF| = x_B + \frac{p}{2} = 2 +$

$1 = 3$, 同理, 当 $a = -\sqrt{2}$ 时, $|BF| = 3$. 所以 C 正确.

对于选项 D, 由上可知, 当 $a = \sqrt{2}$ 时, $A(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$,

$B(2, -2\sqrt{2})$, 所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 同

理, 当 $a = -\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle AOB} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以 D 正确. 故选 BCD.



4. $\{-1, -\frac{4}{5}\}$ 解析: 因为直线 l 与曲线 C 恰好有

一个公共点, 所以方程组 $\begin{cases} y = (a+1)x - 1, \\ y^2 = ax \end{cases}$ 只有一

组实数解, 消去 y , 得 $[(a+1)x - 1]^2 = ax$, 即 $(a+1)^2 x^2 - (3a+2)x + 1 = 0$ ①. 当 $a+1 = 0$, 即 $a = -1$ 时, 方程①是关于 x 的一元一次方程, 解得 $x = -1$,

这时, 原方程组有唯一解 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$ 当 $a+1 \neq 0$, 即

$a \neq -1$ 时, 方程①是关于 x 的一元二次方程. 令

$\Delta = (3a+2)^2 - 4(a+1)^2 = a(5a+4) = 0$, 解得 $a = 0$ (舍去) 或 $a = -\frac{4}{5}$, 所以原方程组有唯一解

$$\begin{cases} x = -5, \\ y = -2. \end{cases} \text{ 综上, 实数 } a \text{ 的取值集合是 } \left\{ -1, -\frac{4}{5} \right\}.$$

5. (1) 解: 由题意设抛物线方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

其准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$.

$\because P(4, m)$ 到焦点的距离等于 P 到其准线的距离,

$$\therefore 4 + \frac{p}{2} = 5,$$

$$\therefore p = 2,$$

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 证明: 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x - 4, \end{cases}$ 消去 y , 得

$$x^2 - 12x + 16 = 0, \Delta > 0,$$

$\therefore$ 直线 $y = x - 4$ 与抛物线相交于不同的两点 A, B ,

$\therefore$ 可设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 12, x_1 x_2 = 16,$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (x_1 - 4)(x_2 - 4) \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 = 16 + 16 - 4 \times 12 + 16 = 0, \end{aligned}$$

$\therefore \vec{OA} \perp \vec{OB}$, 即 $OA \perp OB$.

6. (1) 解: 设 A, B 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

由点 F 的坐标为 $(1, 0)$,

设直线 AB 的方程为 $my = x - 1$,

联立方程 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ my = x - 1, \end{cases}$ 消去 x 后整理为

$$y^2 - 4my - 4 = 0.$$

$$\text{得 } y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4,$$

$$\text{则 } x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} = 1,$$

$$\text{所以 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 - 4 = -3.$$

(2) 证明: 由(1)得 $|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + 4x_1} = \sqrt{x_1(x_1 + 4)}$,

$$|OB| = \sqrt{x_2(x_2 + 4)},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } |OA| \cdot |OB| &= \sqrt{x_1 x_2 (x_1 + 4)(x_2 + 4)} \\ &= \sqrt{x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16} \\ &= \sqrt{4(x_1 + x_2) + 17} \\ &= \sqrt{4(x_1 + x_2 + 2) + 9}, \end{aligned}$$

$$\text{又由 } |AB| = |AF| + |BF| = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) =$$

$$x_1 + x_2 + 2,$$

$$\text{故有 } |OA| \cdot |OB| = \sqrt{4|AB| + 9}.$$

易错辨析

$\pm 2\sqrt{3}$ 解析: 设正三角形的边长为 x , 则 $36\sqrt{3} = \frac{1}{2}x^2 \sin 60^\circ$, 解得 $x = 12$. 结合抛物线及正三角形的对称性可得抛物线上两个顶点的纵坐标分别为 ± 6 , 正三角形的高为 $6\sqrt{3}$. 当 $a > 0$ 时, 将 $(6\sqrt{3}, 6)$ 代入 $y^2 = ax$ 得 $a = 2\sqrt{3}$; 当 $a < 0$ 时, 将 $(-6\sqrt{3}, 6)$ 代入 $y^2 = ax$ 得 $a = -2\sqrt{3}$. 故 $a = \pm 2\sqrt{3}$.

滚动卷(五) 小测试(二十一)至(三十)

综合拔高

1. D 解析: $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$, $\therefore$ 由已知得椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$, $\therefore 3p - p = \frac{p^2}{4}$, 又 $p > 0$, $\therefore p = 8$. 故选 D.

2. B 解析: 设双曲线的半焦距为 c , 由题意可知 $\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1, \\ e = \frac{c}{a} = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 3, \end{cases}$ 则双曲线的解析式为 $\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1. \end{cases}$ 故选 B.

