

限时小测试参考答案

小测试(一) 集合的概念

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)×

2. D

3. (1)∈ (2)∉ (3)∉ (4)∈

基础过关

1. C 解析:选项 A,不满足集合中元素的确定性,故错误;选项 B,不大于 3 的自然数组成的集合是 $\{0, 1, 2, 3\}$,故错误;选项 C,集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ 中所有元素完全相同,只是顺序不同,满足集合中元素的无序性,故正确;选项 D,由 $1, 0, 5, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \sqrt{\frac{1}{4}}$ 组成的集合中有 5 个元素,故错误. 故选 C.

2. C

3. C 解析:因为集合是点集,所以代表元素是 (x, y) ,所以用描述法表示为 $\{(x, y) | y=3x+1\}$. 故选 C.

4. A 解析: $\because$ 集合 $B=\{x | x^2-4x+m=0\}, 1 \in B$,
 $\therefore 1-4+m=0$. 解得 $m=3$. $\therefore B=\{x | x^2-4x+3=0\}=\{1, 3\}$. 故选 A.

5. ABC 解析:因为 $a \in A, 8-a \in A$,所以当 $a=2$ 时,
 $8-a=6 \in A$,符合题意;当 $a=4$ 时, $8-a=4 \in A$,
 符合题意;当 $a=6$ 时, $8-a=2 \in A$,符合题意;当
 $a=8$ 时, $8-a=0 \notin A$,不符合题意. 综上, $a=2$ 或
 $a=4$ 或 $a=6$,故选 ABC.

6. 9

7. $\{4, 3, 2, 1\}$ 解析:根据题意知, $5-x$ 是 12 的因数,
 所以 $5-x$ 可能的取值为 $1, 2, 3, 4, 6, 12$. 则对应的
 x 的值分别为 $4, 3, 2, 1, -1, -7$. 又因为 $x \in \mathbf{N}$,所
 以 x 的值可以为 $4, 3, 2, 1$. 故集合 A 用列举法可表
 示为 $\{4, 3, 2, 1\}$.

8. 解: $\because a = -\sqrt{3} = 0 + \sqrt{3} \times (-1)$,又 $0, -1 \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore a \in A$.

$$\therefore b = \frac{1}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} +$$

$$\sqrt{3} \times \frac{1}{6}, \text{又 } \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \notin \mathbf{Z},$$

$$\therefore b \notin A.$$

$$\therefore c = (1-2\sqrt{3})^2 = 13 + \sqrt{3} \times (-4), \text{又 } 13, -4 \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore c \in A.$$

素养提升

1. B 解析: $\because P = \{x \in \mathbf{N} | 2 < x \leq k\}$,且集合 P 中恰有
 4 个元素, $\therefore P = \{3, 4, 5, 6\}$. $\therefore 6 \leq k < 7$.

2. ABD 解析: $\because 1$ 是整数, $\therefore$ 实数 1 是整数集 $\mathbf{Z}$ 中的
 元素;由 $x = |x|$ 得, $x \geq 0$, $\therefore$ 实数 1 是集合 $\{x | x =$
 $|x|\}$ 中的元素;实数 1 不满足 $-1 < x < 1$, $\therefore$ 实数 1
 不是集合 $\{x \in \mathbf{N} | -1 < x < 1\}$ 中的元素;当 $x = 1$
 时, $\frac{x-1}{x+1} = 0$,满足 $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$, $\therefore$ 实数 1 是集合
 $\left\{x \in \mathbf{R} \left| \frac{x-1}{x+1} \leq 0 \right.\right\}$ 中的元素. 故选 ABD.

3. C 解析:①集合 B 不是“好集”. 假设集合 B 是“好
 集”,因为 $-1 \in B, 1 \in B, -1-1 = -2 \notin B$,这与
 $-2 \in B$ 矛盾. ②有理数集 $\mathbf{Q}$ 是“好集”. 因为 $0 \in \mathbf{Q}$,
 $1 \in \mathbf{Q}$,对任意的 $x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}$,都有 $x-y \in \mathbf{Q}$,且 $x \neq$
 0 时, $\frac{1}{x} \in \mathbf{Q}$,所以有理数集 $\mathbf{Q}$ 是“好集”. ③因为集
 合 A 是“好集”,所以 $0 \in A$. 若 $y \in A$,则 $0-y \in A$,
 即 $-y \in A$. 若 $x \in A$,则 $x+y = x-(-y) \in A$.

4. 2 1 解析:当 $x=0$ 时, $x=-x=|x|=\sqrt{x^2}=-\sqrt[3]{x^3}=0$,此时集合中有 1 个元素; $\because \sqrt{x^2}=|x|$,
 $-\sqrt[3]{x^3}=-x$. 当 $x>0$ 时, $x=|x|$,此时集合
 中有 2 个元素;当 $x<0$ 时, $-x=|x|$,此时集合中
 有 2 个元素. $\therefore$ 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所
 组成的集合中最多含有 2 个元素,最少含有 1 个
 元素.

5. 解:(1) $\because 1 \in A, \therefore a \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0. \therefore a = 2$.

(2)①当 $a=0$ 时, $-3x+1=0, \therefore x = \frac{1}{3}$. 满足题意;

②当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = (-3)^2 - 4a = 0, \therefore a = \frac{9}{4}$. 满足
 题意.

综上,当 $a=0$ 或 $a=\frac{9}{4}$ 时, A 为单元素集合.

(3)当 $a \neq 0$,且 $\Delta = (-3)^2 - 4a > 0$,即 $a < \frac{9}{4}$ 且 $a \neq 0$
 时,方程 $ax^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,
 此时 A 为双元素集合.

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left\{a \left| a < \frac{9}{4} \text{ 且 } a \neq 0 \right.\right\}$.

6. 解:(1)当 a 与 b 一个为奇数,一个为偶数时,集合
 M 中的元素 (a, b) 满足 $a \times b = 36, a, b \in \mathbf{N}^*$.

$$\therefore 1 \times 36 = 36, 3 \times 12 = 36, 4 \times 9 = 36, 9 \times 4 = 36,$$

$$12 \times 3 = 36, 36 \times 1 = 36,$$

∴当 a 与 b 一个为奇数, 一个为偶数时, 集合 $M = \{(1, 36), (3, 12), (4, 9), (9, 4), (12, 3), (36, 1)\}$.

(2)当 a 与 b 同为奇数或同为偶数时, 集合 M 中的元素 (a, b) 满足 $a + b = 36, a, b \in \mathbf{N}^*$.

$$\therefore 1 + 35 = 36, 2 + 34 = 36, 3 + 33 = 36, \dots, 34 + 2 = 36, 35 + 1 = 36,$$

∴当 a 与 b 同为奇数或同为偶数时, 集合 M 中共有 35 个元素.

易错辨析

1. A 解析: 因为 $2 \in A$, 所以当 $m = 2$ 时, $m^2 - 3m + 2 = 0$, 不满足集合中元素的互异性, 舍去; 当 $m^2 - 3m + 2 = 2$ 时, 解得 $m = 0$ 或 $m = 3$. ①当 $m = 0$ 时, 不满足集合中元素的互异性, 舍去; ②当 $m = 3$ 时, 此时集合 $A = \{0, 3, 2\}$, 符合题意. 故选 A.

2. B 解析: 解方程组 $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ 故用列举法可表示为 $\{(-1, 1), (0, 0)\}$. 故选 B.

小测试(二) 集合间的基本关系

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓

2. C 3. B

基础过关

1. C 解析: 解方程 $x^2 + 2x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = -2$. 所以 $B = \{-2, 0\}$. 又因为 $A = \{1, -2, 0, 2\}$, 所以 $A \supseteq B$. 故选 C.

2. B 解析: 选项 A 中, 集合 $A = \{0, 1\}$ 是数集, 集合 $B = \{(0, 1)\}$ 是点集, 二者不是同一集合; 选项 B 中, $A = \{2, 3\}, B = \{3, 2\}$, 由集合中元素的无序性可知, 二者是同一集合; 选项 C 中, $A = \{x | -1 < x \leq 1, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}, B = \{1\}$, 二者不是同一集合; 选项 D 中, $A = \emptyset, B = \{x | \sqrt{x} \leq 0\} = \{0\}$, 二者不是同一集合. 综上所述, 选项 B 正确.

3. AD 解析: 集合 $M = \{x | -\sqrt{3} < x < \sqrt{5}, x \in \mathbf{Z}\} = \{-1, 0, 1, 2\}$. 对于选项 A, $P = \{-1, 0, 2\}$ 显然是集合 M 的子集, 所以选项 A 正确; 对于选项 B, $Q = \{-2, -1, 0, 1\}$ 显然不是集合 M 的子集, 所以选项 B 不正确; 对于选项 C, 因为 $R = \{y | -1 < y < \pi, y \in \mathbf{Z}\} = \{0, 1, 2, 3\}$, 所以集合 R 不是集合 M 的子集, 所以选项 C 不正确; 对于选项 D, 因为 $S = \{x | |x| \leq$

$\sqrt{3}, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}$, 所以集合 S 是集合 M 的子集, 所以 D 选项正确. 故选 AD.

4. B 解析: 因为 $N = \{x | x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}, M = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $N \subseteq M$. 故选 B.

5. AB 解析: 因为集合 A 恰有两个子集, 则集合 A 中只有一个元素, 当 $a = 0$ 时, $-2x - 1 = 0$, 所以 $x = -\frac{1}{2}$. 则 $A = \{-\frac{1}{2}\}$, 满足题意; 当 $a \neq 0$, $\Delta = 4 + 4a = 0$, 即 $a = -1$ 时, $-x^2 - 2x - 1 = 0$, 所以 $x = -1$. 则 $A = \{-1\}$, 满足题意. 综上, $a = 0$ 或 $a = -1$.

6. 7 解析: ∵集合 $A = \{1, 2, 3\}$, ∴集合 A 的真子集为 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$, 共 7 个.

7. $A = B$ 解析: ∵ $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{9}(2k+1), k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{5}{9}, -\frac{3}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{3}{9}, \frac{5}{9}, \dots\right\}$, $B = \left\{x \mid x = \frac{4}{9}k \pm \frac{1}{9}, k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{5}{9}, -\frac{3}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{3}{9}, \frac{5}{9}, \dots\right\}$, 故 $A = B$.

8. 解: (1)解 $x^2 - 8x + 15 = 0$, 得 $x = 3$ 或 $x = 5$. 故 $A = \{3, 5\}$.

当 $a = \frac{1}{5}$ 时, 解 $\frac{1}{5}x - 1 = 0$, 得 $x = 5$.

故 $B = \{5\}$. ∴ $B \subseteq A$.

(2)①当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$, 此时 $a = 0$.

②当 $B \neq \emptyset$ 时, 则 $a \neq 0$.

解 $ax - 1 = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$.

故集合 $B = \left\{\frac{1}{a}\right\}$.

∵ $B \subseteq A, A = \{3, 5\}$,

∴ $\frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5$. 解得 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{5}$.

综上, 实数 a 的所有可能取值为 0 或 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$.

素养提升

1. B 解析: A 的子集中含有元素 0 的子集为 $\{0\}, \{0, -1\}, \{0, 1\}, \{0, -1, 1\}$, 共 4 个. 故选 B.

2. BD 解析: ∵集合 $A = \{x | mx^2 - 2x + 1 = 0\} = \{n\}$,

∴ $\begin{cases} m = 0, \\ -2n + 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4m = 0, \\ n = -\frac{2}{2m}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 0, \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或

$\begin{cases} m = 1, \\ n = 1. \end{cases}$ ∴ $m + n = \frac{1}{2}$ 或 $m + n = 2$. 故选 BD.

3. C 解析:由题意知,集合 $\{-1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ 的所有非空子集中,伙伴关系集合有 $\{-1\}, \{\frac{1}{2}, 2\}, \{\frac{1}{3}, 3\}, \{-1, \frac{1}{2}, 2\}, \{-1, \frac{1}{3}, 3\}, \{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3\}, \{-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3\}$,共7个.故选C.

4. -2 解析:由题意,得 $m^2=4$ 或 $m^2=4m-4$.解得 $m=\pm 2$.当 $m=-2$ 时, $A=\{3, 4, -12\}, B=\{3, 4\}$,符合题意;当 $m=2$ 时, $A=\{3, 4, 4\}$,与集合中元素的互异性矛盾,舍去.综上, $m=-2$.

5. 解:(1)若 $A \neq \emptyset$,则有 $2a+1 \leq 3a-5$,解得 $a \geq 6$.故实数 a 的取值范围为 $\{a|a \geq 6\}$.

(2)若 $A \subseteq B$,则分两种情况讨论:

①当 $A = \emptyset$ 时,满足题意,

则 $3a-5 < 2a+1$,解得 $a < 6$.

②当 $A \neq \emptyset$ 时,

$$(i) \begin{cases} 3a-5 < -1, \\ 2a+1 \leq 3a-5, \end{cases} \text{无解.}$$

$$(ii) \begin{cases} 2a+1 > 16, \\ 2a+1 \leq 3a-5, \end{cases} \text{解得 } a > \frac{15}{2}.$$

综上所述,若 $A \subseteq B$,实数 a 的取值范围为 $\{a|a < 6 \text{ 或 } a > \frac{15}{2}\}$.

6. 解:(1)由题意,得方程 $x^2+2x-a=0$ 有实数解.

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times (-a) \geq 0. \therefore a \geq -1.$$

故实数 a 的取值范围是 $\{a|a \geq -1\}$.

(2) $\because N = \{x|x^2+x=0\} = \{0, -1\}$,且 $M \subseteq N$,

①当 $M = \emptyset$ 时, $\Delta = 2^2 - 4 \times (-a) < 0$,得 $a < -1$.

②当 $M \neq \emptyset$ 时,

(i)当 $\Delta = 0$ 时, $a = -1$,

此时 $M = \{-1\}$,满足 $M \subseteq N$,符合题意.

(ii)当 $\Delta > 0$ 时, $a > -1$, M 中有两个元素,

若 $M \subseteq N$,则 $M = N$,从而 $\begin{cases} -1+0=-2, \\ (-1) \times 0 = -a, \end{cases}$ 无解.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\{a|a \leq -1\}$.

易错辨析

1. AC 解析:空集是自身的子集,A正确;0不是空集中的元素,B错误;空集是任何非空集合的真子集,C正确; $\{0\}$ 是含一个元素0的集合,不是空集,D错误.

2. C 解析:因为 $B \subseteq A$,①当 $B = \emptyset$ 时,符合题意,则有 $2a > a+3$,所以 $a > 3$;②当 $B \neq \emptyset$ 时,则有

$$\begin{cases} 2a \leq a+3, \\ 2a \geq 2, \\ a+3 \leq 6, \end{cases} \text{解得 } 1 \leq a \leq 3. \text{ 综上所述,实数 } a \text{ 的取值范围是 } \{a|a \geq 1\}. \text{ 故选 C.}$$

小测试(三) 集合的并、交运算

预习自评

1. (1)× (2)× (3)√ (4)√

2. B 3. C

基础过关

1. B 解析:解不等式 $3x-7 \geq 8-2x$,得 $x \geq 3$.因此集合 $B = \{x|x \geq 3\}$.因为集合 $A = \{x|2 \leq x < 4\}$,所以 $A \cup B = \{x|x \geq 2\}$.故选B.

2. D 解析:因为 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$,所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.故选D.

3. D 解析: $\because A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, \therefore A \cap B = \{1, 2\}$. $\because C = \{2, 3, 4\}, \therefore (A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$.故选D.

4. AB 解析:由 $\{1, 3\} \cup A = \{1, 3, 5\}$ 知, $A \subseteq \{1, 3, 5\}$,且 A 中至少有1个元素是5,故选AB.

5. C 解析:由于 $a^2+3 \geq 3$,且 $A \cap B = \{1\}$,则 $a=1$.所以 $B = \{1, 4\}$.满足 $A \cap B = \{1\}$,故选C.

6. $\{1, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}\}$ 解析:因为 $B = \{y|y = x^2, x \in A\} = \{1, 4, \frac{1}{4}\}$, $A = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$,所以 $A \cup B = \{1, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}\}$.

7. $\{3, 5\} \quad \{2, 3\}$ 解析:设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - px + 15 = 0$ 的两根,则 $x_1 x_2 = 15$.由已知条件可知 $x_1, x_2 \in \{2, 3, 5\}$,所以 $x_1 = 3, x_2 = 5$ 或 $x_1 = 5, x_2 = 3$.所以 $A = \{3, 5\}$.设 x_3, x_4 是方程 $x^2 - 5x + q = 0$ 的两根,所以 $x_3 + x_4 = 5$.由已知条件可知 $x_3, x_4 \in \{2, 3, 5\}$,所以 $x_3 = 3, x_4 = 2$ 或 $x_3 = 2, x_4 = 3$.所以 $B = \{2, 3\}$.

8. 解:(1)因为 $A \cup B = A$,则 $B \subseteq A$.

集合 B 有两种情况:

①当 $B = \emptyset$ 时,则 m 满足 $2m-1 \geq m+3$,解得 $m \geq 4$.

②当 $B \neq \emptyset$ 时,则 m 满足 $\begin{cases} 2m-1 < m+3, \\ m+3 \leq 8, \\ 2m-1 \geq -2, \end{cases}$

解得 $-\frac{1}{2} \leq m < 4$.

综上,实数 m 的取值范围是 $\left\{m \mid m \geq -\frac{1}{2}\right\}$.

(2) 因为 $A = \{x \mid -2 < x < 8\}$, $8 - (-2) = 10$, 所以若 $A \cap B = \{x \mid a < x < b\}$, 且 $b - a = 3$, 应有以下三种情况:

① 当 $A \cap B = B$ 时,

$$\text{则 } m \text{ 满足 } \begin{cases} m+3-(2m-1)=3, \\ m+3 \leq 8, \\ 2m-1 \leq m+3, \\ 2m-1 \geq -2, \end{cases} \quad \text{解得 } m=1.$$

② 当 $A \cap B = \{x \mid 2m-1 < x < 8\}$ 时,

$$\text{则 } m \text{ 满足 } \begin{cases} 8-(2m-1)=3, \\ m+3 > 8, \\ -2 < 2m-1 < 8, \end{cases}$$

此时满足条件的 m 不存在.

③ 当 $A \cap B = \{x \mid -2 < x < m+3\}$ 时,

$$\text{则 } m \text{ 满足 } \begin{cases} m+3-(-2)=3, \\ -2 < m+3 < 8, \\ 2m-1 < -2, \end{cases}$$

解得 $m = -2$.

综上, m 的值为 1 或 -2.

素养提升

1. C 解析: $\because A \cap B = \{1\}$, $\therefore 1 \in B$. $\therefore 1$ 是方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的根. $\therefore 1^2 - 4 \times 1 + m = 0$. $\therefore m = 3$. $\therefore B = \{x \mid x^2 - 4x + m = 0\} = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$. 满足题意, 故选 C.

2. CD 解析: 由 Venn 图可知, 阴影部分所表示的集合为集合 M, N 的交集, 由题意, 得 $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $N = \{1, 3, 5, \dots\}$. $\therefore M \cap N = \{1, 3\}$. 故选 CD.

3. ABD 解析: 由题意, 得 $P = \left\{x \mid x \geq -\frac{5}{4}\right\}$, $T = \left\{x \mid x \geq -\frac{5}{4}\right\}$, $\therefore P \cap T = \left\{x \mid x \geq -\frac{5}{4}\right\}$, 故 A 选项正确, C 选项错误; $P \cup T = \left\{x \mid x \geq -\frac{5}{4}\right\}$, B 选项正确; $P = T$, D 选项正确. 故选 ABD.

4. -1 2 解析: 由题意, 得 $B \cup C = \{x \mid -3 < x \leq 4\}$. 又 $\because A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $\therefore A \subseteq (B \cup C)$. $\therefore A \cap (B \cup C) = A$. $\therefore \{x \mid a \leq x \leq b\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$. $\therefore a = -1, b = 2$.

5. 解: (1) 由题意, 得 $A = \{-2, 2\}$.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 解方程 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$, 得 $x = 2$.

$\therefore B = \{2\}$. $\therefore A \cap B = \{2\}$.

(2) 由 $A \cap B = B$, 得 $B \subseteq A$.

① 当 $a = 0$ 时, $-x + 2 = 0$, $\therefore x = 2$.

$\therefore B = \{2\}$, 符合题意.

② 当 $a \neq 0$ 时, 由 $ax^2 - (2a+1)x + 2 = 0$, 得

$$a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) = 0, \text{ 解得 } x=2 \text{ 或 } x=\frac{1}{a}.$$

$$\because B \subseteq A, \therefore \frac{1}{a} = 2 \text{ 或 } \frac{1}{a} = -2.$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2} \text{ 或 } a = -\frac{1}{2}.$$

故实数 a 的取值集合为 $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

6. 解: (方法一) 设听了数学讲座、历史讲座、音乐讲座的同学构成的集合分别为 A, B, C ,

因为听了数学讲座的人数为 75 人,

所以 A 中元素的个数为 75.

同理, B 中元素的个数为 68.

C 中元素的个数为 61.

$A \cap B$ 中元素的个数为 17,

$A \cap C$ 中元素的个数为 12,

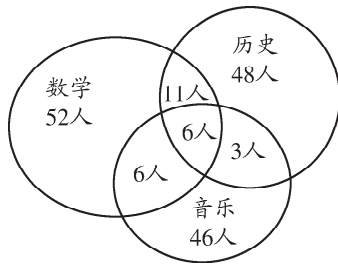
$B \cap C$ 中元素的个数为 9,

$A \cap B \cap C$ 中元素的个数为 6.

那么 $A \cup B \cup C$ 中元素的个数为 $75 + 68 + 61 - 17 - 12 - 9 + 6 = 172$, 即听讲座的总人数为 172 人.

(方法二) 作出 Venn 图, 如图所示.

由图知, 听讲座的总人数为 $52 + 48 + 46 + 11 + 6 + 3 + 6 = 172$ (人).



易错辨析

1. A 解析: 因为集合 M 中的代表元素是直线, 集合 N 中的代表元素是圆, 所以两集合没有公共元素, 故选 A.

2. AC 解析: ① 若 $A = \emptyset$, 则 $2a > a + 3$, 解得 $a > 3$.

$$\text{② 若 } A \neq \emptyset, \text{ 则 } \begin{cases} 2a \geq -1, \\ a+3 \leq 5, \\ 2a \leq a+3, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{2} \leq a \leq 2.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $a > 3$ 或 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$.

故选 AC.

小测试(四) 集合的补集及综合运用

预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)✓

2. C 3. $\{x|1 \leq x \leq 5\}$

基础过关

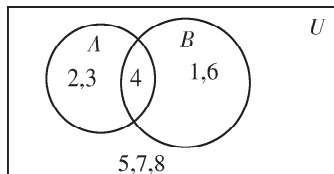
1. D 解析: $\because$ 全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3\}$, $\therefore M \cup N = \{1, 2, 3\}$. $\therefore \complement_U(M \cup N) = \{4\}$. 故选 D.

2. D 解析: 易知 $B = \{x|x > 3\}$, $\therefore \complement_{\mathbb{R}} B = \{x|x \leq 3\}$, 又 $A = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\therefore A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{0, 1, 2, 3\}$. 故选 D.

3. B 解析: 题图中阴影部分对应的集合为 $\complement_U(M \cup N)$. 因为 $M = \{x | -1 < x < 1\}$, $N = \{x | 0 < x < 2\}$. 所以 $M \cup N = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$. 故选 B.

4. AB 解析: $\because A \cup (\complement_U A) = U$. $\therefore A = \{1, 3, 9\}$, $\therefore |a - 5| = 3$. 解得 $a = 2$ 或 $a = 8$.

5. B 解析: 易知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 根据题意作出 Venn 图, 如图所示. 由图可知 $B = \{1, 4, 6\}$.



6. 2 解析: $\because \complement_U A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $\therefore A = \{x | 1 \leq x < 2\}$. $\therefore b = 2$.

7. 1 -2 解析: 因为 $A = \{x | 2x^2 - 5x + 2 = 0\} = \{\frac{1}{2}, 2\}$, $\complement_U A = B$, 所以 $B = \{-2, 3\}$. 则 $3^a = 3$, $\frac{b}{a} = -2$, 所以 $a = 1, b = -2$.

8. 解: (1) 因为 $B = \{x | x = 3n, n \in \mathbb{Z}, \text{ 且 } x \in U\}$, 所以 $B = \{3, 6, 9\}$. 所以集合 B 的子集为 $\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\}, \{3, 6, 9\}$. (2) 由(1)知, $B = \{3, 6, 9\}$, 所以 $\complement_U B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. 因为 $A = \{x | 3 \leq x \leq 7, \text{ 且 } x \in U\}$, 所以 $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. 所以 $A \cap B = \{3, 6\}$, $A \cup \complement_U B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

素养提升

1. BD 解析: $\because A = \{x | x \leq -1\}, B = \{x | x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbb{R}$, $\therefore a \leq -1$. $\therefore$ 实数 a 的值可以为 -1 .

-2. 故选 BD.

2. D 解析: 由题图可知, 阴影部分中的元素属于 A , 不属于 B , 属于 C , 则阴影部分表示的集合是 $[A \cap (\complement_U B)] \cap C$.

3. D 解析: 将各个选项中的数代入检验, 可知选 D.

4. 8 解析: 由题意, 得满足条件的 (A, B) 对有:

(1) $A = \emptyset, B = \{1, 2\}$; (2) $A = \{1\}, B = \{2\}$; (3) $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$; (4) $A = \{2\}, B = \{1\}$; (5) $A = \{2\}, B = \{1, 2\}$; (6) $A = \{1, 2\}, B = \emptyset$; (7) $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$; (8) $A = \{1, 2\}, B = \{2\}$, 共 8 个.

5. 解: $\because P = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$,

$\therefore \complement_U P = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -2\}$.

$\because M \subseteq \complement_U P, M = \{x | 3a < x < 2a + 5\}$,

① 当 $M = \emptyset$ 时, 则 $3a \geq 2a + 5$, 解得 $a \geq 5$.

② 当 $M \neq \emptyset$ 时, (i) $\begin{cases} 3a < 2a + 5, \\ 2a + 5 \leq -2, \end{cases}$ 解得 $a \leq -\frac{7}{2}$.

(ii) $\begin{cases} 3a < 2a + 5, \\ 3a \geq 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3} \leq a < 5$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a \geq \frac{1}{3} \text{ 或 } a \leq -\frac{7}{2}\}$.

6. 解: 解方程 $x^2 - x - 2 = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 2$.

故 $A = \{-1, 2\}$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 为 $x^2 + x = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 0$.

$\therefore B = \{-1, 0\}$. $\therefore \complement_U B = \{x | x \neq -1, \text{ 且 } x \neq 0\}$.

$\therefore (\complement_U B) \cap A = \{2\}$.

(2) 由 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$ 可知, $B \subseteq A$.

方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0$.

① 当 $\Delta = 0$, 即 $m = 2$ 时,

方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 为 $x^2 + 2x + 1 = 0$, 解得 $x = -1$. 故 $B = \{-1\}$. 此时满足 $B \subseteq A$.

② 当 $\Delta > 0$, 即 $m \neq 2$ 时,

方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 有两个不同的解, 故集合 B 中有两个元素.

又 $B \subseteq A$, 且 $A = \{-1, 2\}$, 所以 $A = B$.

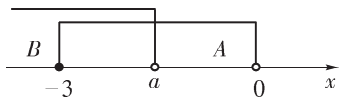
故 $-1, 2$ 为方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 的两个解,

由根与系数之间的关系, 得 $\begin{cases} -m = (-1) + 2, \\ m - 1 = (-1) \times 2, \end{cases}$

解得 $m = -1$. 综上, m 的取值为 2 或 -1 .

易错辨析

D 解析: 因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 所以集合 A, B 有公共元素, 在数轴上表示出两个集合, 如图所示, 易知 $a > -3$.



小测试(五) 充分条件与必要条件

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓

2. A

3. (1)充分条件 必要条件 (2)必要条件 充分条件

基础过关

1. B

2. A

3. B 解析: $\because \begin{cases} ac > bc, \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow a > b, \begin{cases} ac > bc, \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow a < b,$

$\therefore ac > bc \not\Rightarrow a > b$, 而由 $a > b \not\Rightarrow ac > bc$, $\therefore$ “ $ac > bc$ ”既不是“ $a > b$ ”的充分条件, 也不是其必要条件, 故 A,

C 错误. 又 $\begin{cases} ac = bc, \\ c \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = b, \begin{cases} ac = bc, \\ c = 0 \end{cases} \not\Rightarrow a = b$, $\therefore$ 由

$ac = bc \not\Rightarrow a = b$, 而由 $a = b \Rightarrow ac = bc$, $\therefore$ “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件, 不是充分条件, $\therefore$ B 正确, D 错误. 故选 B.

4. A

5. ACD

6. 充分 解析: 当 $A \cap B = \{4\}$ 时, $m^2 = 4$, 所以 $m = \pm 2$. 所以“ $m = 2$ ”是“ $A \cap B = \{4\}$ ”的充分条件.

7. ②③④ ①④

8. 解: (1) 数 a 能被 6 整除, 则一定能被 3 整除, 反之不一定成立, 即 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的充分条件, 但 p 不是 q 的必要条件.

(2) 因为 $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ 或 $x < -1$,

所以 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$.

所以 p 是 q 的充分条件, 但 p 不是 q 的必要条件.

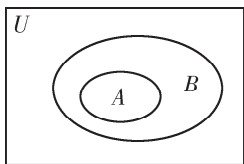
(3) $b^2 = ac \not\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, 如 $b = 0, c = 0$ 时, $b^2 = ac$, 而

$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ 无意义. 但 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = ac$.

所以 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$.

所以 p 是 q 的必要条件, 但 p 不是 q 的充分条件.

(4) 画出 Venn 图, 如图所示.



结合图形可知, $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow \complement_U B \subseteq \complement_U A$. 反之也成立,

所以 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$.

所以 p 是 q 的充分条件, 且 p 是 q 的必要条件.

素养提升

1. B

2. A

3. ACD 解析: A 正确, 由于“ m 是有理数” $\Rightarrow$ “ m 是实数”, 所以“ m 是有理数”是“ m 是实数”的充分条件; B 不正确, 因为“ $x \in A$ ” $\not\Rightarrow$ “ $x \in A \cap B$ ”, 所以“ $x \in A \cap B$ ”不是“ $x \in A$ ”的必要条件; C 正确, 由于“ $x = 3$ ” $\Rightarrow$ “ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ”, 所以“ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ”是“ $x = 3$ ”的必要条件; D 正确, 由于“ $x > 3$ ” $\Rightarrow$ “ $x^2 > 4$ ”, 所以“ $x > 3$ ”是“ $x^2 > 4$ ”的充分条件.

4. $\{b | b < 2\}$ 解析: $\because -a < x - 1 < a \Leftrightarrow 1 - a < x < 1 + a$. $\therefore \{x | -1 < x < 3\} \subseteq \{x | 1 - a < x < 1 + a\}$,

$\therefore \begin{cases} 1 - a \leq -1, \\ 1 + a \geq 3. \end{cases}$ 解得 $a \geq 2$. 又 $a > b$ 恒成立, $\therefore b < 2$.

故实数 b 的取值范围是 $\{b | b < 2\}$.

5. 解: $\because q: x < 1 + a$ 或 $x > 1 - a$, $\therefore a \leq 0$.

$\therefore p$ 是 q 的必要条件, $\therefore q \Rightarrow p$.

$\therefore \{x | x < 1 + a$ 或 $x > 1 - a\} \subseteq \{x | x < -2$ 或 $x > 10\}$.

$\therefore \begin{cases} 1 + a \leq -2, \\ 1 - a \geq 10, \end{cases}$ 解得 $a \leq -9$.

故实数 a 的取值范围是 $\{a | a \leq -9\}$.

6. 解: (1) 由题意知, $A \neq \emptyset$ 且 $A \subseteq B$,

所以 $B \neq \emptyset$, 则 $a < 3a$. 所以 $a > 0$.

则 $\begin{cases} a \leq 2, \\ 3a \geq 4, \end{cases}$ 解得 $\frac{4}{3} \leq a \leq 2$.

故实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid \frac{4}{3} \leq a \leq 2\right\}$.

(2) 要满足 $A \cap B = \emptyset$,

则①当 $B = \emptyset$ 时, $a \geq 3a$, 即 $a \leq 0$.

②当 $B \neq \emptyset$ 时, $a < 3a$, 即 $a > 0$.

则 $a \geq 4$ 或 $3a \leq 2$. 解得 $a \geq 4$ 或 $0 < a \leq \frac{2}{3}$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid a \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } a \geq 4\right\}$.

易错辨析

BC 解析: 由 p , 得 $x^2 - 2x - 8 = 0$. 解得 $x = -2$ 或 $x = 4$. 由 q , 得 $x^2 - 3x - 4 = 0 (x \geq 0)$. 解得 $x = 4$. 所以 p 是 q 的必要条件, p 是 q 的不充分条件.

小测试(六) 充要条件

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓

2. A 3. A

基础过关

1. A 解析:当 $B=90^\circ$ 或 $C=90^\circ$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形,但不能推出 $AB^2+AC^2=BC^2$. 故选 A.

2. A 解析:因为 $a=2 \Rightarrow (a-1)(a-2)=0$, 但是 $(a-1)(a-2)=0 \Rightarrow a=1$ 或 $a=2$, 所以“ $a=2$ ”是“ $(a-1)(a-2)=0$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

3. B 解析:由题意知,“返还家乡”可推出“攻破楼兰”,所以“攻破楼兰”是“返还家乡”的必要条件.

4. BCD 解析:由题意知,满足条件的 x 的取值集合应该是集合 $\{x|-1 \leq x < 1\}$ 的真子集,所以 B, C, D 选项都符合题意,故选 BCD.

5. C 解析: $\because A \cup B = \{x \in \mathbf{R} | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, $\therefore A \cup B = C$. $\therefore$ “ $x \in (A \cup B)$ ”是“ $x \in C$ ”的充要条件.

6. 充分不必要 解析:关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解等价于 $\Delta=1-4m \geq 0$, 解得 $m \leq \frac{1}{4}$. 由条件“ $m < \frac{1}{4}$ ”可以推出结论“ $m \leq \frac{1}{4}$ ”;反过来,由结论“ $m \leq \frac{1}{4}$ ”推不出条件“ $m < \frac{1}{4}$ ”,因此“ $m < \frac{1}{4}$ ”是“关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解”的充分不必要条件.

7. $\{a|a \leq 2\}$ $\{a|a \geq 3\}$ 解析:命题 p : $-a < x < a$, 命题 q : $-2 < x < 3$, 若 p 是 q 的充分条件, 则 $\{x|-a < x < a\} \subseteq \{x|-2 < x < 3\}$, 所以 $\begin{cases} -a \geq -2, \\ a \leq 3. \end{cases}$ 所以 $a \leq 2$. 若 p 是 q 的必要条件, 则 $\{x|-2 < x < 3\} \subseteq \{x|-a < x < a\}$, 所以 $\begin{cases} -a \leq -2, \\ a \geq 3. \end{cases}$ 所以 $a \geq 3$.

8. 解:此题意,分两种情况讨论.

①当 $a^2-3a+2=0$ 时,解得 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时,原不等式为 $2>0$ 恒成立,

所以 $a=1$ 符合题意.

当 $a=2$ 时,原不等式为 $x+2>0$, 则 $x>-2$.

所以它的解集不是 $\mathbf{R}$. 故 $a=2$ 不符合题意.

②当 $a^2-3a+2 \neq 0$ 时,

则 $\begin{cases} a^2-3a+2>0, \\ \Delta=(a-1)^2-8(a^2-3a+2)<0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a < 1 \text{ 或 } a > 2, \\ a < 1 \text{ 或 } a > \frac{15}{7}. \end{cases}$ 故 $a < 1$ 或 $a > \frac{15}{7}$.

综上所述,满足题意的充要条件是

$\left\{a \mid a \leq 1 \text{ 或 } a > \frac{15}{7}\right\}$.

素养提升

1. B 解析:因为一次函数 $y = -\frac{m}{n}x + \frac{1}{n}$ 经过第一、三、四象限,所以 $-\frac{m}{n} > 0$, $\frac{1}{n} < 0$. 则 $m > 0$, $n < 0$. 但此为充要条件,因此,观察各选项知其必要不充分条件为 $mn < 0$. 故选 B.

2. B 解析:对于选项 A, 当 $x=1, y=1$ 时, 满足 $x+y=2$, 但命题不成立; 对于选项 C, D, 当 $x=-2, y=-3$ 时, 满足 $x^2+y^2>2, xy>1$, 但命题不成立, 也不符合题意. 故选 B.

3. BD 解析: A 中电路图, 开关 S 闭合则灯泡 L 亮, 而灯泡 L 亮时开关 S 不一定闭合, 故 A 中 p 是 q 的充分不必要条件; B 中电路图, 开关 S 闭合则灯泡 L 亮, 灯泡 L 亮则开关 S 一定闭合, 故 B 中 p 是 q 的充要条件; C 中电路图, 开关 S 闭合时灯泡 L 不一定亮, 灯泡 L 亮则开关 S 一定闭合, 故 C 中 p 是 q 的必要不充分条件; D 中电路图, 开关 S 闭合则灯泡 L 亮, 灯泡 L 亮则开关 S 一定闭合, 故 D 中 p 是 q 的充要条件. 故选 BD.

4. 2 解析: 由 $|x| \leq 2$, 得 $-2 \leq x \leq 2$. 由题意, 得 $\{x|-2 \leq x \leq 2\} \subseteq \{x|x \leq a\}$, 所以 $a \geq 2$. 故 a 的最小值是 2.

5. 解: 由 $-2 \leq 1 - \frac{x-1}{3} \leq 2$, 得 $-2 \leq x \leq 10$.

$\therefore p$ 对应的集合 $A = \{x|-2 \leq x \leq 10\}$.

由 $(x-1+m)(x-1-m) \leq 0 (m>0)$, 得

$1-m \leq x \leq 1+m (m>0)$.

$\therefore q$ 对应的集合 $B = \{x|1-m \leq x \leq 1+m, m>0\}$.

$\therefore q$ 是 p 的必要不充分条件, $\therefore A \not\subseteq B$.

$\therefore \begin{cases} m>0, \\ 1-m < -2, \text{ 或 } \begin{cases} m>0, \\ 1-m \leq -2, \end{cases} \end{cases}$ 解得 $m \geq 9$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\{m|m \geq 9\}$.

6. 证明: 因为 $a \geq \frac{1}{2}$, 所以函数 $f(x) = -a^2x^2 + ax + c$

图象的对称轴方程为直线 $x = \frac{a}{2a^2} = \frac{1}{2a}$,

且 $0 < \frac{1}{2a} \leq 1$.

所以当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4} + c$.

先证充分性: 因为 $c \leq \frac{3}{4}$, 且 $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4} + c \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, 所以 $f(x) \leq 1$.

再证必要性: 因为 $f(x) \leq 1$, 所以只需 $f\left(\frac{1}{2a}\right) \leq 1$ 即可. 即 $\frac{1}{4} + c \leq 1$, 从而 $c \leq \frac{3}{4}$.

综上所述, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \leq 1$ 成立的充要条件是 $c \leq \frac{3}{4}$.