3. A 解析: 根据题意知抛物线的准线方程为 $x = -c$, 所以 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$, $|CD| = \frac{2bc}{a}$, 又因为 $|CD| = \sqrt{2}|AB|$, 所以 $c = \sqrt{2}b$, 又因为 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $a = b$, 所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$. 故选 A.

4. B 解析: 直线 $x = a$ 与双曲线 C 的两条渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 分别交于 D, E 两点, 则 $|DE| = |y_D - y_E| = 2b$, 所以 $S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b = ab$, 即 $ab = 8$. 所以 $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 16$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 即 $c_{\min} = 4$, 所以双曲线的焦距 $2c$ 的最小值为 8. 故选 B.

5. A 解析: 由题意可知 $B(0, 1)$, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1$, $x_0^2 = 5 - 5y_0^2$, $|PB| =$

$\sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{5 - 5y_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1} =$
 $\sqrt{-4y_0^2 - 2y_0 + 6} = \sqrt{-4\left(y_0 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}}.$ 因
 为 $-1 \leq y_0 \leq 1$, 所以当 $y_0 = -\frac{1}{4}$ 时, $|PB|$ 取得最大
 值 $\frac{5}{2}$. 故选 A.

6. $\sqrt{5}$ 解析: 由已知得, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 4} = 3$, 所
 以双曲线的右焦点为 $(3, 0)$, 所以右焦点 $(3, 0)$ 到直
 线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距离为 $\frac{|3 + 2 \times 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} =$
 $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

7. 4 解析: 由渐近线方程 $\sqrt{3}x + my = 0$ 化简得 $y =$
 $-\frac{\sqrt{3}}{m}x$, 则 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{m^2}$, 又在双曲线中 $a^2 = m, b^2 = 1$, 故
 $\frac{3}{m^2} = \frac{1}{m}$, 解得 $m = 3$ 或 $m = 0$ (舍去), 则 $c^2 = a^2 +$
 $b^2 = 3 + 1 = 4$, 即 $c = 2$, 故焦距 $2c = 4$.

8. 2 解析: 由题意可知, 点 B 为双曲线的通径位于第
 一象限的端点, 其坐标为 $(c, \frac{b^2}{a})$, 点 A 的坐标为
 $(a, 0)$, $\therefore AB$ 的斜率为 3 , $\therefore \frac{\frac{b^2}{a}}{c - a} = 3$, 即 $\frac{c^2 - a^2}{a(c - a)} =$
 $\frac{c + a}{a} = e + 1 = 3$, $\therefore e = 2$. 故离心率 $e = 2$.

9. 解: (1) 设 $M(x, y)$.

因为 $k_{AM} \cdot k_{BM} = -2$,

所以 $\frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = -2 (x \neq \pm 1)$,

化简得 $2x^2 + y^2 = 2 (x \neq \pm 1)$,

即为动点 M 的轨迹方程.

(2) 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$.

当直线 l 的斜率不存在时,

直线 l 的方程为 $x = \frac{1}{2}$,

则可设 $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}), D(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$,

此时线段 CD 的中点不是点 N , 不符合题意.

当直线 l 的斜率存在时,

设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - \frac{1}{2})$.

将 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ 代入 $2x^2 + y^2 = 2 (x \neq \pm 1)$, 得

$$\begin{cases} 2x_1^2 + y_1^2 = 2, & \text{①} \\ 2x_2^2 + y_2^2 = 2. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 整理得 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2(x_1 + x_2)}{y_1 + y_2} = -\frac{2 \times 1}{2} = -1,$$

所以 $k = -1$,

所以直线 l 的方程为 $y - 1 = -(x - \frac{1}{2})$,

即 $2x + 2y - 3 = 0$.

10. 解: (1) 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为
 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

由题意, 该抛物线焦点到准线的距离为 $\frac{p}{2} -$

$$(-\frac{p}{2}) = p = 2,$$

所以该抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 设 $Q(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PQ} = 9 \overrightarrow{QF} = (9 - 9x_0, -9y_0),$$

所以 $P(10x_0 - 9, 10y_0)$,

由点 P 在抛物线上可得 $(10y_0)^2 = 4(10x_0 - 9)$,

$$\text{即 } x_0 = \frac{25y_0^2 + 9}{10},$$

$$\text{所以直线 } OQ \text{ 的斜率 } k_{OQ} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{\frac{25y_0^2 + 9}{10}} =$$

$$\frac{10y_0}{25y_0^2 + 9},$$

当 $y_0 = 0$ 时, $k_{OQ} = 0$;

$$\text{当 } y_0 \neq 0 \text{ 时, } k_{OQ} = \frac{10}{25y_0 + \frac{9}{y_0}},$$

$$\text{当 } y_0 > 0 \text{ 时, 因为 } 25y_0 + \frac{9}{y_0} \geq 2\sqrt{25y_0 \cdot \frac{9}{y_0}} = 30,$$