易错辨析

1. B 解析: 由 $\frac{1}{a} \leq 1$, 得 $a < 0$ 或 $a \geq 1$. 因为 $\{a | a > 1\} \subsetneq \{a | a < 0 \text{ 或 } a \geq 1\}$, 所以 “ $\frac{1}{a} \leq 1$ ” 是 “ $a > 1$ ” 的必要不充分条件. 故选 B.
2. AB 解析: 由已知, 得 $p \Rightarrow r, q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$. 则 $r \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow r$, A 正确, C 不正确; $p \Rightarrow q$, B 正确; $r \Rightarrow s$ 且 $s \Rightarrow r$, D 不正确, 故选 AB.

小测试(七) 全称量词与存在量词

预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)✗
2. 有些 存在
3. ①②④ ③

基础过关

1. A 解析: “任意”为全称量词, 选项 A 正确.
2. B 解析: 命题①中含有存在量词“有些”, 是存在量词命题; 命题②中全称量词省略, 可以叙述为“所有的正方形都是菱形”, 是全称量词命题; 命题③中全称量词省略, 可以叙述为“一切能被 6 整除的数也能被 3 整除”, 是全称量词命题; 命题④中有全称量词“任意”, 是全称量词命题. 故只有 1 个存在量词命题.
3. D 解析: A 选项中含有全称量词“任意的”, 因为 $a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$, 所以选项 A 是假命题. 选项 B 在叙述上没有全称量词, 但实际上是指“所有的”, 菱形的对角线不一定相等, 所以选项 B 是假命题, 选项 C 是存在量词命题. 故选 D.
4. ABD 解析: C 选项是全称量词命题, A, B, D 选项符合题意, 故选 ABD.
5. C 解析: 由题意, 得 $\neg p$ 为真命题, 即 $\forall x \in \mathbf{R}$,

$ax^2 + x + a \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $\Delta = 1 - 4a^2 < 0$, 解得 $a > \frac{1}{2}$ 或 $a < -\frac{1}{2}$. 故选 C.

6. $\exists x < 0, (1+x)(1-9x) > 0$ 解析: “有些”为存在量词, 因此可用存在量词命题来表述.
7. $\{a | a \leq 3\}$ 解析: $\because$ 对任意 $x > 3, x > a$ 恒成立, 即大于 3 的数恒大于 $a, \therefore a \leq 3$.
8. 解: (1) 是全称量词命题.

用符号表示为: $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

当 $a = 1, b = -2$ 时, 满足 $a > b$, 但 $\frac{1}{a} = 1 > \frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$, 所以该命题为假命题.

(2) 是存在量词命题.

用符号表示为: $\exists a, b \in \mathbf{R}, |a-b| = |a| + |b|$.

当 $a = b = 0$ 时, $|a-b| = |a| + |b|$, 所以该命题为真命题.

素养提升

1. C 解析: $\because \forall x \in [0, 2], p > x, \therefore p > 2. \because \exists x \in [0, 2], q > x, \therefore q > 0$. 故选 C.

2. BC 解析: 对于选项 A, 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} < 0$, 不

满足 $\forall x \in \mathbf{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$, 所以 A 是假命题; 对于选

项 B, 当 $x = 2$ 时, 满足 $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 所以 B 是真命题;

对于选项 C, 当 $x = 0$ 时, 满足 $x^2 + 2x - 3 < 0$, 所以 C 是真命题; 对于选项 D, 当 $x = -1$ 时, $|x+1| = 0$, 不满足 $\forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 0$, 所以 D 是假命题. 故选 BC.

3. ACD 解析: 因为中位数为 3, 所以 $x \geq 3$. 故选 ACD.

4. 5 解析: 因为命题 p “ $\exists x \geq 3$, 使得 $2x-1 < m$ ” 是假命题, 所以 $\forall x \geq 3, m \leq 2x-1$ 恒成立. 所以 $m \leq 2 \times 3 - 1$, 即 $m \leq 5$. 故实数 m 的最大值是 5.

5. 解: 因为命题 p “ $\forall x \in B, x \in A$ ” 是真命题, 所以 $B \subseteq A$.

$$\text{① 当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 则 } \begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ m+1 \geq -2, \\ 2m-1 \leq 5, \end{cases} \text{ 解得 } 2 \leq m \leq 3.$$

② 当 $B = \emptyset$ 时, 则 $m+1 > 2m-1$, 解得 $m < 2$.

综上, m 的取值范围是 $\{m | m \leq 3\}$.

6. 解: 假设存在整数 m , 使得命题 “ $\forall x \geq -\frac{1}{4}, -5 < 3-4m < x+1$ ” 是真命题.

因为当 $x \geq -\frac{1}{4}$ 时, $x+1 \geq \frac{3}{4}$,

所以 $-5 < 3-4m < \frac{3}{4}$. 解得 $\frac{9}{16} < m < 2$.

又因为 m 为整数, 所以 $m=1$.

故存在整数 $m=1$, 使得命题 “ $\forall x \geq -\frac{1}{4}, -5 < 3-4m < x+1$ ” 是真命题.

易错辨析

解: (1) 可以改写为 “所有的矩形都有一个外接圆”, 是全称量词命题.

(2) 可以改写为 “所有的非负实数都有两个平方根”, 是全称量词命题.

(3) 可以改写为 “ $\exists x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 使 $2x-y+1 < 0$ 成立”, 是存在量词命题.

小测试(八) 全称量词命题和存在量词命题的否定

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$

2. B 3. B

基础过关

1. D 解析: 存在量词命题的否定是全称量词命题, “ $\leq$ ” 的否定是 “ $>$ ”. 故选 D.

2. C 解析: 根据全称量词命题的否定形式可知, 命题 “ $\forall a \in \mathbf{R}$, 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 有实根” 的否定是 “ $\exists a \in \mathbf{R}$, 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 没有实根”. 故选 C.

3. D 解析: 根据 “任意” 的否定是 “存在”, “至多有 n 个” 的否定是 “至少有 $(n+1)$ 个”, 可知选 D.

4. ABC 解析: $\sqrt{2}$ 不是有理数, A 是真命题; $\pi \neq 3.14$, B 是真命题; $\because \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 21 < 0$, $\therefore$ 方程 $2x^2 + 3x + 21 = 0$ 没有实数根, C 是真命题; 等腰三角形可能有 120° 的角, 如由 $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ 所构成的等腰三角形, D 是假命题. 故选 ABC.

5. D 解析: $\because p$ 为假命题, $\therefore \neg p$ 为真命题, 即 $\forall x > 0, x+a-1 \neq 0$, 即 $\forall x > 0, x \neq 1-a$. $\therefore 1-a \leq 0$. 则 $a \geq 1$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\{a | a \geq 1\}$. 故选 D.

6. $\exists a, b \in \mathbf{R}$, 方程 $ax^2 + b = 0$ 无解或有两个解

7. 1 解析: 因为 “ $\forall x \in \mathbf{R}, m \geq -x^2 + 1$ ” 是真命题, 所以 $m \geq (-x^2 + 1)_{\max}$, 即 $m \geq 1$. 故实数 m 的最小值为 1.

8. 解: 两位同学的出题中实数 m 的取值范围是相同的. 理由如下:

$\because$ “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m \leq 0$ ” 的否定是 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m > 0$ ”,

又 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m \leq 0$ ” 是假命题, 则其否定 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m > 0$ ” 是真命题,

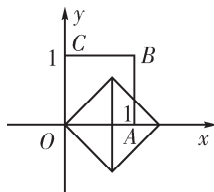
$\therefore$ 两位同学的出题中实数 m 的取值范围是相同的.

素养提升

1. D

2. A 解析: 因为 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + 1 \geq 0$ 是假命题, 所以 $\neg q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + 1 < 0$ 是真命题. 所以 $\Delta > 0$, 即 $a^2 - 4 > 0$. 解得 $a > 2$ 或 $a < -2$. 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

3. D 解析: 由题意, 根据正方形的对称性, 设正方形的初始位置为正方形 $OABC$, 画出图形, 如图所示. 因为正方形的边长为 1, 所以正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$. 当正方形 $OABC$ 绕 O 顺时针旋转时, 可以发现当对角线 OB 在横轴时, 如图所示, $x(\Omega)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 故结论①正确; 此时, $x(\Omega), y(\Omega)$ 有最大值 $\sqrt{2}$, 所以 $x(\Omega) + y(\Omega)$ 有最大值 $2\sqrt{2}$. 当正方形 $OABC$ 绕 O 顺时针旋转, 正方形有一边在横轴时, $x(\Omega), y(\Omega)$ 有最小值为 1, 所以 $x(\Omega) + y(\Omega)$ 有最小值为 2. 故结论②正确; 又因为在旋转过程中 (以旋转的角 $\theta \in [0^\circ, 45^\circ]$ 为例), $x(\Omega) = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \theta)$, $y(\Omega) = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \theta)$, 所以 $x(\Omega) = y(\Omega)$. 所以 $x(\Omega) - y(\Omega)$ 恒等于 0. 故结论③正确.



4. 存在三个正数 $a, b, c, a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{c}, c + \frac{1}{a}$ 三个数全都小于 2

5. 解: 因为 “ $\exists m \in \mathbf{R}$, 使得 $A \cap B \neq \emptyset$ ” 为假命题, 所以它的否定 “ $\forall m \in \mathbf{R}, A \cap B = \emptyset$ ” 为真命题.

则①当 $a < 0$ 时, $A = \{x | 0 \leq x \leq a\} = \emptyset$, 符合 $A \cap B = \emptyset$.

②当 $a \geq 0$ 时, 因为 $m^2 + 3 > 0$, 所以由 “ $\forall m \in \mathbf{R}, A \cap B = \emptyset$ ”, 得 $a < m^2 + 3$, $\forall m \in \mathbf{R}$ 恒成立.

因为 $m^2 + 3 \geq 3$, 所以 $0 \leq a < 3$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a < 3\}$.

6. 解: 若 p 是真命题, 则 $x+m-1 < 0$ 对于 $0 < x < 1$ 恒成立, 即 $m-1 < -x$ 对 $0 < x < 1$ 恒成立.

当 $0 < x < 1$ 时, $-1 < -x < 0$,

所以 $m-1 \leq -1$, 即 $m \leq 0$.

若命题 q 是假命题, 则 $\neg q: \exists x \in \{x | x > 0\}, mx^2 + 4x - 1 = 0$ 为真命题.

即关于 x 的方程 $mx^2 + 4x - 1 = 0$ 有正实数根.

当 $m=0$ 时, 方程为 $4x-1=0, x=\frac{1}{4}$, 有正实数根.

当 $m \neq 0$ 时, 依题意, 得 $\Delta = 16 + 4m \geq 0$, 即 $m \geq -4$.

设两个实数根分别为 x_1, x_2 .

①当方程有两个正实数根时,

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{m} > 0, \text{ 且 } x_1 x_2 = -\frac{1}{m} > 0.$$

解得 $m < 0$. 此时 $-4 \leq m < 0$.

②当方程有一正一负两个实数根时,

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{m} < 0, \text{ 解得 } m > 0. \text{ 此时 } m > 0.$$

综上所述, $m \geq -4$.

因为 p 是真命题, q 是假命题,

所以实数 m 的取值范围是 $\{m | -4 \leq m \leq 0\}$.

易错辨析

1. 存在一个能被 3 整除的数, 不能被 5 整除 解析: 原命题省略了全称量词“所有”, 故其否定为“存在一个能被 3 整除的数, 不能被 5 整除”.
2. $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 + 1 \geq 0$ 解析: 由全称量词命题的否定形式, 可得命题“ $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 + 1 < 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 + 1 \geq 0$ ”.

滚动卷(一) 小测试(一)至(八)

综合拔高

1. B 解析: 当 $x=y$ 时, $|x|=|y|$, 所以充分性成立; 当 $x=1, y=-1$ 时, $|x|=|y|$, 但是 $x \neq y$, 所以必要性不成立. 故选 B.
2. B 解析: 命题“ $\exists m \in \mathbf{R}$, 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有实数根”的否定是“ $\forall m \in \mathbf{R}$, 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 无实数根”. 故选 B.
3. B 解析: 对于 A 选项, 当 $x=3+\sqrt{5}, y=3-\sqrt{5}$ 时, $x-y=2\sqrt{5}$ 为无理数, 但 $x+y=6$ 为有理数, 充分性不成立, 不符合题意. 对于 B 选项, x 为无理数, y 为有理数, 所以 $x+y$ 为无理数, 充分性成立; 令 $x=1, y=\sqrt{2}$, 则 $x+y=1+\sqrt{2}$ 为无理数, 但不满足 x 为无理数, y 为有理数, 所以 x 为无理数, y 为有理数是 $x+y$ 为无理数的充分不必要条件, 符合题意. 对于 C 选项, 当 $x=1+\sqrt{2}, y=1-\sqrt{2}$ 时, $x+y=2$ 为有理数, 不满足充分性, 不符合题意. 对于 D 选

项, $-x-y$ 为无理数 $\Leftrightarrow x+y$ 为无理数, 互为充要条件, 不符合题意. 故选 B.

4. D 解析: ①中, 当 $x=0$ 时, $-x^2=0$, 故①是假命题; ②中, $x^2=5$, 则 $x=\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{5}$ 是无理数, 故②是假命题; ③中, 当 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时, $x^2-x-1=0$, 故③是真命题; ④中, 全称量词命题的否定是存在量词命题, 故④是真命题.
5. B 解析: 当 $x=1.8, y=0.9$ 时, 满足 $|x-y| < 1$, 但 $\langle 1.8 \rangle = 2, \langle 0.9 \rangle = 1$, 即 $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$; 当 $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ 时, 必有 $|x-y| < 1$, 所以“ $|x-y| < 1$ ”是“ $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ ”的必要不充分条件. 故选 B.
6. (1)①②③ (2)④ (3)① 解析: ① $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 或 $b=0$, 即 a, b 中至少有一个为 0; ② $a+b=0 \Leftrightarrow a, b$ 互为相反数, 即 a, b 可能均为 0, 也可能为一正一负; ③ $a(a^2+b^2)=0 \Leftrightarrow a=0$ 或 $\begin{cases} a=0, \\ b=0; \end{cases}$ ④ $ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b > 0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases}$ 则 a, b 都不为 0.
7. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 7\}$ 解析: 当命题 p 为真命题时, 可得 $4-3 < x < 3+4$, 即 $1 < x < 7$. 所以当命题 p 为假命题时, 可得 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 7\}$.
8. $\{a | a \geq 1\}$ 解析: 由题意, 得 $\neg p: -3 \leq x \leq 1, \neg q: x \leq a$. 因为 $\neg q$ 的一个充分不必要条件是 $\neg p$, 所以 $\{x | -3 \leq x \leq 1\} \subseteq \{x | x \leq a\}$. 所以 $a \geq 1$. 故答案为 $\{a | a \geq 1\}$.
9. 解: (1) 命题中含有存在量词“至少有一个”, 因此是存在量词命题, 真命题.
(2) “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = 5$ ”是存在量词命题, 真命题.
(3) “不论 m 取何实数, 方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 都有实数根”是全称量词命题, 当 $\Delta = 4 + 4m < 0$, 即 $m < -1$ 时, 方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 无实数根, 故原命题为假命题.
10. 解: (1) p 为假命题等价于关于 x 的方程 $mx^2 - 4x + 2 = 0$ 无实数根.
①当 $m=0$ 时, $mx^2 - 4x + 2 = -4x + 2 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 有实数根, 不符合题意.
②当 $m \neq 0$ 时, 由题意, 得 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times m \times 2 < 0$.
 $\therefore m > 2$.
 $\therefore B = \{m | m > 2\}$.
(2) $\because A = \{x | 3a < x < a+2\}$ 为非空集合,
 $\therefore a+2 > 3a$. 解得 $a < 1$.

若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件,

则 $A \subsetneq B, \therefore 3a \geq 2$, 即 $a \geq \frac{2}{3}, \therefore \frac{2}{3} \leq a < 1$.

故实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid \frac{2}{3} \leq a < 1\right\}$.

素养提升

1. C 解析: 由词语“有些”知, 原命题为存在量词命题, 故其否定为全称量词命题. 故选 C.

2. C 解析: 当 $a > 0$ 时, 由一次函数的性质, 得函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 单调递增. 若函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 单调递增, 则 $a > 0$. 所以“ $a > 0$ ”是“关于 x 的函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 单调递增”的充要条件. 故选 C.

3. B 解析: 由 $4x - m < 0$, 得 $x < \frac{m}{4}$. 由 $1 \leq 3 - x \leq 4$, 得 $-1 \leq x \leq 2$. $\therefore p$ 是 q 的一个必要不充分条件, $\therefore \frac{m}{4} > 2$, 即 $m > 8$. 故选 B.

4. $\left\{m \mid m \geq \frac{1}{4}\right\}$ 解析: $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq |t| + \frac{1}{4} - m$ 恒成立, 等价于 x^2 的最小值大于或等于 $|t| + \frac{1}{4} - m$, 即 $|t| + \frac{1}{4} - m \leq 0$. 又 $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得 $|t| + \frac{1}{4} - m \leq 0$, 即 $|t| \leq m - \frac{1}{4}$, 等价于 $|t|$ 的最小值小于或等于 $m - \frac{1}{4}$, 因此 $0 \leq m - \frac{1}{4}$, 所以 $m \geq \frac{1}{4}$.

5. 解: (1) 因为 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要条件, 所以 $S \subseteq P$.

$$\text{所以} \begin{cases} 1 - m \leq 1 + m, \\ 1 - m \geq -2, \text{ 解得 } 0 \leq m \leq 3. \\ 1 + m \leq 10. \end{cases}$$

所以实数 m 的取值范围是 $\{m \mid 0 \leq m \leq 3\}$.

(2) 当 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充分条件时, $P \subseteq S$.

$$\text{所以} \begin{cases} 1 - m \leq 1 + m, \\ 1 - m \leq -2, \text{ 解得 } m \geq 9. \\ 1 + m \geq 10. \end{cases}$$

由(1)知, $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要条件是 $0 \leq m \leq 3$.

由此知 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充要条件时, m 的值不存在.

6. 解: (1) 由题意, 得 $A = \{1, 2\}$.

$\therefore$ 命题 p 为真命题, $\therefore B \subseteq A$.

又 $B = \{x \mid [x - (a - 1)](x - 1) = 0\}$,

$\therefore B$ 有两种情况:

①若 $B = \{1\}$, 则 $a - 1 = 1$, 解得 $a = 2$.

②若 $B = \{1, 2\}$, 则 $a - 1 = 2$, 解得 $a = 3$.

因此, a 的值为 2 或 3.

(2) $\therefore$ “ $x \in A$ ”是“ $x \in C$ ”的必要条件,

$\therefore C \subseteq A$.

因此, 集合 C 有四种情况:

① $C = A$, 此时 $\begin{cases} \Delta = m^2 - 8 > 0, \\ m = 1 + 2, \end{cases}$ 解得 $m = 3$.

② $C = \{1\}$, 此时 $\begin{cases} \Delta = m^2 - 8 = 0, \\ m = 2, \end{cases}$ 此时方程组无实数解, m 的值不存在.

③ $C = \{2\}$, $\begin{cases} \Delta = m^2 - 8 = 0, \\ m = 4, \end{cases}$ 此时方程组无实数解, m 的值不存在.

④ $C = \emptyset$, 此时 $\Delta = m^2 - 8 < 0$,

解得 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

综上所述, m 的取值范围为 $\{m \mid m = 3 \text{ 或 } -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}\}$.

小测试(九) 等式性质与不等式性质(一)

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

2. D 3. $x^2 + 4 > 4x$

基础过关

1. C 解析: 对于 A, x 应满足 $x \leq 2\ 000$, 故 A 错误; 对于 B, x, y 应满足 $x < y$, 故 B 错误; C 正确; 对于 D, y 与 a 的关系应满足 $y \leq a$, 故 D 错误.

2. D 解析: 由题中 x 不低于 95, 得 $x \geq 95$, y 高于 380, 得 $y > 380$, z 超过 45, 得 $z > 45$. 故选 D.

3. A 解析: $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, \sqrt{3} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}, \sqrt{7} - \sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}, \therefore \sqrt{3} + 1 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < \sqrt{5} + \sqrt{7},$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{3} + 1} > \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} > \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}, \text{ 即 } b > a > c.$$

$\therefore \frac{2}{\sqrt{3} + 1} > \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} > \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}},$ 即 $b > a > c$.

4. B 解析: 由题意, 得 $0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 1, \therefore M - N = a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1 = (a_1 - 1)(a_2 - 1) > 0$. 故 $M > N$. 故选 B.

5. B 解析: 根据不等式中两个重要不等式, 得 $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$. 糖水变甜说明加糖后分式的值变大了, 只有

$\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$ 符合. 故选 B.

6. $(x+5)(x+7) < (x+6)^2$ 解析: $\therefore (x+5)(x+7) = x^2 + 12x + 35, (x+6)^2 = x^2 + 12x + 36, x^2 + 12x + 35 < x^2 + 12x + 36, \therefore (x+5)(x+7) < (x+6)^2$.

6)².

$$7. 8(x+19) > 2\,200 \quad \frac{8x}{x-12} > 9$$

8. 解: 如果买 27 张票, 则需 $27 \times 5 = 135$ (元).

如果买 30 张票, 则需 $30 \times (5-1) = 120$ (元).

因为 $135 > 120$,

所以 27 人买 30 张票不是浪费, 反而还节省 15 元.

素养提升

1. CD 解析: 对于 A, x 不大于 3, 应该表示为“ $x \leq 3$ ”, 故 A 错误; 对于 B, x 与 2 的和是非负数, 应表示为“ $x+2 \geq 0$ ”, 故 B 错误; CD 正确.

2. A 解析: 由题意知, $p-q = \sqrt{a+6} + \sqrt{a+3} - (\sqrt{a+4} + \sqrt{a+5})$. $\because (\sqrt{a+6} + \sqrt{a+3})^2 - (\sqrt{a+4} + \sqrt{a+5})^2 = 2\sqrt{(a+3)(a+6)} - 2\sqrt{(a+4)(a+5)}$, 且 $(a+3)(a+6) - (a+4)(a+5) = -2 < 0$, $a \geq 0$, $\therefore 2\sqrt{(a+3)(a+6)} - 2\sqrt{(a+4)(a+5)} < 0$, 即 $(\sqrt{a+6} + \sqrt{a+3})^2 - (\sqrt{a+4} + \sqrt{a+5})^2 < 0$. $\therefore p-q = \sqrt{a+6} + \sqrt{a+3} - (\sqrt{a+4} + \sqrt{a+5}) < 0$. 故 $p < q$.

3. B 解析: 因为 $x < y < z$, $a < b < c$, 所以用粉刷费用最低的涂料粉刷面积最大的房间, 粉刷费用最高的涂料粉刷面积最小的房间, 此时的总费用最低为 $az + by + cx$.

4. $\frac{25}{4}$ 解析: 设直角三角形的斜边长为 c , 直角边长分别为 a, b , 由题意知, $c=5$, 则 $a^2 + b^2 = 25$. 则三角形的面积 $S = \frac{1}{2}ab$. $\because 25 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\therefore ab \leq \frac{25}{2}$. 则三角形的面积 $S = \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$, 即这个直角三角形面积的最大值为 $\frac{25}{4}$.

5. 解: 因为 $\frac{1}{1-a} - (1+a) = \frac{1}{1-a} - \frac{(1+a)(1-a)}{1-a} = \frac{a^2}{1-a}$,

①当 $a=0$ 时, $\frac{a^2}{1-a} = 0$, 所以 $\frac{1}{1-a} = 1+a$.

②当 $a < 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $\frac{a^2}{1-a} > 0$, 所以 $\frac{1}{1-a} > 1+a$.

③当 $a > 1$ 时, $\frac{a^2}{1-a} < 0$, 所以 $\frac{1}{1-a} < 1+a$.

6. 解: 设该家庭除户主外, 还有 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 人参加旅游, 甲、乙两家旅行社收费总金额分别为 y_1 元、 y_2 元, 一张全票的票价为 a 元, 则只需按两家旅行社的优惠方案分别计算出 y_1, y_2 , 再比较 y_1, y_2 的大

小即可.

$$\because y_1 = a + 0.55ax, y_2 = 0.75(x+1)a,$$

$$\text{又 } y_1 - y_2 = a + 0.55ax - 0.75(x+1)a = 0.2a(1.25-x),$$

$\therefore$ 当 $x > 1.25$ 时, $y_1 < y_2$; 当 $x < 1.25$ 时, $y_1 > y_2$.

又 x 为正整数, 所以当 $x=1$ 时, $y_1 > y_2$, 即两口之家应选择乙旅行社; 当 $x > 1(x \in \mathbf{N}^*)$ 时, $y_1 < y_2$, 即三口之家或多于三口的家庭应选择甲旅行社.

易错辨析

A 解析: 本题可用特值法: 令 $a_1 = 0.1, a_2 = 0.9, b_1 = 0.2, b_2 = 0.8$, 则 $a_1b_1 + a_2b_2 = 0.74; a_1a_2 + b_1b_2 = 0.25; a_1b_2 + a_2b_1 = 0.26$. 故选 A.

小测试(十) 等式性质与不等式性质(二)

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

2. A 3. C

基础过关

1. B 解析: 因为 $a < 0 < b$, 所以 $\frac{a}{b} < 0$. 所以 $\frac{a}{b} < 1$. 故选 B.

2. D 解析: 选项 A 中, 当 $a > b > 0, c > d > 0$ 时, $ac > bd$ 成立, 但是当 a, c 均为负值时不成立, 故 A 不正确; 选项 B 中, 当 $c < 0$ 时, $ac > bc$ 可推出 $a < b$. 当 $c > 0$ 时, $ac > bc$ 可推出 $a > b$, 故 B 不正确; 选项 C 中, 由 $a > b, c > d$, 可得 $a-d > b-c$, 故 C 不正确; 选项 D 中, 式子 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$ 成立, 显然 $c \neq 0$. 所以 $c^2 > 0$.

根据不等式的性质, 不等式两边同乘一个正数, 所得的不等式的不等号与原不等式的不等号同向, 显然有 $a < b$ 成立. 故 D 正确.

3. A 解析: 由 $-1 \leq n \leq 5$ 可知, $-8 \leq 8n \leq 40$. 由 $-4 \leq m \leq -1$ 可知, $1 \leq -m \leq 4$, 则 $5 \leq -5m \leq 20$. 所以 $-3 \leq 8n - 5m \leq 60$. 故选 A.

4. B 解析: 取 $a=2, b=1$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立, 但 $b < a < 0$ 不成立, 则“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ” $\nRightarrow$ “ $b < a < 0$ ”. 若 $b < a < 0$, 则 $-b > -a > 0$. 由不等式的性质, 得 $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$. $\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 即“ $b < a < 0$ ” $\Rightarrow$ “ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”. 因此, “ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”是“ $b < a < 0$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

5. A 解析: 因为 $a > b > c$, 所以 $a-b > 0, b-c > 0$,

$a-c > b-c > 0$. 所以 $\frac{1}{a-b} > 0, \frac{1}{b-c} > 0, \frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-c}$. 所以 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-c} > 0$. 所以 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ 为正数.

6. $\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4 \right\}$ 解析: 由 $15 < b < 36$, 得 $\frac{1}{36} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}$. 因为 $12 < a < 60$, 根据不等式的性质, 得 $12 \times \frac{1}{36} < a \cdot \frac{1}{b} < \frac{1}{15} \times 60$, 即 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$. 所以 $\frac{a}{b}$ 的取值范围为 $\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4 \right\}$.

7. 1, -1 (答案不唯一) 解析: 易知当 $a > 0 > b$ 时, “若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ” 为假命题, 不妨取 $a = 1, b = -1$.

8. 证明: 因为 $c < d < 0$, 所以 $-c > -d > 0$.

因为 $a > b > 0$, 所以 $a - c > b - d > 0$.

所以 $0 < \frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-d}$.

又因为 $e < 0$, 所以 $\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}$.

素养提升

1. A 解析: 由图可得, $b < a < 0$. 对于 A, 因为 $b < a < 0$, 所以 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $b < a < 0$, 所以 $a^2 < b^2$, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $b < a$, 所以 $b - a < 0$, 故 C 错误; 对于 D, 当 $b = -2, a = -1$ 时, 满足 $b < a < 0$, 此时 $|b| = 2, |a| = 1$, 所以 $a|b| = -2, b|a| = -2$, 即 $|b|a = |a|b$, 故 D 错误.

2. A 解析: 因为 $a + b = c + d, a + d > b + c$, 所以 $2a > 2c$, 即 $a > c$. 因此 $b < d$. 因为 $a + c < b$, 所以 $a < b$. 综上可得, $d > b > a > c$. 故选 A.

3. ACD 解析: 对 A, 若 $a > 0 > b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 A 正确; 对 B, 若 $b > 0 > a$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 B 错误; 对 C, 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 C 正确; 对 D, 若 $b > a > 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 D 正确.

4. $m^3 > m^2 - m + 1$ 解析: $\because m^3 - (m^2 - m + 1) = m^3 - m^2 + m - 1 = m^2(m - 1) + m - 1 = (m^2 + 1) \cdot (m - 1)$, 又 $m > 1, \therefore (m^2 + 1)(m - 1) > 0. \therefore m^3 > m^2 - m + 1$.

5. 解: 由②可知, $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0. \therefore \frac{bc - ad}{ab} > 0$. 若③式成

立, 即 $bc > ad$, 则 $bc - ad > 0. \therefore ab > 0$. 故由②③ $\Rightarrow$ ①正确.

由① $ab > 0$, 得 $\frac{1}{ab} > 0$. 不等式 $bc > ad$ 两边同乘 $\frac{1}{ab}$, 得 $\frac{bc}{ab} > \frac{ad}{ab}. \therefore \frac{c}{a} > \frac{d}{b}$. 故由①③ $\Rightarrow$ ②正确.

由②, 得 $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0. \therefore \frac{bc - ad}{ab} > 0, \therefore ab > 0, \therefore bc > ad$. 故由①② $\Rightarrow$ ③正确.

综上可知, ①③ $\Rightarrow$ ②, ①② $\Rightarrow$ ③, ②③ $\Rightarrow$ ①.

6. (1) 解: $\because a^2 + b^2 - [2(2a - b) - 5] = (a - 2)^2 + (b + 1)^2 \geq 0$,

$\therefore a^2 + b^2 \geq 2(2a - b) - 5$.

当且仅当 $a = 2, b = -1$ 时, 等号成立.

(2) 证明: $\because (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4a^2b^2 = a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 \geq 0$,

当且仅当 $a^2 = b^2$ 时取等号.

又 $\because a > 0, b > 0, \therefore$ 当且仅当 $a = b$ 时取等号.

$\therefore (a^2 + b^2)^2 \geq 4a^2b^2$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立.

易错辨析

B 解析: $\because 0 < b < 2, \therefore -2 < -b < 0. \therefore 0 < a < 3, \therefore -2 < a - b < 3$. 故选 B.

小测试(十一) 基本不等式

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

2. A 3. $\frac{1}{4}$

基础过关

1. BC 解析: 根据不等式成立的条件可知只有 BC 正确. 故选 BC.

2. C 解析: 对于 A, 当 $x < 0$ 时, 无意义, 故 A 不成立; 对于 B, 当 $x = 1$ 时, $x^2 + 1 = 2x$. 故 B 不成立; 对于 C, $x^2 + 1 \geq 1$, 所以 $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$ 成立; 对于 D, 当 $x < 0$ 时, 不成立. 故选 C.

3. D 解析: 因为 $x > 2$, 所以 $x - 2 > 0$. 所以 $x + \frac{1}{x - 2} = (x - 2) + \frac{1}{x - 2} + 2 \geq 2\sqrt{1} + 2 = 4$, 当且仅当 $x - 2 = \frac{1}{x - 2}$, 即 $x = 3$ 时等号成立, 故 $x + \frac{1}{x - 2}$ 的最小值为 4. 故选 D.

4. B 解析: 由 $x(3 - 3x) = \frac{1}{3} \times 3x(3 - 3x) \leq \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$, 当且仅当 $3x = 3 - 3x$, 即 $x = \frac{1}{2}$ 时取等号.

5. D 解析: 因为 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号. 故选 D.

6. -1 解析: $\frac{t^2-3t+1}{t} = t + \frac{1}{t} - 3 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 3 = -1$, 当且仅当 $t=1$ 时, 等号成立.

7. $\sqrt{(a-b)(b-c)} \leq \frac{a-c}{2}$ (或 $\frac{a-c}{2} \geq \sqrt{(a-b)(b-c)}$) 解析: $\because a > b > c, \therefore a-b > 0, b-c > 0. \therefore \frac{a-c}{2} = \frac{(a-b)+(b-c)}{2} \geq \sqrt{(a-b)(b-c)}$, 当且仅当 $a-b=b-c$, 即 $2b=a+c$ 时等号成立.

8. 证明: $\because a > 0, b > 0, c > 0$,

$$\therefore \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} = 2c,$$

$$\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} = 2a,$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{acb^2}{ac}} = 2b.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时上式等号均成立.

又 a, b, c 不全相等,

故上述等号至少有一个不成立.

$$\therefore \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} > a+b+c.$$

素养提升

1. C 解析: $\because x > 0, ax \leq x^2 + 1, \therefore a \leq \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$. 又 $\because x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ (当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时取等号), $\therefore a \leq 2$. 故 a 的最大值为 2.

2. C 解析: 可将直角三角形的两直角边长取作 a, b , 斜边为 $c(c^2 = a^2 + b^2)$. 则外围的正方形的面积为 c^2 , 也就是 $a^2 + b^2$, 四个直角三角形所在的阴影面积之和刚好为 $2ab$. 对任意正实数 a 和 b , 有 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

3. AC 解析: $\because m > 2, \therefore m-2 > 0. \therefore x = m + \frac{1}{m-2} = (m-2) + \frac{1}{m-2} + 2 \geq 2\sqrt{(m-2) \cdot \frac{1}{m-2}} + 2 = 4$, 当且仅当 $m-2 = \frac{1}{m-2}$, 即 $m=3$ 时等号成立. 故 $x \geq 4. \therefore y = 2^2 - n^2 = 4 - n^2 \leq 4, \therefore x \geq y$. 故选 AC.

4. $\frac{1}{8} \frac{3}{4}$ 解析: $\because x > 0, y > 0, \therefore x + 2y = 1 \geq$

$2\sqrt{x \cdot 2y}. \therefore xy \leq \frac{1}{8}$. 当且仅当 $x = 2y = \frac{1}{2}$, 即 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立. $\therefore x^2 + 4y^2 + 2xy = (x + 2y)^2 - 2xy = 1 - 2xy \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立. $\therefore xy$ 的最大值为 $\frac{1}{8}, x^2 + 4y^2 + 2xy$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

5. (1) 解: $\because$ 正实数 a, b 满足 $a+b=4$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) (a+b) = \frac{1}{4} \left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \geq \frac{1}{4} \left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} \right) = \frac{9}{4}$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ 且 $a+b=4$, 即 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{8}{3}$ 时取等号, 即 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

(2) 证明: $\because a+b=4, a > 0, b > 0$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4} (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \right) \geq \frac{1}{4} \times (2+2) = 1$.

$$\therefore \frac{\left(4 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2}{2} \geq \frac{(4+1)^2}{2} = \frac{25}{2}.$$

$\therefore \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{\left(a+b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2}{2} = \frac{\left(4 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2}{2} \geq \frac{25}{2}$ (当且仅当 $a=b=2$ 时取等号).

6. 解: (1) $\because (a+b)\sqrt{ab} = 1$,

$$\therefore a+b = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

$\because a > 0, b > 0, \therefore a+b \geq 2\sqrt{ab}$,

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{ab}. \therefore 0 < ab \leq \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3}} = \frac{2}{ab\sqrt{ab}} \geq 4\sqrt{2},$$

当且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

故 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2) 不存在. 理由如下:

$\because a > 0, b > 0, \therefore \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3b}} = \frac{2}{\sqrt{6ab}}$, 当

且仅当 $\frac{1}{2a} = \frac{1}{3b}$ 时取等号.

又由(1)知,当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, ab 有最大值 $\frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{6ab}} \geq \frac{2}{\sqrt{6 \times \frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 不存在 a, b , 使得 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

易错辨析

1. ①②③ 解析: $\because a^2 + 1 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

$\therefore$ ①恒成立; $\because a + \frac{1}{a} \geq 2, b + \frac{1}{b} \geq 2$, 当且仅当 $a =$

$1, b = 1$ 时等号成立, $\therefore \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

$\therefore$ ②恒成立; $\because a + b \geq 2\sqrt{ab}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$, 当

且仅当 $a = b$ 时等号成立, $\therefore (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

$\therefore$ ③恒成立; $\because a^2 + 9 - 6a = (a-3)^2$, 当 $a = 3$ 时,

$a^2 + 9 = 6a$, $\therefore$ ④不一定成立. 故恒成立的是 ①②③.

2. A 解析: 由 $y = x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8$, 当且仅当

$x = 4$ 时取等号. 又 $\because$ 当 $0 < x \leq 3$ 时, $y = x + \frac{16}{x}$ 的函

数值随着自变量 x 的增大而减小, $\therefore$ 当 $x = 3$ 时, y

取得最小值, 最小值为 $3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}$. 故选 A.

小测试(十二) 基本不等式的应用

预习自评

1. B

2. 240 30 解析: 由题意可知, 一年的总运费与总存

储费用之和为 $\left(4x + \frac{600}{x} \times 6\right)$ 万元, $\therefore 4x + \frac{600}{x} \times$

$6 = 4\left(x + \frac{900}{x}\right) \geq 4 \times 2\sqrt{900} = 240$, 当且仅当 $x =$

$\frac{900}{x}$, 即 $x = 30$ 时等号成立, $\therefore$ 一年的总运费与总存

储费用之和最小为 240 万元, 此时 x 为 30 t.

基础过关

1. D 解析: 由题意知, $\frac{x^2 + 3x + 6}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + x + 1 + 4}{x+1} =$

$x + 1 + \frac{4}{x+1} + 1$, 因为 $x > 0$, 所以 $x + 1 > 0$. 则 $x +$

$1 + \frac{4}{x+1} + 1 \geq 2\sqrt{4} + 1 = 5$, 当且仅当 $x + 1 = \frac{4}{x+1}$,

即 $x = 1$ 时取“=”, 故 $\frac{x^2 + 3x + 6}{x+1}$ 的最小值是 5.

2. C 解析: 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a + 4b > 0$. 因为不

等式 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{m}{a+4b}$ 恒成立可转化为

$\left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 4b) \geq m$ 恒成立, 所以

$\left[\left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 4b)\right]_{\min} \geq m$. 因为 $\left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)(a +$

$4b) = 8 + \frac{16b}{a} + \frac{a}{b} \geq 8 + 2\sqrt{\frac{16b}{a} \times \frac{a}{b}} = 16$, 当且仅

当 $a = 4b$ 时等号成立, 所以 $16 \geq m$, 即 m 的最大值

为 16.

3. B 解析: 由题意, 得 $A(1+x)(1+y) = A(1+z)^2$.

所以 $(1+z)^2 = (1+x)(1+y) \leq \left(\frac{1+x+1+y}{2}\right)^2 =$

$\left(1 + \frac{x+y}{2}\right)^2$, 当且仅当 $1+x=1+y$, 即 $x=y$ 时等

号成立. 所以 $1+z \leq 1 + \frac{x+y}{2}$, 即 $z \leq \frac{x+y}{2}$. 故选 B.