$$\text{此时 } 0 < k_{OQ} \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{当且仅当 } 25y_0 = \frac{9}{y_0}, \text{ 即 } y_0 = \frac{3}{5} \text{ 时, 等号成立;}$$

$$\text{当 } y_0 < 0 \text{ 时, } k_{OQ} < 0.$$

综上所述, 直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

素养提升

1. C 解析: 设直线 AB 的倾斜角为 θ , 可得 $|AF| =$

$$\frac{2}{1 - \cos \theta}, |BF| = \frac{2}{1 + \cos \theta}, \text{ 则 } |AF| \cdot |BF| =$$

$$\frac{2}{1 - \cos \theta} \times \frac{2}{1 + \cos \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta} \geq 4, \text{ 当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 等号}$$

成立.

2. D 解析: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 \neq x_2$, 则 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = -2$, 直线 AB 的斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0 - (-1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}$. 因为点 A, B 在椭圆 E 上, 所以 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 两式相减得 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$, 即 $\frac{x_1 + x_2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2(x_1 - x_2)} = 0$, 于是有 $\frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0$, 所以 $a^2 = 2b^2$, 排除选项 A, B, C. 故 D 正确.

3. D 解析: 由题意可得 $c = \sqrt{5}$, 即 $a^2 + b^2 = 5$, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 将渐近线方程和抛物线方程 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ 联立, 可得 $\frac{1}{4}x^2 \pm \frac{b}{a}x + \frac{1}{4} = 0$. 由抛物线与双曲线 C 的渐近线相切, 可得 $\Delta = \frac{b^2}{a^2} - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 0$, 即 $a^2 = 4b^2$, 解得 $a = 2, b = 1$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $x \pm y = 0$, 直线 $x - y + 1 = 0$ 与渐近线 $x - y = 0$ 平行, 故两平行线间的距离 $d = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 由点 P 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离大于 c 恒成立, 得 $c \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故实数 c 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 解: (1) 当 $y = \frac{p}{2}$ 时, $x = \frac{p}{8}$,

又抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

则由抛物线定义得, 纵坐标为 $\frac{p}{2}$ 的点到焦点 F 的距离为 $\frac{p}{8} - (-\frac{p}{2}) = \frac{5p}{8}$.

(2) 由题意, 得 $k_{PA} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_0}$,

同理可得 $k_{PB} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}} = \frac{2p}{y_2 + y_0}$.

由直线 PA 与 PB 的倾斜角互补知 $k_{PA} + k_{PB} = 0$,

即 $\frac{2p}{y_1 + y_0} + \frac{2p}{y_2 + y_0} = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = -2y_0$,

故 $\frac{y_1 + y_2}{y_0} = -2$.

此时 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_2} = -\frac{p}{y_0}$ 为非

零常数.

6. (1) 解: 设椭圆 E 的半焦距为 c .

圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{3}$,

则 l 被圆 O 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$,

所以 $b = \sqrt{2}$.

由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$

又 $b = \sqrt{2}$,

所以 $\begin{cases} a^2 = 3, \\ b^2 = 2. \end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{2} = 1$.

(2) 证明: 设点 $P(x_0, y_0), x_0 \neq \pm\sqrt{2}$,

设过点 P 的椭圆 E 的切线 l_0 的方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$,

整理得 $y = kx + y_0 - kx_0$.

联立 $\begin{cases} y = kx + y_0 - kx_0, \\ \frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{2} = 1, \end{cases}$

消去 y , 得 $2[kx + (y_0 - kx_0)]^2 + 3x^2 - 6 = 0$,

整理得 $(3 + 2k^2)x^2 + 4k(y_0 - kx_0)x + 2(y_0 - kx_0)^2 - 6 = 0$.

因为切线 l_0 与椭圆 E 相切,

所以 $\Delta_1 = [4k(y_0 - kx_0)]^2 - 4(3 + 2k^2)[2(y_0 - kx_0)^2 - 6] = 0$,

整理得 $(2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k - (y_0^2 - 3) = 0$,

$\Delta_2 = (2x_0y_0)^2 + 4(2 - x_0^2)(y_0^2 - 3) = 12x_0^2 + 8y_0^2 - 24$,

因为点 P 在圆 O 上,

所以 $x_0^2 + y_0^2 = 5$,

所以 $\Delta_2 = 4x_0^2 + 16 > 0$.

设满足题意的椭圆 E 的两条切线的斜率分别为 k_1, k_2 ,

则 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 3}{2 - x_0^2}$.

所以 $k_1k_2 = -\frac{5 - x_0^2 - 3}{2 - x_0^2} = -1$,

所以两条切线斜率之积为定值 -1 .