4. C 解析: 设直角三角形两直角边长分别为 x m,

y m, 则 $\frac{1}{2}xy = 1$, 即 $xy = 2$. 周长 $l = x + y +$

$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} = 2\sqrt{2} + 2 \approx 4.82$ (m),

当且仅当 $x = y$ 时等号成立. 结合实际问题, 可知选 C.

5. 2 解析: $C = \frac{20t}{t^2 + 4} = \frac{20}{t + \frac{4}{t}}$. 因为 $t > 0$, 所以 $t +$

$\frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 4$, 当且仅当 $t = \frac{4}{t}$, 即 $t = 2$ 时等

号成立. 所以 $C = \frac{20}{t + \frac{4}{t}} \leq \frac{20}{4} = 5$. 即 $t = 2$ 时, C 取得

最大值.

6. $\frac{1}{4}$ 解析: 设两直角边长为 a, b , 斜边长为 c , 则

$c^2 = a^2 + b^2$, 且 $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} + 1$. $\therefore \sqrt{2} +$

$1 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} = (2 + \sqrt{2}) \cdot$

$\sqrt{ab}$, 即 $\sqrt{ab} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号. $\therefore$ 三

角形的面积 $S = \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. 即 $S_{\max} = \frac{1}{4}$.

7. 解: (1) 设所用时间为 $t = \frac{130}{x}$ (h),

$$y = \frac{130}{x} \times 6 \times \left(6 + \frac{x^2}{360}\right) + 24 \times \frac{130}{x}, x \in [50, 100].$$

所以这次行车总费用 y (单位: 元) 关于 x 的表达式是

$$y = \frac{7800}{x} + \frac{13x}{6}, x \in [50, 100].$$

$$(2) y = \frac{7800}{x} + \frac{13x}{6} \geq 260,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{7800}{x} = \frac{13x}{6},$$

即 $x=60$ 时等号成立.

故当 $x=60$ 时, 这次行车的总费用最低, 最低费用的值为 260 元.

素养提升

1. A 解析: 设原价是 x 元, 那么甲平台两次降价后的售价 $= (1-a\%)(1-b\%)x$; 乙平台两次降价后的售价 $= \left(1 - \frac{a+b}{2}\%\right)^2 x$; 而 $(1-a\%)(1-b\%)x = \frac{10\,000 - 100(a+b) + ab}{10\,000}x = \frac{40\,000 - 400(a+b) + 4ab}{40\,000}x$; $\left(1 - \frac{a+b}{2}\%\right)^2 x = \frac{40\,000 - 400(a+b) + (a+b)^2}{40\,000}x$. $\therefore (a+b)^2 \geq 4ab$ (当且仅当 $a=b$ 时等号成立), 又 $0 < a < b < 20$, $\therefore$ 乙 $>$ 甲, 即乙的售价高, 甲的降价幅度大. 故选 A.

2. AC 解析: 设矩形的长, 宽分别为 x, y , 则 $x+y = \frac{1}{2}l, S=xy$. 对于 A: 则 $x+y=2, xy=1$. 根据基本不等式, 得 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, 符合题意; 对于 B: 则 $x+y=4, xy=6$, 根据基本不等式, 得 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, 不符合题意; 对于 C: 则 $x+y=6, xy=7$, 根据基本不等式, 得 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, 符合题意; 对于 D: 则 $x+y = \frac{1}{4}, xy=3$, 根据基本不等式, 得 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, 不符合题意. 故选 AC.

3. A 解析: 由于天平的两臂长不相等, 故可设天平左臂长为 a , 右臂长为 b , 不妨设 $a > b$, 先称得的黄金的实际质量为 m_1 , 后称得的黄金的实际质量为 m_2 , 由杠杆的平衡原理知, $bm_1 = 5a, am_2 = 5b$. 解得 $m_1 = \frac{5a}{b}, m_2 = \frac{5b}{a}$. 则 $m_1 + m_2 = \frac{5a}{b} + \frac{5b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{5a}{b} \cdot \frac{5b}{a}} = 10$. $\therefore a \neq b, \therefore m_1 + m_2 > 10$. $\therefore$ 顾客实际所得黄金大于 10 g. 故选 A.

4. 5 km 解析: 设仓库与车站的距离为 x km, 租地费用为 y_1 元, 运输费用为 y_2 元. 由题意, 得 $y_1 = \frac{k_1}{x}$,

$$y_2 = k_2 x. \therefore \begin{cases} 2 = \frac{k_1}{10}, \\ 8 = 10k_2. \end{cases} \therefore \begin{cases} k_1 = 20, \\ k_2 = 0.8. \end{cases} \therefore y_1 = \frac{20}{x}, y_2 =$$

$$0.8x. \therefore y_1 + y_2 = \frac{20}{x} + 0.8x \geq 8, \text{当且仅当 } \frac{20}{x} =$$

$0.8x$, 即 $x=5$ 时等号成立. 故仓库应建在离车站 5 km 处, 两项费用之和最小.

$$5. \text{解: (1) } y = \frac{980v}{v^2 + 3v + 1444} = \frac{980}{v + \frac{1444}{v} + 3} \leq$$

$$\frac{980}{2\sqrt{v \cdot \frac{1444}{v}} + 3} = \frac{980}{79} \approx 12.41.$$

当且仅当 $v = \frac{1444}{v}$, 即 $v=38$ km/h 时, 车流量最大, 最大车流量约为 12.41 千辆/h.

$$(2) \text{依题意, 得 } \frac{980v}{v^2 + 3v + 1444} \geq 10.$$

$$\text{化简, 得 } v^2 - 95v + 1444 \leq 0,$$

$$\text{即 } (v-19)(v-76) \leq 0.$$

$$\text{所以 } 19 \leq v \leq 76.$$

所以汽车的平均速度应控制在 $[19, 76]$ 这个范围内.

6. 解: (1) 设正面复合板长为 x m, 侧面长为 y m, 总造价为 z 元, 则仓库的面积 $S=xy$, 总造价 $z=40x+2 \times 45y+20xy=40x+90y+20xy$.

$$\text{由条件知, } z \leq 188\,000, \text{即 } 4x+9y+2xy \leq 18\,800.$$

$$\therefore x > 0, y > 0,$$

$$\therefore y \leq \frac{18\,800-4x}{9+2x}.$$

$$\text{令 } t = 9+2x, \text{则 } x = \frac{t-9}{2} (t > 9).$$

$$\therefore S = xy \leq \frac{t-9}{2} \cdot \frac{18\,800-(2t-18)}{t} = \frac{-t^2+9\,418t-9 \times 9\,409}{t} = -\left(t + \frac{9 \times 9\,409}{t}\right) +$$

$$9\,418 \leq -2\sqrt{t \cdot \frac{9 \times 9\,409}{t}} + 9\,418 = -2 \times 3 \times 97 + 9\,418 = 8\,836,$$

$$\text{当且仅当 } t = \frac{9 \times 9\,409}{t}, \text{即 } t=291 \text{ 时等号成立.}$$

故 S 的最大值为 8 836 m^2 .

(2) 由(1)知, 当 $S=8\,836 \text{ m}^2$ 时, $t=291$, 即 $9+2x=291$,

$$\therefore x=141, \text{则 } y = \frac{8\,836}{141} = \frac{188}{3}.$$

则 $z=40x+90y+20xy=188\ 000$ (元),

∴仓库的面积 S 达到最大值 $8\ 836\text{ m}^2$, 实际造价又不超过预算时, 正面复合板的长应设计为 141 m .

易错辨析

C 解析: 因为 $x+2y=2$, 所以 $\frac{x+2y}{2}=1$. 所以

$$\frac{x+8y}{xy} = \frac{x+8y}{xy} \cdot \frac{x+2y}{2} = \frac{x^2+16y^2+10xy}{2xy} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{16y}{x} + 10 \right) \geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{16y}{x}} + 10 \right) = 9.$$

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{16y}{x}$, 即 $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}$ 时等号成立.

所以 $\frac{x+8y}{xy}$ 的最小值为 9. 故选 C.

小测试(十三) 二次函数与一元二次方程、不等式

预习自评

1. (1)× (2)× (3)×

2. A

基础过关

1. A 解析: 不等式 $-x^2-5x+6 \geq 0$ 可化为 $x^2+5x-6 \leq 0$, 即 $(x+6)(x-1) \leq 0$, 解得 $-6 \leq x \leq 1$.

∴不等式的解集为 $\{x | -6 \leq x \leq 1\}$. 故选 A.

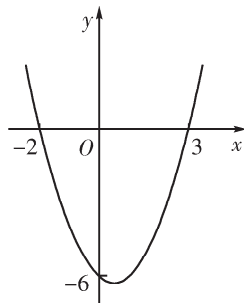
2. C 解析: 利用“ Δ ”判断, 在不等式 $x^2+6x+10 > 0$ 中, $\Delta=6^2-40 < 0$, ∴不等式 $x^2+6x+10 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 其他不等式可类似判断. 故选 C.

3. A 解析: ∵ $N = \{x | (x-2)(x-5) < 0\} = \{x | 2 < x < 5\}$, ∴ $M \cap N = \{3, 4\}$.

4. D 解析: ∵ $(t-x)\left(x-\frac{1}{t}\right) > 0$, ∴ $(x-t) \cdot \left(x-\frac{1}{t}\right) < 0$. ∵ $0 < t < 1$, ∴ $t < \frac{1}{t}$. ∴原不等式的解集为 $\left\{x \mid t < x < \frac{1}{t}\right\}$.

5. A 解析: ∵不等式 $ax^2-5x+b > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$, ∴方程 $ax^2-5x+b=0$ 的根为 $-3, 2$, 即 $-3+2 = \frac{5}{a}$, $-3 \times 2 = \frac{b}{a}$. 解得 $a = -5, b = 30$. 则不等式 $bx^2-5x+a > 0$ 可化为 $30x^2-5x-5 > 0$, 即 $6x^2-x-1 > 0$. 解得 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $x > \frac{1}{2}$. 故选 A.

6. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$ 解析: 根据表格可以画出二次函数 $y=ax^2+bx+c (x \in \mathbf{R})$ 图象的草图如图所示. 由图象, 得关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$.



7. 2 2 解析: 由题意可知, 1 和 m 是方程 ax^2-6x+

$$a^2=0 \text{ 的两根, 且 } a>0. \text{ 所以 } \begin{cases} a>0, \\ 1+m=\frac{6}{a}, \text{ 解得 } m= \\ 1 \times m=a. \end{cases}$$

2, $a=2$.

8. 解: (1) 由题意, 得 $x^2+mx-6=0 (m>0)$ 的两根为 x_1 和 x_2 .

$$\text{由韦达定理, 得 } \begin{cases} x_1+x_2=-m, \\ x_1x_2=-6. \end{cases}$$

$$\text{故 } (x_2-x_1)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 24 = 25.$$

解得 $m^2=1$.

$$\because m>0, \therefore m=1. \therefore y=x^2+x-6.$$

$$(2) \text{ 由 } y < 4-2x, \text{ 得 } x^2+x-6 < 4-2x,$$

$$\text{即 } x^2+3x-10 < 0.$$

∴不等式对应方程的两根为 -5 和 2 , 且对应抛物线开口向上, 解得 $-5 < x < 2$.

故不等式的解集是 $\{x | -5 < x < 2\}$.

素养提升

1. BCD 解析: 因为不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 的解集为

$$\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}, \text{ 故相应的二次函数 } f(x) =$$

ax^2+bx+c 的图象开口向下, 所以 $a < 0$, 故 A 错

误. 易知 2 和 $-\frac{1}{2}$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个

根, 则有 $\frac{c}{a} = -1 < 0$, $-\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0$. 又 $a < 0$, 则 $b >$

$0, c > 0$, 故 B, C 正确. 因为 $1 \in \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$,

所以将 $x=1$ 代入不等式成立, 即 $a+b+c > 0$. 故 D 正确.

2. A 解析: ∵关于 x 的不等式 $ax+b > 0$ 的解集是

$$\{x | x < -1\}, \therefore \begin{cases} a < 0, \\ -\frac{b}{a} = -1. \end{cases} \therefore b = a < 0. \therefore \text{关于 } x$$

的不等式 $(ax-b)(x-2) > 0$ 可化为 $\left(x-\frac{b}{a}\right)(x-$

$2) < 0$, 即 $(x-1)(x-2) < 0$. 解得 $1 < x < 2$. ∴不等

式的解集是 $\{x|1 < x < 2\}$. 故选 A.

3. A 解析: 原不等式可化为 $(x-2)(x-m) < 0$, 若 $m < 2$, 则解得 $m < x < 2$. 故不等式的解集中不可能有 4 个正整数; 若 $m = 2$, 则不等式的解集为空集, 不合题意; 若 $m > 2$, 则解得 $2 < x < m$, 所以该不等式的解集中的 4 个正整数分别是 3, 4, 5, 6. 所以 $6 < m \leq 7$. 故实数 m 的取值范围是 $\{m|6 < m \leq 7\}$.

4. $\{m|m < -1 \text{ 或 } m > 4\}$ 解析: $\because x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1, \therefore x + \frac{y}{4} = \left(x + \frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = 2 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{4x}} = 4$, 当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{4x}$, 即 $x = 2, y = 8$ 时, $x + \frac{y}{4}$ 取得最小值 4. 由 $x + \frac{y}{4} < m^2 - 3m$ 有解, 可得 $m^2 - 3m > 4$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 4$.

5. 解: (1) 当 $a = 2$ 时, 原不等式可化为 $x^2 - 5x + 6 \leq 0$, 即 $(x-3)(x-2) \leq 0$.

解得 $2 \leq x \leq 3$. 所以 $A = \{x|2 \leq x \leq 3\}$.

又因为 $B = \{x|-2 < x < 2\}$,

所以 $A \cup B = \{x|-2 < x \leq 3\}$.

(2) 由 $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$, 得

$(x-a)(x-a-1) \leq 0$.

则 $A = \{x|a \leq x \leq a+1\}$.

因为 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $a+1 \leq -2$ 或 $a \geq 2$.

解得 $a \leq -3$ 或 $a \geq 2$.

6. 解: (1) 当 $m = -2$ 时, $y = x^2 - x + m = x^2 - x - 2$,

当 $y > 0$ 时, 即 $x^2 - x - 2 > 0$.

解 $x^2 - x - 2 = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = 2$.

$\therefore$ 不等式 $y > 0$ 的解集为 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$.

(2) $\because y < 0$ 的解集为 $\{x|a < x < b\}$,

$\therefore a, b$ 为方程 $x^2 - x + m = 0$ 的两个实数根.

$\therefore a + b = 1, ab = m$.

$\because m > 0$,

$\therefore a > 0, b > 0$.

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b) = \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 5 \geq 5 +$

$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9$.

当且仅当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立.

故 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 9.

易错辨析

1. $\{a|0 < a \leq 2\}$ 解析: 设 $y = (a-2)x^2 + 2(a-2)x - 2$, 由题意知, ①当 $a = 2$ 时, $y = -2$, 函数的图象在 x

轴下方, 符合题意; ②当 $a \neq 2$ 时, 只需 $\begin{cases} a-2 < 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} a < 2, \\ a^2 - 2a < 0, \end{cases}$ 所以 $0 < a < 2$. 由①②知, 实数 a 的取值范围是 $\{a|0 < a \leq 2\}$.

2. 解: 原不等式可化为 $\begin{cases} x-2 \neq 0, \\ (x-1)(x-3) \geq 0 \end{cases}$ 或 $x-2=0$,
解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq 1$ 或 $x = 2$.
所以原不等式的解集为 $\{x|x \geq 3 \text{ 或 } x \leq 1 \text{ 或 } x = 2\}$.

小测试(十四) 二次函数与一元二次方程、不等式的应用

预习自评

1. C 2. B 3. C

基础过关

1. D 解析: $\frac{2x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) > 0$, 解得

$x < -3$ 或 $x > \frac{1}{2}$. 所以 $\frac{2x-1}{x+3} > 0$ 的解集是

$\left\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$. 故选 D.

2. C 解析: 设该产品的产量为 x 台, 则总售价为 $20x$ 万元. 若使生产不亏本, 则 $20x \geq 3\,000 + 25x - 0.1x^2$, 即 $0.1x^2 - 5x - 3\,000 \geq 0$, 整理, 得 $x^2 - 50x - 30\,000 \geq 0$, 解得 $x \geq 200$ 或 $x \leq -150$ (舍去), 故最低产量是 200 台.

3. C 解析: 不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$ 可化为 $(x-5a) \cdot (x+a) > 0$, 解方程 $(x-5a)(x+a) = 0$, 得 $x_1 = 5a, x_2 = -a$. $\because 2a+1 < 0, \therefore a < -\frac{1}{2}$. $\therefore 5a < -a$. $\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x < 5a \text{ 或 } x > -a\}$. 故选 C.

4. B 解析: 由不等式 $\frac{(x+b)(x+c)}{a-x} \leq 0$ 的解集为 $\{x|-1 \leq x < 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 易得 $a = 2, b = 1, c = -3$ 或 $a = 2, b = -3, c = 1$. 故 $b+c = -2$.

5. B 解析: 设 $y = x^2 + mx - 5$, 当 $x = 0$ 时, $y = -5 < 0$, 要使 $y > 0$ 在 $\{x|1 \leq x \leq 2\}$ 上有解, 由二次函数的性质, 只需当 $x = 2$ 时, $y > 0$ 即可. 所以 $4+2m-5 > 0$. 解得 $m > \frac{1}{2}$. 故选 B.

6. $\{x|1 < x < 2\}$ 解析: $\because \frac{1}{x-1} > 1, \therefore \frac{2-x}{x-1} > 0$.
 $\therefore (x-1)(x-2) < 0$. 解得 $1 < x < 2$. $\therefore$ 不等式

$\frac{1}{x-1} > 1$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$.

7. $\{x | 10 \leq x \leq 30\}$ 解析: 因矩形的一边长为 x m, 设另一边长为 y m, 应用相似三角形可得, $\frac{x}{40} = \frac{40-y}{40}$. 则 $y = 40 - x$, 于是面积 $S = x(40 - x) = -x^2 + 40x \geq 300$, 解得 $10 \leq x \leq 30$.

8. 解: 设长方形绿地的长与宽分别为 a m 与 b m.

由题意, 可得 $a - b = 30$ ①, $ab \geq 4\ 000$ ②.

由①②可得, $b^2 + 30b - 4\ 000 \geq 0$,

即 $(b+15)^2 \geq 4\ 225$.

解得 $b+15 \geq 65$ 或 $b+15 \leq -65$ (舍去).

所以 $b \geq 50$.

所以 b 至少为 50, 则 a 至少为 80.

故这块绿地的长至少为 80 m, 宽至少为 50 m.

素养提升

1. B 解析: $\because M = \{x | (x-2)(x+1) > 0\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, $N = \left\{x \left| \frac{x-4}{x+1} \leq 0, x \in \mathbf{Z} \right.\right\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $\therefore M \cap N = \{3, 4\}$, $\therefore M \cap N$ 的所有子集的个数为 $2^2 = 4$. 故选 B.

2. C 解析: 若 $a^2 - 4 = 0$, 则 $a = \pm 2$. 当 $a = 2$ 时, 不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 化为 $-1 \geq 0$, 其解集为空集, 因此 $a = 2$ 满足题意; 当 $a = -2$ 时, 不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 化为 $-4x - 1 \geq 0$, 解得 $x \leq -\frac{1}{4}$, 其解集不为空集, 因此 $a = -2$ 不满足题意, 应舍去. 若 $a^2 - 4 \neq 0$, 则 $a \neq \pm 2$. $\because$ 关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 的解集为空集,

$\therefore \begin{cases} a^2 - 4 < 0, \\ \Delta = (a-2)^2 + 4(a^2 - 4) < 0. \end{cases}$ 解得 $-\frac{6}{5} < a < 2$.

综上, a 的取值范围是 $\left\{a \left| -\frac{6}{5} < a \leq 2 \right.\right\}$. 故选 C.

3. BC 解析: 因为不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 所以 -1 和 2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 且 $a < 0$. 所以 $-\frac{b}{a} = -1 + 2 = 1$, $\frac{c}{a} = -1 \times 2 = -2$. 则 $b = -a$, $c = -2a$. 由 $a(x^2 + 1) + b(x - 1) + c < 2ax$, 得 $ax^2 - 3ax < 0$. 因为 $a < 0$, 所以 $x^2 - 3x > 0$. 解得 $x < 0$ 或 $x > 3$, 所以不等式 $a(x^2 + 1) + b(x - 1) + c < 2ax$ 的解集为 $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$. 故选 BC.

4. $\{x | 0 < x \leq 100\}$ 解析: 设花坛的宽度为 x m, 所以绿草坪的长为 $(800 - 2x)$ m, 宽为 $(600 - 2x)$ m. 根

据题意, 得 $(800 - 2x) \cdot (600 - 2x) \geq \frac{1}{2} \times 800 \times 600$. 整理, 得 $x^2 - 700x + 60\ 000 \geq 0$. 解得 $x \geq 600$ 或 $x \leq 100$. 由题意知, $0 < x < 300$, 所以 $0 < x \leq 100$. 当 $0 < x \leq 100$ 时, 绿草坪的面积不小于总面积的 $\frac{1}{2}$.

5. 解: 当 $a = 0$ 时, $1 \geq 0$, 不等式恒成立.

当 $a \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4a^2 - 4a \leq 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq 1$.

综上, $0 \leq a \leq 1$.

由 $x^2 - x - a^2 + a < 0$, 得 $(x - a)[x - (1 - a)] < 0$.

$\therefore 0 \leq a \leq 1$,

$\therefore$ ①当 $1 - a > a$, 即 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 时, $a < x < 1 - a$.

②当 $1 - a = a$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$, 不等式无解;

③当 $1 - a < a$, 即 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, $1 - a < x < a$.

综上, 当 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | a < x < 1 - a\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | 1 - a < x < a\}$.

6. 解: (1) 由题意可知, x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1 + x_2 = 2k + 1, x_1 x_2 = k^2 + 1$.

又 $x_1 > 1, x_2 > 1$,

$\therefore \begin{cases} \Delta = [-(2k+1)]^2 - 4(k^2 + 1) > 0, \\ x_1 + x_2 > 2, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0. \end{cases}$

解得 $k > \frac{3}{4}$, 且 $k \neq 1$.

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\left\{k \left| k > \frac{3}{4} \text{ 且 } k \neq 1 \right.\right\}$.

(2) 由 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k + 1, \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{2k+1}{3}, \\ x_2 = \frac{4k+2}{3}. \end{cases}$

$\therefore x_1 x_2 = \frac{2k+1}{3} \cdot \frac{4k+2}{3} = k^2 + 1$.

整理, 得 $k^2 - 8k + 7 = 0$. 解得 $k_1 = 7, k_2 = 1$ (舍去).

$\therefore k$ 的值为 7.

易错辨析

1. D 解析: 设 $y = x^2 - mx + 4$, 由题意知, 当 $x = 1$ 和

$x=2$ 时, $y \leq 0$ 恒成立, 即 $\begin{cases} 1-m+4 \leq 0, \\ 4-2m+4 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m \geq 5, \\ m \geq 4. \end{cases}$ 所以 $m \geq 5$. 故选 D.

2. 解: 原不等式可化为 $\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0, \\ x \neq -2, \end{cases}$

解得 $-2 < x \leq 1$.

所以原不等式的解集为 $\{x | -2 < x \leq 1\}$.

滚动卷(二) 小测试(九)至(十四)

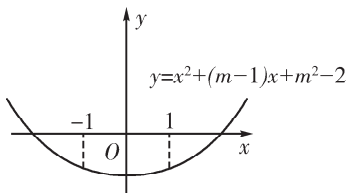
综合拔高

1. B 解析: 由 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 可得, $\frac{3x-1}{2-x} - 1 \geq 0$. 所以 $\frac{3x-1-(2-x)}{2-x} \geq 0$, 即 $\frac{4x-3}{x-2} \leq 0$. 所以 $\begin{cases} (4x-3)(x-2) \leq 0, \\ x-2 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $\frac{3}{4} \leq x < 2$. 故选 B.

2. C 解析: 当 $x = -2$ 时, 选项 A 中的不等式不成立; 当 $x = 0$ 时, 选项 B 中的不等式不成立; 对于选项 C, $\Delta = 1 - 4 < 0$, 且 $y = x^2 - x + 1$ 的图象开口向上, 则 $y = x^2 - x + 1$ 的图象与 x 轴无交点, 故不等式 $x^2 - x + 1 \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$; 当 $x = 0$ 时, 选项 D 中的不等式不成立. 故选 C.

3. B 解析: 原不等式可化为 $(x-m)(x+n) < 0$. 由 $m+n > 0$ 知, $m > -n$. 所以原不等式的解集为 $\{x | -n < x < m\}$. 故选 B.

4. D 解析: 令 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 - 2$, 作出函数的大致图象如图所示. 由图象知, 当 $x = -1$ 时, $y = m^2 - m < 0$, 解得 $0 < m < 1$. 当 $x = 1$ 时, $y = m^2 + m - 2 < 0$, 解得 $-2 < m < 1$. 综上可得, $0 < m < 1$, 故选 D.



5. A 解析: 因为 $4x^2 + 6x + 3 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以原不等式等价于 $2x^2 + 2mx + m < 4x^2 + 6x + 3 (x \in \mathbf{R})$, 即 $2x^2 + (6-2m)x + 3-m > 0$ 对一切实数 x 恒成立. 所以 $\Delta = (6-2m)^2 - 8(3-m) = 4(m-1)(m-3) < 0$. 解得 $1 < m < 3$. 故实数 m 的取值范围是 $1 < m < 3$.

6. $\{m | m \geq \frac{4}{3}\}$ 解析: 由题意, 得 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times$

$3m \leq 0$, 即 $16 - 4 \times 3m \leq 0$. 解得 $m \geq \frac{4}{3}$.

7. $-1 \in \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$

8. $\{m | 0 < m \leq 1\}$ 解析: 设方程 $x^2 + (m-3)x + m = 0$ 的两个正实数根分别为 x_1, x_2 , 由题意, 得 $\begin{cases} \Delta = (m-3)^2 - 4m \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 3-m > 0, \\ x_1 x_2 = m > 0. \end{cases}$ 解得 $0 < m \leq 1$. 故实数 m 的取值范围是 $\{m | 0 < m \leq 1\}$.

9. 解: 设甲车车速为 $x_{\text{甲}}$ km/h, 乙车车速为 $x_{\text{乙}}$ km/h. 由题意列出不等式 $s_{\text{甲}} = 0.1x_{\text{甲}} + 0.01x_{\text{甲}}^2 > 12$, $s_{\text{乙}} = 0.05x_{\text{乙}} + 0.005x_{\text{乙}}^2 > 10$. 分别求解, 得 $x_{\text{甲}} < -40$ 或 $x_{\text{甲}} > 30$, $x_{\text{乙}} < -50$ 或 $x_{\text{乙}} > 40$. 因为 $x > 0$, 所以 $x_{\text{甲}} > 30, x_{\text{乙}} > 40$. 经比较知, 乙车超过限速, 故乙应负主要责任.

10. 解: 原不等式等价于 $\left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x - \frac{a}{7}\right) < 0$.

① 当 $a > 0$ 时, $\frac{a}{7} > -\frac{a}{3}$,

原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{a}{3} < x < \frac{a}{7}\right\}$;

② 当 $a < 0$ 时, $\frac{a}{7} < -\frac{a}{3}$,

原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{a}{7} < x < -\frac{a}{3}\right\}$;

③ 当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$.

综上, 当 $a > 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{a}{3} < x < \frac{a}{7}\right\}$;

当 $a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{a}{7} < x < -\frac{a}{3}\right\}$;

当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$.

素养提升

1. B 解析: 由题意知, $-1, \frac{1}{3}$ 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的两个根, 且 $a < 0$.

$\therefore \begin{cases} a-b+1=0, \\ \frac{1}{9}a+\frac{1}{3}b+1=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=-2. \end{cases} \therefore a+b=-5$.

2. B 解析: 由 $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 可知 $t^2 - t \leq 2$, 解得 $-1 \leq t \leq 2$. 所以“ $t \geq -2$ ”是“ $-1 \leq t \leq 2$ ”的必要不充分条件.

3. C 解析: 因为关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 可化为 $(x-1)(x-a) < 0$, 当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | 1 < x < a\}$; 当 $a < 1$ 时, 不等式的解集为

$\{x|a < x < 1\}$; 当 $a=1$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$. 要使得解集中至多包含 1 个整数, 则 $a=1$ 或 $1 < a \leq 3$ 或 $1 > a \geq -1$. 所以实数 a 的取值范围是 $\{a|-1 \leq a \leq 3\}$.

4. $\{x|-2 < x < 3\}$ 解析: 由 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$, 知 $a < 0$, 且 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 是关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + c = 0$ 的两个根. 由根与系数的关系, 得 $\begin{cases} -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{c}{a}, \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{a}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -12, \\ c = 2. \end{cases}$ 代

入 $-cx^2 + 2x - a > 0$ 并整理, 得 $x^2 - x - 6 < 0$. 解得 $-2 < x < 3$. 所以 $-cx^2 + 2x - a > 0$ 的解集为 $\{x|-2 < x < 3\}$.

5. 解: (1) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $x^2 - 2ax + 1 > 0 \Leftrightarrow 2ax < x^2 + 1 \Leftrightarrow 2a < \frac{1}{x} + x$.

$$\text{又 } x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2,$$

当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时取等号.

$\therefore x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2.

依题意, 得 $2a < 2$, 即 $a < 1$.

故实数 a 的取值范围是 $\{a|a < 1\}$.

(2) 假设 q 为真, 可得 $\Delta = (a-1)^2 - 4 > 0$,

即 $a^2 - 2a - 3 > 0$. 解得 $a < -1$ 或 $a > 3$.

由(1)知, 当 p 为真时, $a < 1$.

$\therefore p, q$ 一真一假,

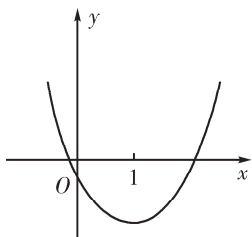
$\therefore$ 当 p 真 q 假时, 实数 a 的取值范围是 $-1 \leq a < 1$;

当 p 假 q 真时, 实数 a 的取值范围是 $a > 3$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a|-1 \leq a < 1 \text{ 或 } a > 3\}$.

6. 解: (1) 已知方程的一个根大于 1, 另一个根小于 1, 画出二次函数 $y = x^2 - 2x + a$ 的大致图象, 如图所示. 结合二次函数 $y = x^2 - 2x + a$ 的图象知, 当 $x=1$ 时, 函数值小于 0, 即 $1^2 - 2 + a < 0$. 所以 $a < 1$.

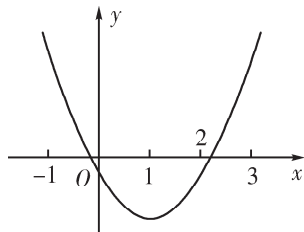
故 a 的取值范围是 $\{a|a < 1\}$.



(2) 由方程的一个根大于 -1 且小于 1, 另一个根大于 2 且小于 3, 画出二次函数 $y = x^2 - 2x + a$ 的大致图象, 如图所示. 结合二次函数 $y = x^2 - 2x + a$ 的图象知, x 取 -1, 3 时函数值为正, x 取 1, 2 时函数值为负,

$$\text{即 } \begin{cases} 1+2+a > 0, \\ 1-2+a < 0, \\ 4-4+a < 0, \\ 9-6+a > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -3 < a < 0.$$

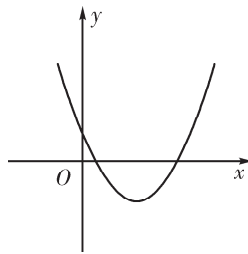
故 a 的取值范围是 $\{a|-3 < a < 0\}$.



(3) 由方程的两个根都大于 0, 画出二次函数 $y = x^2 - 2x + a$ 的大致图象如图所示. 结合二次函数 $y = x^2 - 2x + a$ 的图象知, 判别式不小于 0, 图象的对称轴在 y 轴的右侧, 且当 $x=0$ 时, 函数值为正,

$$\text{即 } \begin{cases} \Delta = 4 - 4a \geq 0, \\ -\frac{-2}{2} > 0, \\ a > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a \leq 1.$$

故 a 的取值范围是 $\{a|0 < a \leq 1\}$.



小测试(十五) 函数的概念

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

2. C 3. ①②④

基础过关

1. C 解析: 地球绕太阳公转的过程中, 二者之间的距离与时间存在函数关系, 其中时间是自变量; 在银行, 给定本金和利率后, 活期存款的利息与存款天数的关系是函数关系, 其中存款天数是自变量; 根据函数的定义可知, 某地区玉米的亩产量与灌溉次数的关系不是函数关系; 高铁年运营里程与年份的

关系是函数关系,其中年份是自变量,故选 C.

2. A 解析:由函数的定义可知,若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处有意义,则函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$ 有一个交点;若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处无意义,则函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$ 没有交点. 故函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$ 至多有一个交点.

3. B 解析:B 选项中一个 x 对应两个函数值,不符合函数定义.

4. D 解析:当 $x>0$ 时, $f(x)=1$; 当 $x=0$ 时, $f(x)=0$; 当 $x<0$ 时, $f(x)=-1$. 因此 $f(x)$ 的值只有 1, 0, -1 三个值. 所以 $y=f(x)$ 的值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

5. D 解析:①中,当 $x=4$ 时, $y=4^2=16 \notin N$, 故不能构成函数;②中,当 $x=-1$ 时, $y=-1+1=0 \notin N$, 故不能构成函数;③中,当 $x=-1$ 时, $y=-1-1=-2 \notin N$, 故不能构成函数;④中,当 $x=\pm 1$ 时, $y=|\pm 1|=1 \in N$, 当 $x=2$ 时, $y=|2|=2 \in N$, 当 $x=4$ 时, $y=|4|=4 \in N$, 故能构成函数.

6. (1)3 5 7 9 (2) $4a+1$ (3) $2x+1$

7. $\{1, 3\}$ 解析:根据题意,若方程 $g[f(x)]=3$, 必有 $f(x)=1$, 则有 $x=1$ 或 $x=3$. 即方程 $g[f(x)]=3$ 的解集为 $\{1, 3\}$.

8. 解:图(1),定义域为 $\{x|0 \leq x < 3\}$,值域为 $\{y|0 \leq y \leq 1 \text{ 或 } y=2\}$;

图(2),定义域为 $\{x|x \geq -2\}$,值域为 $\{y|y \geq 0\}$;

图(3),定义域为 R ,值域为 $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$.

素养提升

1. C 解析:由函数的定义可知,函数的定义域和值域为非空的数集.

2. AD 解析:A 中,可构成函数关系;B 中,对于集合 A 中的元素 1,在集合 B 中有两个元素与之对应,因此不是函数关系;C 中,集合 A 中的元素 0 的倒数没有意义,在集合 B 中没有元素与之对应,因此不是函数关系;D 中,可构成函数关系.

3. C 解析:解析式为 $y=2x^2+1$,值域为 $\{1, 5\}$ 的孪生函数,分别为① $y=2x^2+1, x \in \{0, \sqrt{2}\}$;② $y=2x^2+1, x \in \{0, -\sqrt{2}\}$;③ $y=2x^2+1, x \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$,共 3 个. 故选 C.

4. 3 解析:由题,得当 1,2 对应 7 时,3 对应 8,4 对应 9;当 1 对应 7 时,2,3 对应 8,4 对应 9;当 1 对应 7 时,2 对应 8,3,4 对应 9,所以一共有 3 个.

5. 解:(1) $f(2)=2^2+2-1=5$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}-1=\frac{1+x-x^2}{x^2}.$$

$$(2) \because f(x)=x^2+x-1=5,$$

$$\therefore x^2+x-6=0.$$

解得 $x=2$ 或 $x=-3$.

6. 解:根据对应关系 f ,有 $1 \rightarrow 4; 2 \rightarrow 7; 3 \rightarrow 10;$
 $k \rightarrow 3k+1$.

若 $a^4=10$,则 $a \notin N^*$,不符合题意,舍去.

则 $a^2+3a=10$,则 $a=2$ 或 $a=-5$ (舍去).

故 $3k+1=a^4=16$,解得 $k=5$.

综上, $a=2, k=5$.

易错辨析

1. B 解析:由题意可知,当 $x^2=1$ 时, $x=1$ 或 $x=-1$; 当 $x^2=2$ 时, $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$. 所以集合 A 可分为含有 1 个、2 个、3 个或 4 个元素的集合,则 $A \cap B = \emptyset$ 或 $\{1\}$. 故选 B.

2. BC 解析:对于 A,由于 M 中元素 2 在 N 中无元素与之对应,因而不是集合 M 到集合 N 的函数关系;对于 D, M 中元素 1 在 N 中有两个元素与之对应,因而不是集合 M 到集合 N 的函数关系;对于 BC,在集合 M 中任取一个元素,在集合 N 中都有唯一的元素与之对应,故 BC 是集合 M 到集合 N 的函数关系.

小测试(十六) 函数概念的综合运用

预习自评

1. (1)× (2)× (3)✓

2. A 3. D

基础过关

1. D 解析:由 $4-x^2 \geq 0$,得 $-2 \leq x \leq 2$. $\therefore A \cap B = \{x|-2 \leq x < 1\}$. 故选 D.

2. C 解析:由同一个函数的定义域和对应关系都要相同,可知满足题意的只有选项 C.

3. C 解析:由于 $x^2 \geq 0$,所以 $x^2+2 \geq 2$. 所以 $0 < \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$. 故选 C.

4. D 解析:设 $3x-1=t$,由函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 1]$,得函数 $f(t)$ 的定义域为 $[-2, 1]$,即 $-2 \leq t \leq 1$. 因此 $-2 \leq 3x-1 \leq 1$. 解得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$. 故选 D.

5. C 解析: $\because |2x|=2|x|$, $\therefore A$ 满足; $\because 2x-|2x|=2(x-|x|)$, $\therefore B$ 满足; $\because -2x=2 \cdot (-x)$, $\therefore D$ 满足; $\because 2x+1 \neq 2(x+1)$, $\therefore C$ 不满足.

6. $[-4, 3]$ 解析:由题图易知,函数的值域为 $[-4, 3]$.

7. $[0, 4]$ 解析: $\because f(x) = \sqrt{mx^2 + mx + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $\therefore$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $mx^2 + mx + 1 \geq 0$ 恒成立. 当 $m=0$ 时, $1 \geq 0$ 恒成立, 满足题意; 当 $m \neq 0$ 时, 有

$$\begin{cases} m > 0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} m > 0, \\ m^2 - 4m \leq 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < m \leq 4.$$

综上, 实数 m 的取值范围为 $[0, 4]$.

8. (1) 解: $f(1) = \frac{1^2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

$$\text{因为 } f(2) = \frac{2^2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

$$(2) \text{ 证明: 因为 } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1},$$

$$\text{所以 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 1, \text{ 为定值.}$$

素养提升

1. AD 解析: 对于 A 选项, 因为函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$, 故 A 选项中的两个函数是同一个函数; 对于 B 选项, 因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$, 函数 $y=g(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 定义域不相同, 故 B 选项中的两个函数不是同一个函数; 对于 C 选项, 因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -2\}$, 函数 $y=g(x)$ 的定义域为 $\{x|x \geq 2\}$, 定义域不相同, 故 C 选项中的两个函数不是同一个函数; 对于 D 选项, 因为函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1, \\ -x-1, & x < -1, \end{cases}$ 故 D 选项中的两个函数为同一个函数. 故选 AD.

2. D 解析: $\because$ 函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 即 $0 \leq x \leq 2$, $\therefore -2 \leq x-2 \leq 0$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 0]$. 则 $-2 \leq 2x-1 \leq 0$, $\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. 故函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 故选 D.

3. AB 解析: 函数 $y = \sqrt{\frac{a}{x} + 1}$ 在区间 $[-2, -1]$ 上 有意义, 等价于 $\frac{a}{x} + 1 \geq 0$ 在区间 $[-2, -1]$ 上恒成立. 由 $x < 0$, 得 $a \leq -x$ 在区间 $[-2, -1]$ 上恒成立. $\therefore a \leq 1$, 故选 AB.

4. $(-2, 2)$ 解析: 由函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 $(1, 2)$ 可

知, $k=2$. 因此函数 $y=kx$ 即为 $y=2x$. 由 $x \in (-1, 1)$ 可知, $-2 < 2x < 2$. 因此函数 $y=kx$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的值域为 $(-2, 2)$.

5. 解: (1) $\because f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,

$$\therefore f(2) = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

$$\because g(x) = x^2 - 1, \therefore g(3) = 3^2 - 1 = 8.$$

$$(2) f[g(3)] = f(8) = \frac{1-8}{1+8} = -\frac{7}{9}.$$

$$(3) f[g(x)] = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{1-(x^2-1)}{1+(x^2-1)} = \frac{2-x^2}{x^2} =$$

$$\frac{2}{x^2} - 1 (x \neq 0).$$

6. 解: 令 $t = \sqrt{2x+4} (x \geq 0)$, 则 $t \geq 2$,

则 $y = 2-t$ 在 $[2, +\infty)$ 上的值域为 $(-\infty, 0]$.

$\therefore y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的值域为 $(-\infty, 0]$.

令集合 $A = (-\infty, 0]$.

令 $g(x) = ax + a - 1$ 在 $(-\infty, 1]$ 上的值域为集合 B ,

$\because$ 对任意 $x_1 \in [0, +\infty)$ 都有 $x_2 \in (-\infty, 1]$ 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, $\therefore A \subseteq B$.

当 $a=0$ 时, $g(x) = -1$, 不满足 $A \subseteq B$.

当 $a>0$ 时, $B = (-\infty, 2a-1]$,

$$\therefore 2a-1 \geq 0, \text{ 解得 } a \geq \frac{1}{2}.$$

当 $a<0$ 时, $B = [2a-1, +\infty)$, 不满足 $A \subseteq B$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

易错辨析

1. A 解析: 因为 $f(x) = x^2 - 2x$, 图象的对称轴为直线 $x=1$, 所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取最小值 -1 . 当 $x=-1$ 时, 函数 $f(x)$ 的值为 $f(-1) = 3$, 当 $x=2$ 时, 函数 $f(x)$ 的值为 $f(2) = 0$. 因此函数 $f(x) = x^2 - 2x, x \in [-1, 2]$ 的值域为 $[-1, 3]$. 故选 A.

2. B 解析: 函数 $y = f(3x+1)$ 的定义域为 $[-2, 4]$, 则 $-2 \leq x \leq 4$, 则 $-6 \leq 3x \leq 12$, 所以 $-5 \leq 3x+1 \leq 13$. 所以函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-5, 13]$. 故选 B.

小测试(十七) 函数的表示法

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. AD

3. $3\,000x, x \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

基础过关

1. C

2. D 解析: 设此一次函数的解析式为 $f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$), $\therefore$ 一次函数的图象经过点 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$,

$$\therefore \begin{cases} k+b=0, \\ b=1. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-1, \\ b=1. \end{cases} \therefore f(x) = -x+1.$$

3. C 解析: 由 $\frac{x+3x}{2} \cdot y = 100$, 得 $2xy = 100$. $\therefore y = \frac{50}{x}$ ($x > 0$).

4. B 解析: 令 $\frac{1-x}{1+x} = t$, 则 $x = \frac{1-t}{1+t}$. 故 $f(t) = \frac{1-t}{1+t}$, 即 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

5. C 解析: 由题意可知, 一开始速度较快, 后来速度变慢, 所以开始曲线比较陡峭, 后来曲线比较平缓. 又纵轴表示离家的距离, 所以开始时距离为 0, 到达学校后距离最大. 故选 C.

6. $\frac{3}{2}$ 4 解析: 由题图可知, $f(-5) = \frac{3}{2}$, $f(2) = 0$, $f(0) = 4$, 故 $f[f(2)] = 4$.

7. $f(x) = -x - \frac{2}{x}$ ($x \neq 0$) 解析: 因为 $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 3x$, 即 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ ①, 用 $\frac{1}{x}$ 代替上式中的 x , 可得 $f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{3}{x}$ ②, 联立①②, 消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 得 $f(x) = -x - \frac{2}{x}$ ($x \neq 0$).

8. 解: (1) 由题图知, 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-3, 0] \cup [1, 4]$.

(2) 由题图知, 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$.

(3) 由题图知, 当 $y \in (0, 2]$ 时, 只有唯一的 x 值与之对应.

素养提升

1. D 解析: 根据函数的定义及表示方法可知, 只有选项 D 中可化为 $y = x$ 或 $y = -x$, 不满足函数的定义. 故选 D.

2. A 解析: 因为 $y = \frac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 所以选项 A 中图象符合题意.

3. BD 解析: 令 $t = 2x - 1$, 则 $x = \frac{t+1}{2}$. $\therefore f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 = (t+1)^2$. $\therefore f(3) = 16$, $f(-3) = 4$, $f(x) = (x+1)^2$.

4. $F(x) = 3x + \frac{5}{x}$ ($x \neq 0$) 解析: 设 $f(x) = kx$ ($k \neq$

0), $g(x) = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$), 则 $F(x) = kx + \frac{m}{x}$. 由

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 16, F(1) = 8, \text{得} \begin{cases} \frac{1}{3}k + 3m = 16, \\ k + m = 8. \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} k=3, \\ m=5. \end{cases} \text{所以} F(x) = 3x + \frac{5}{x} (x \neq 0).$$

5. 解: (1) 由 $f(x) = x$, 得 $\frac{x}{ax+b} = x$,

$$\text{即} ax^2 + (b-1)x = 0.$$

$\therefore$ 方程 $f(x) = x$ 有唯一解, $a \neq 0$,

$$\therefore \Delta = (b-1)^2 = 0, \text{即} b=1.$$

$$\therefore f(2) = 1, \therefore \frac{2}{2a+b} = 1.$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{\frac{1}{2}x+1} = \frac{2x}{x+2}.$$

$$(2) \text{由(1)知, } f(x) = \frac{2x}{x+2},$$

$$\therefore f(-3) = 6, f(6) = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore f[f(-3)] = f(6) = \frac{3}{2}.$$

6. 解: (1) 由题意, 得 $\begin{cases} f(-3) = 9a - 3b + 3 = 0, \\ -\frac{b}{2a} = -1. \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = -2. \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = -x^2 - 2x + 3.$$

$$(2) \therefore g(2x+1) = f(x) = -x^2 - 2x + 3,$$

$$\text{设} 2x+1=t, \text{则} x = \frac{t-1}{2}.$$

$$\therefore g(t) = -\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{t-1}{2} + 3 = -\frac{t^2}{4} -$$

$$\frac{t}{2} + \frac{15}{4}.$$

$$\therefore g(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{15}{4}.$$

易错辨析

1. AC 解析: 因为函数 $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 1, \\ 2x^2, & x > 1, \end{cases}$ 所以当 $a \leq 1$ 时, $f(a) = -2a = 8$, 解得 $a = -4$, 符合题意; 当 $a > 1$ 时, $f(a) = 2a^2 = 8$, 解得 $a = -2$ (舍去) 或 $a = 2$. 综上可得, $a = -4$ 或 $a = 2$. 故选 AC.

2. $-\frac{3}{4}$ 解析: 当 $a > 0$ 时, $1-a < 1$, $1+a > 1$, 所以 $f(1-a) = 2(1-a) + a = 2-a$, $f(1+a) = -(1+a)$

$a) - 2a = -1 - 3a$. 由 $f(1-a) = f(1+a)$, 得 $2-a = -1-3a$. 解得 $a = -\frac{3}{2}$ (舍去). 当 $a < 0$ 时, $1-a > 1, 1+a < 1$, 所以 $f(1-a) = -(1-a) - 2a = -1-a, f(1+a) = 2(1+a) + a = 2+3a$. 由 $f(1-a) = f(1+a)$, 得 $-1-a = 2+3a$. 解得 $a = -\frac{3}{4}$. 综上, a 的值为 $-\frac{3}{4}$.

小测试(十八) 分段函数

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)×

2. C 3. D

基础过关

1. D 解析: 因为 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq 6, \\ f(x+3), & x < 6, \end{cases}$ 所以 $f(2) = f(5) = f(8) = 8-4=4$.

2. AD 解析: B 中的函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 4, \\ x^2, & x \leq 4 \end{cases}$ 中, 当 $x=4$ 时, 有两个函数值与之对应, 不满足函数的定义, 不是分段函数; C 中的函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & 1 \leq x \leq 5, \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ 中, 当 $x=1$ 时, 有两个函数值与之对应, 不满足函数的定义, 不是分段函数; 只有 AD 中的函数满足分段函数的定义, 是分段函数. 故选 AD.

3. D 解析: 由于在 B 地停留 1 h 期间, 距离 x 不变, 始终为 150 km, 故选 D.

4. B 解析: 因为当 $x=-1$ 时, $y=0$, 所以排除 AC; 又因为当 $x=-2$ 时, $y=1 > 0$, 所以排除 D, 故选 B.

5. AD 解析: 因为 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2, \end{cases}$ 若 $f(x) =$

1, 分 3 种情况讨论: ①当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = x+2 = 1$, 解可得 $x = -1$; ②当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = x^2 = 1$, 解可得 $x = \pm 1$. 又由 $-1 < x < 2$, 可知 $x = 1$; ③当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 2x = 1$, 解可得 $x = \frac{1}{2}$ (舍去). 综上所述, $x = 1$ 或 $x = -1$.

6. $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1, \\ x-2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 解析: 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x) = -1$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 设 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$, 则 $\begin{cases} k+b = -1, \\ 2k+b = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1, \\ b = -2. \end{cases}$ 此时 $f(x) = x -$

2. 综上, $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1, \\ x-2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

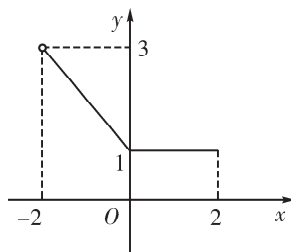
7. 4 解析: 当 $x \leq 0$ 时, $y = 2x + 3 \leq 3$; 当 $0 < x < 1$ 时, $3 < x + 3 < 4$; 当 $x \geq 1$ 时, $y = 5 - x \leq 4$. 故该函数的最大值是 4.

8. 解: (1) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 1 + \frac{x-x}{2} = 1$.

当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) = 1 + \frac{-x-x}{2} = 1 - x$.

$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1-x, & -2 < x < 0. \end{cases}$

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



(3) 由(2)知, $f(x)$ 在 $(-2, 2]$ 上的值域为 $[1, 3)$.

素养提升

1. A 解析: 当 $x \geq 4$ 时, $f(x) = \sqrt{x} + 2 \geq 4$. 因为函数

$f(x) = \begin{cases} (3-a)x+5a, & x < 4, \\ \sqrt{x}+2, & x \geq 4 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 所以当

$x < 4$ 时, $f(x) = (3-a)x + 5a$ 满足

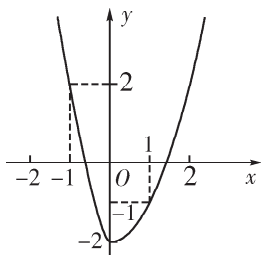
$\begin{cases} 3-a > 0, \\ 4(3-a) + 5a \geq 4. \end{cases}$ 解得 $-8 \leq a < 3$. 故实数 a 的取值范围是 $[-8, 3)$.

2. AC 解析: 当 $x \leq -1$ 时, $f(x)$ 的取值范围是 $(-\infty, 1]$, 当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x)$ 的取值范围是 $[0, 4)$, 因此 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 4)$, 故 A 正确; 当 $x = 1$ 时, $f(1) = 1^2 = 1$, 故 B 错误; 当 $x \leq -1$ 时, 由 $x+2=3$, 解得 $x=1$ (舍去), 当 $-1 < x < 2$ 时, 由 $x^2=3$, 解得 $x=\sqrt{3}$ 或 $x=-\sqrt{3}$ (舍去), 故 C 正确; 当 $x \leq -1$ 时, 由 $x+2 < 1$, 解得 $x < -1$. 当 $-1 < x < 2$ 时, 由 $x^2 < 1$, 解得 $-1 < x < 1$. 因此 $f(x) < 1$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, 故 D 错误. 故选 AC.

3. B 解析: 由题图知, $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \leq 0, \\ -x+2, & x > 0. \end{cases}$ 由 $f(x) \geq x^2 - x - a$, 得 $a \geq x^2 - x - f(x)$.

令 $g(x) = x^2 - x - f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2, & x \leq 0, \\ x^2 - 2, & x > 0. \end{cases}$

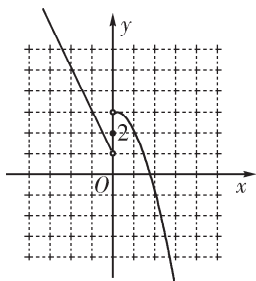
画出 $g(x)$ 的大致图象, 如图所示.



又 $g(0) = -2, g(1) = -1, g(-1) = 2$, 不等式的解集中有且仅有 1 个整数, 所以 $-2 \leq a < -1$, 即 a 的取值范围是 $\{a | -2 \leq a < -1\}$. 故选 B.

4. 13 解析: 该单位职工每月应交水费 y (单位: 元) 与实际用水量 x (单位: m^3) 满足的关系式为 $y = \begin{cases} mx, & 0 \leq x \leq 10, \\ 2mx - 10m, & x > 10. \end{cases}$ 由 $y = 16m$, 可知 $x > 10$. 令 $2mx - 10m = 16m$, 解得 $x = 13$.

5. 解: (1) 画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



$$(2) f(a^2 + 1) = 3 - (a^2 + 1)^2 = -a^4 - 2a^2 + 2, \\ f[f(3)] = f(-6) = 13.$$

$$(3) \text{当 } x > 0 \text{ 时, } 3 - x^2 \geq 2, \text{ 解得 } 0 < x \leq 1;$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } 2 \geq 2, \text{ 符合题意};$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } 1 - 2x \geq 2, \text{ 解得 } x \leq -\frac{1}{2}.$$

综上, 当 $f(x) \geq 2$ 时, x 的取值范围为

$$\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

6. 解: (1) 由题意得当 $0 < x < 40$ 时, $S(x) = 500x - (10x^2 + 100x) - 3\,000 = -10x^2 + 400x - 3\,000$.

$$\text{当 } x \geq 40 \text{ 时, } S(x) = 500x - \left(501x + \frac{10\,000}{x} - 4\,500 \right) - 3\,000 = 1\,500 - x - \frac{10\,000}{x}.$$

$$\text{所以 } S(x) = \begin{cases} -10x^2 + 400x - 3\,000, & 0 < x < 40, \\ 1\,500 - x - \frac{10\,000}{x}, & x \geq 40. \end{cases}$$

$$(2) \text{由 (1), 得当 } 0 < x < 40 \text{ 时, } S(x) = -10x^2 + 400x - 3\,000, \text{ 对称轴 } x = 20.$$

$$\text{当 } x = 20 \text{ 时, } S_{\max}(x) = 1\,000.$$

$$\text{当 } x \geq 40 \text{ 时, } S(x) = 1\,500 - x - \frac{10\,000}{x} = 1\,500 -$$

$$\left(x + \frac{10\,000}{x} \right).$$

$$\because x + \frac{10\,000}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{10\,000}{x}} = 200,$$

$$\text{当且仅当 } x = \frac{10\,000}{x}, \text{ 即 } x = 100 \text{ 时等号成立,}$$

$$\therefore S(x) \leq 1\,500 - 200 = 1\,300,$$

$$\therefore x = 100 \text{ 时, } S_{\max}(x) = 1\,300,$$

$$\therefore 1\,300 > 1\,000,$$

$\therefore x = 100$ 时, 即 2022 年产量为 100 百辆时, 企业所获利润最大, 且最大利润为 1 300 万元.

易错辨析

A 解析: $\because f(a) + f(1) = 0, \therefore f(a) = -f(1) = -2$. 当 $a > 0$ 时, $f(a) = 2a = -2, \therefore a = -1$ (舍去). 当 $a \leq 0$ 时, $f(a) = a + 1 = -2, \therefore a = -3$.

小测试(十九) 函数的单调性

预习自评

$$1. (1) \times \quad (2) \times \quad (3) \times$$

$$2. D \quad 3. \left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$$

基础过关

1. D 解析: 根据函数单调性的定义和性质来判断, A, B 选项中的“存在”“有无穷多”与定义中的“任意”不符, C 选项中也不能确定对任意 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in (I_1 \cup I_2)$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 只有 D 选项是正确的, 故选 D.

2. B 解析: 对于 A, 函数分别在 $(-\infty, 1)$ 和 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 但存在 $x_1 \in (0, 1)$, 使 $f(x_1) > f(1)$, 故 A 不符合题意; 对于 C, 函数分别在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 但存在 $x_1 > 1$, 使 $f(x_1) < f(1)$, 故 C 不符合题意; 对于 D, 函数分别在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 但存在 $x_1 = -1, x_2 = 1$, 使 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 D 不符合题意; 只有 B 符合增函数的定义, 具有单调性. 故选 B.

3. B 解析: 易知函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ 是图象开口向下的二次函数, 其对称轴为 $x = 1$, 所以其单调递减区间是 $(1, +\infty)$.

4. A 解析: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $y = |x| = x$, 所以 $y = |x|$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数; $y = 3 - x, y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上均是减函数; $y = -x^2 + 4$ 的图象是开口向下, 以直线 $x = 0$ 为对称轴的抛物线, 所以 $y = -x^2 + 4$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数.

5. C 解析: 因为该二次函数的图象开口向上, 对称轴

为直线 $x=2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递减. 因为 $2>1>-1$, 所以 $f(2)<f(1)<f(-1)$. 故选 C.

6. $[-1, 2]$ 解析: 由题图可知, $f(x)$ 在 $[-2, 6]$ 上的单调递增区间为 $[-2, -1]$ 和 $[2, 6]$, 单调递减区间为 $[-1, 2]$.

7. $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 解析: 由题意得,

$$\begin{cases} -2 < m-1 < 2, \\ -2 < 1-2m < 2, \text{解得 } -\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}. \\ m-1 < 1-2m. \end{cases}$$

8. 证明: 易知, $f(x) = -\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = (-\sqrt{x_2}) - (-\sqrt{x_1}) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}},$$

$\because x_1 - x_2 < 0, \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$,

$\therefore f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_2) < f(x_1)$.

$\therefore$ 函数 $f(x) = -\sqrt{x}$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上为减函数.

素养提升

1. ACD 解析: 对于 A, 因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数, $x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 故 A 中结论正确. 对于 B, 因为 x_1, x_2 的大小不确定, 所以 B 中结论不正确. 对于 C, 不妨令 $x_1 < x_2$, 由题意可得, $f(x_1) < f(x_2)$. 所以 $(x_1 - x_2) \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > 0$. 故 C 中结论正确. 对于 D, 不妨令 $x_1 < x_2$, 由题意可得, $f(x_1) < f(x_2)$. 所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$. 所以 D 中结论正确, 故选 ACD.

2. B 解析: $\because a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore f(a^2 - a + 1) \leq f(\frac{3}{4})$. 故选 B.

3. D 解析: $\because f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$, $\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. $\because \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}) - 1$, $\therefore \frac{f(x)}{x}$ 在 $[-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3}]$ 上单调递减. 故函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ 的“缓增区间”为 $[1, \sqrt{3}]$. 故选 D.

4. $[\frac{1}{2}, \frac{6}{5}]$ 解析: 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函

数, 所以 $\begin{cases} 2a \geq 1, \\ a > 0, \\ 1 - 4a + 5 \geq a. \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{6}{5}$. 故实数 a

的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{6}{5}]$.

5. (1) 解: 当 $a = -2$ 时, $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$.

令 $f(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0$, 解得 $x = \pm 1$.

所以满足 $f(x) = 0$ 的 x 的集合为 $\{-1, 1\}$.

(2) 证明: 当 $a = 4$ 时, $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$,

任取 $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + \frac{4}{x_1} - (2x_2 + \frac{4}{x_2})$

$$= 2(x_1 - x_2) + 4(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2})$$

$$= 2(x_1 - x_2) + 4 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$$

$$= 2(x_1 - x_2)(1 - \frac{2}{x_1 x_2}),$$

$\because 2 < x_1 < x_2, \therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 > 4$.

$$\therefore 0 < \frac{1}{x_1 x_2} < \frac{1}{4}.$$

$$\therefore 0 < \frac{2}{x_1 x_2} < \frac{1}{2}.$$

$$\therefore 1 - \frac{2}{x_1 x_2} > 0.$$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$.

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

6. 解: (1) 令 $x = y = 1$, 则 $f(1) = 2f(1)$.

可得 $f(1) = 0$.

(2) 取 $y = \frac{1}{x}$, 则 $f(x) + f(y) = f(x) + f(\frac{1}{x}) =$

$$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(1) = 0.$$

$$\therefore f(\frac{1}{x}) = -f(x).$$

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{则 } f(\frac{x_1}{x_2}) = f(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}) = f(x_1) + f(\frac{1}{x_2}) =$$

$$f(x_1) - f(x_2).$$

$$\because x_1 > x_2 > 0, \therefore \frac{x_1}{x_2} > 1.$$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f(\frac{x_1}{x_2}) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2).$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 由(2)知, $f(3) = -f(\frac{1}{3}) = -1$.

由 $f(x) + f(x-2) > -1$, 可得 $f[x(x-2)] > f(3)$, 即 $f(x^2-2x) > f(3)$.

由(2)知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

$$\text{则} \begin{cases} x^2-2x < 3, \\ x > 0, \\ x-2 > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 2 < x < 3.$$

因此不等式 $f(x) + f(x-2) > -1$ 的解集为 $(2, 3)$.

易错辨析

1. A 解析: 当 $a=0$ 时, $f(x) = -2x-3$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 满足题意; 当 $a \neq 0$ 时, 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 则根据二次函数的性质可得,

$$\begin{cases} a > 0, \\ \frac{1}{a} \geq 2. \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < a \leq \frac{1}{2}. \text{ 综上可得, } 0 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

故选 A.

2. $[3, +\infty) \quad (-\infty, -1]$ 解析: 由题意, 得 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$. 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 可以看作由 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2 - 2x - 3$ 复合而成. 因为 $y = \sqrt{t}$ 单调递增, $t = x^2 - 2x - 3$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增. 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[3, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1]$.

小测试(二十) 函数的最大值、最小值

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$

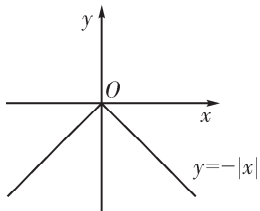
2. C 3. A

基础过关

1. C 解析: 因为 $y = \frac{1}{x-2}$ 在 $[3, 5]$ 上是减函数, 所以

当 $x=5$ 时, $y_{\min} = \frac{1}{3}$. 故选 C.

2. A 解析: 因为函数 $y = -|x|$ 的图象如图所示, 所以函数 $y = -|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上有最大值 0, 无最小值.



3. C 解析: $\because y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, $\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 2$; 当 $x = -3$ 时, $y_{\max} = 18$. $\therefore$ 该函数的值域为 $[2, 18]$. 故选 C.

4. AB 解析: 由题意, 得 $a \neq 0$. 当 $a > 0$ 时, 有 $(2a+1) - (a+1) = 2$, 解得 $a = 2$; 当 $a < 0$ 时, 有 $(a+1) - (2a+1) = 2$, 解得 $a = -2$. 综上知, $a = \pm 2$.

5. D 解析: 设 $f(x) = -x + a + 1$, 由不等式 $-x + a + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 都成立, 可得 $f(x)_{\min} \geq 0$.

因为 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是减函数, 所以 $f(x)_{\min} = a + \frac{1}{2}$. 所以 $a + \frac{1}{2} \geq 0$, 即 $a \geq -\frac{1}{2}$, 所以 $a_{\min} = -\frac{1}{2}$.

6. 4 解析: $\because f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, a]$ 上单调递减, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{4}$. $\therefore a = 4$.

7. $(-\infty, -1)$ 解析: 由题易知, 在 $[1, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增, 且 $f(x) \geq 0, m \neq 0$. 若 $m > 0$, 由函数 $f(x)$ 的单调性可知, $f(mx)$ 和 $mf(x)$ 均单调递增, 此时不符合题意. 若 $m < 0$, 则 $f(mx) + mf(x) < 0$ 可化为 $mx - \frac{1}{mx} + mx - \frac{m}{x} < 0$, 所以 $2mx - (m + \frac{1}{m}) \frac{1}{x} < 0$, 即 $1 + \frac{1}{m^2} < 2x^2$. 因为 $y = 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 2, 所以 $1 + \frac{1}{m^2} < 2$, 即 $m^2 > 1$. 解得 $m < -1$.

8. 解: (1) 依题意可得方程 $x^2 - 5ax + b = 0$ 的根为 4 或 1.

$\therefore$ 由根与系数的关系, 得 $\begin{cases} 4+1=5a, \\ 4 \times 1 = b, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=1, \\ b=4. \end{cases}$

(2) 由(1)知, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$,

$\because 0 < x < 1, \therefore 0 < 1-x < 1, \frac{1}{x} > 0, \frac{4}{1-x} > 0$.

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} = (\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x})[x + (1-x)] = \frac{1-x}{x} +$

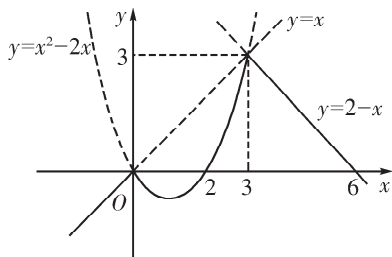
$\frac{4x}{1-x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x} \cdot \frac{4x}{1-x}} + 5 = 9$.

当且仅当 $\frac{1-x}{x} = \frac{4x}{1-x}$, 即 $x = \frac{1}{3}$ 时等号成立.

$\therefore f(x)$ 的最小值为 9.

素养提升

1. B 解析: 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = x^2 - 2x$, $y = 6 - x$, $y = x$ 的图象, 由 $f(x) = \min\{x^2 - 2x, 6 - x, x\}$ 知, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 取三个函数值中最小的, 因此 $f(x)$ 的图象如图所示(实线部分). 由图可得, $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 3]$.



2. ABC 解析: 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} + a \geq 2 + a$,

当且仅当 $x = 1$ 时等号成立. 因为 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 所以当 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $f(0) \leq 2 + a$. 所以

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 \leq 2 + a. \end{cases} \text{ 解得 } 0 \leq a \leq 2. \text{ 又因为 } a \in \mathbf{N}, \text{ 所以 } a \text{ 的}$$

值为 0, 1, 2. 故选 ABC.

3. D 解析: $\because f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1, x \in [-1, 2], \therefore f(x)_{\min} = f(1) = -1, f(x)_{\max} = f(-1) = 3. \therefore f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的值域为 $[-1, 3]$. 又 $\because g(x) = ax + 2 (a > 0)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, $\therefore g(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的值域为 $[-a+2, 2a+2]$. 依

$$\text{题意, 得 } \begin{cases} a > 0, \\ -a+2 \leq -1, \\ 2a+2 \geq 3, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a > 0, \\ a \geq 3, \\ a \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ 解得 } a \geq 3. \text{ 故}$$

选 D.

4. $[-9, -\frac{1}{4}]$ 解析: $f(x) = kx + 2x + 3k - 1 = (k+2)x + 3k - 1$. 由对于任意 $x \in [-4, 1]$, 不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 可得 $\begin{cases} -4k-8+3k-1 \leq 0, \\ k+2+3k-1 \leq 0. \end{cases}$ 解得 $-9 \leq k \leq -\frac{1}{4}$. 所以实数 k 的取值范围是 $[-9, -\frac{1}{4}]$.

5. 解: (1) 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是单调递增函数. 证明如下:

$$\forall x_1, x_2 \in (-1, +\infty), \text{ 且 } -1 < x_1 < x_2,$$

$$\text{又 } f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1},$$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = 2 - \frac{3}{x_1+1} - \left(2 - \frac{3}{x_2+1}\right) = \frac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

$$\text{因为 } -1 < x_1 < x_2,$$

$$\text{所以 } x_1 - x_2 < 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0.$$

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2).$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是单调递增函数.

(2) 由(1)知, $f(x)$ 在 $[1, m]$ 上单调递增,

$$\text{所以此时 } f(x) \text{ 的最大值为 } f(m) = \frac{2m-1}{m+1},$$

$$\text{最小值为 } f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } f(m) - f(1) = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{2m-1}{m+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

解得 $m = 2$.

6. 解: (1) 因为函数 $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b = a(x-1)^2 - a + 1 + b$, 其中 $a > 0$,

则其图象开口向上, 对称轴方程为 $x = 1$.

$\therefore$ 该函数在区间 $[2, 3]$ 上单调递增.

$$\therefore g(x)_{\min} = g(2) = 1 + b = 1, \text{ 解得 } b = 0.$$

$$g(x)_{\max} = g(3) = 3a + 1 + b = 4, \text{ 解得 } a = 1.$$

$$(2) \text{ 由(1), 知 } f(x) = \frac{g(x)}{x} = x + \frac{1}{x} - 2,$$

$$\text{则不等式 } f(x) - kx - 4 \leq 0 \text{ 等价于 } x + \frac{1}{x} - 2 -$$

$$kx - 4 \leq 0, \text{ 即 } kx \geq x + \frac{1}{x} - 6.$$

$\therefore$ 要满足不等式 $f(x) - kx - 4 \leq 0$ 在 $x \in [-1, 0)$

时恒成立, 只需满足 $k \leq \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 1$ 在 $x \in [-1, 0)$

时恒成立即可.

$$\text{设 } h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 = \left(\frac{1}{x} - 3\right)^2 - 8,$$

$$\because x \in [-1, 0), \therefore \frac{1}{x} \in (-\infty, -1].$$

$$\therefore \text{ 当 } \frac{1}{x} = -1 \text{ 时, } h(x)_{\min} = 16 - 8 = 8. \therefore k \leq 8.$$

易错辨析

解: 因为 $f(x) = x^2 - 2ax - 1 = (x-a)^2 - 1 - a^2$,

则 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = a$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是增函数,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 3 - 4a$,

$f(x)$ 的最小值为 $f(0) = -1$.

② 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上是减函数, 在 $(a, 2]$ 上是增函数,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 3 - 4a$,

$f(x)$ 的最小值为 $f(a) = -1 - a^2$.

③ 当 $1 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上是减函数, 在 $(a, 2]$ 上是增函数,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = -1$,

$f(x)$ 的最小值为 $f(a) = -1 - a^2$.

④ 当 $a \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是减函数,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = -1$,

$f(x)$ 的最小值为 $f(2) = 3 - 4a$.

小测试(二十一) 函数的奇偶性

预习自评

1. (1)× (2)× (3)×

2. B 3. C

基础过关

1. D

2. A 解析:因为该奇函数的定义域为 $\{-1, 2, a, b\}$,且奇函数的定义域关于原点对称,所以 a 与 b 中一个等于1,一个等于-2. 所以 $a+b=1+(-2)=-1$. 故选 A.

3. D

4. B 解析:由题意,得 $f(2)=-f(-2)=-[2 \times (-2)^3 + (-2)^2]=12$.

5. CD 解析:因为对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$),有 $\frac{f(x_1-2)-f(x_2-2)}{x_1-x_2} > 0$,不妨设 $0 \leq x_1 < x_2$,所以 $f(x_1-2)-f(x_2-2) < 0$,即 $f(x_1-2) < f(x_2-2)$. 所以 $f(x-2)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(x-2)$ 是偶函数,所以 $f(x-2)$ 的图象关于 y 轴对称. 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称. 所以 $f(-6)=f(2)$, $f(-3)=f(-1)$, 则 $f(-3) < f(0) < f(-6)$.

6. $x^3\sqrt{x^2+1}$ 解析:因为函数 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,所以 $f(-x)=(-x)^3 \cdot \sqrt{(-x)^2+1} = -x^3 \sqrt{x^2+1} = -f(x)$. 所以 $f(x)=x^3\sqrt{x^2+1}$.

7. -1 解析: $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x)=-f(x)$, 即 $\frac{(-x+1)(-x+a)}{-x} = -\frac{(x+1)(x+a)}{x}$,显然 $x \neq 0$. 整理,得 $x^2-(a+1)x+a=x^2+(a+1)x+a$. 故 $a+1=0$,解得 $a=-1$.

8. 解:(1)由奇函数的性质可作出它在 y 轴右侧的图象,如图1所示,易知 $f(3)=-2$.

(2)由偶函数的性质可作出它在 y 轴左侧的图象,如图2所示,易知 $f(1) > f(3)$.

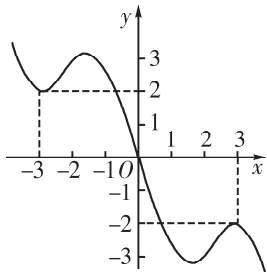


图 1

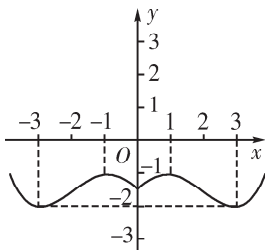


图 2

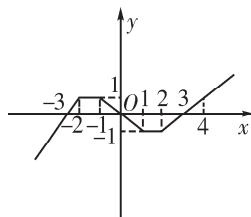
素养提升

1. D 解析:因为 $y=f(x)$ 是偶函数,所以 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称. 所以 $f(x)=0$ 的所有实数根之和为0.

2. C 解析:因为 $f(x)$ 为奇函数,且 $f(1)=-1$. 所以 $f(-1)=1$,所以 $-1 \leq f(x-1) \leq 1$ 等价于 $f(1) \leq f(x-1) \leq f(-1)$. 由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,可得 $-1 \leq x-1 \leq 1$,解得 $0 \leq x \leq 2$. 故选 C.

3. A 解析:根据题意, $f(x)+g(x)=x^2-\frac{1}{x+1}-2$, 则 $f(2)+g(2)=\frac{5}{3}$ ①, $f(-2)+g(-2)=3$. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义域上的奇函数与偶函数, 所以 $-f(2)+g(2)=3$ ②. 联立①②,解得 $f(2)=-\frac{2}{3}$.

4. $(3\sqrt{2}, +\infty)$ 解析:画出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示.



若对任意的 $x \in \mathbf{R}$,不等式 $f(x) > f(x-\sqrt{2}a)$ 恒成立,即函数 $f(x)$ 的图象始终在函数 $f(x-\sqrt{2}a)$ 的图象的上方. 当 $a < 0$ 时,将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $|\sqrt{2}a|$ 个单位长度,不能满足题意. 当 $a > 0$ 时,将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $|\sqrt{2}a|$ 个单位长度,只需 $|\sqrt{2}a| > 6$,即 $a > 3\sqrt{2}$.

5. (1)证明: $\because$ 函数 $f(x)=\frac{x+a}{b+x^2}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数,

$\therefore f(0)=0$,即 $\frac{a}{b}=0$,则 $a=0$.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$, $\therefore b=1$.

$\therefore f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

$\forall x_1, x_2 \in (-1, 1)$,且 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$\therefore f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}$.

$\because x_1, x_2 \in (-1, 1)$,且 $x_2-x_1 > 0, 1-x_1x_2 > 0$,

$$\therefore \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2)}{(1 + x_2^2)(1 + x_1^2)} > 0.$$

$$\therefore f(x_2) > f(x_1).$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增.

(2) 解: $\because f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 是 $(-1, 1)$ 上的奇函数且单调递增,

$$\text{又} \because f(m-1) + f(1-2m) < 0,$$

$$\therefore f(m-1) < f(2m-1).$$

$$\therefore \begin{cases} -1 < m-1 < 1, \\ -1 < 2m-1 < 1, \text{解得 } 0 < m < 1. \\ m-1 < 2m-1. \end{cases}$$

综上, 实数 m 的取值范围为 $(0, 1)$.

6. 解: (1) 我同意王鹏同学的观点.

理由如下:

假设 $f(x)$ 是奇函数,

$$\text{则由 } f(a) = a^2 + 3, f(-a) = a^2 - 4|a| + 3,$$

$$\text{令 } f(a) + f(-a) = 0,$$

$$\text{即 } a^2 - 2|a| + 3 = 0.$$

显然 $a^2 - 2|a| + 3 = 0$ 无解,

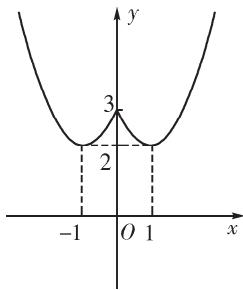
$\therefore f(x)$ 不可能是奇函数.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则有 $f(a) = f(-a)$,

$$\text{即 } a^2 + 3 = a^2 - 4|a| + 3, \text{解得 } a = 0.$$

经验证, 此时 $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$ 是偶函数.

(3) 由(2)知, $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$, 其图象如图所示.



由图可得, 其单调递增区间是 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

易错辨析

1. D 解析: 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2}$ 的定义域满足 $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ 4 - x^2 \geq 0, \end{cases}$ 即 $x^2 = 4$, 因此函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{-2, 2\}$, 关于原点对称, 此时 $f(x) = 0$, 满足 $f(-x) = -f(x)$, $f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 而函数 $h(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$ 的定义域为 $\{4\}$, 不关于原点对称, 因此函数 $h(x)$ 是非奇非偶函数.

2. 解: $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\because 2a^2 + a + 1 = 2\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0,$$

$$-3a^2 + 2a - 1 = -3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} < 0,$$

$$\therefore f(2a^2 + a + 1) < f(-3a^2 + 2a - 1) = f(3a^2 - 2a + 1).$$

$$\therefore 2a^2 + a + 1 > 3a^2 - 2a + 1, \text{即 } a^2 - 3a < 0.$$

解得 $0 < a < 3$.

故实数 a 的取值范围是 $(0, 3)$.

小测试(二十二) 幂函数

预习自评

$$1. (1) \times \quad (2) \times \quad (3) \times$$

2. B

基础过关

1. B 解析: 由题意, 得 $\begin{cases} m^2 + 2m - 2 = 1, \\ m - 1 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $m = -3$.

2. B 解析: 注意到函数 $y = x^2 \geq 0$, 且该函数是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 该函数图象应与②对应; $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的定义域、值域都是 $[0, +\infty)$, 该函数图象应与③对应; $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 其图象应与④对应.

排除法选 B.

3. CD 解析: 对于 A, 当 $\alpha = 0$ 时, 幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象是直线 $y = 1$, 除去点 $(0, 1)$, 故 A 不正确; 对于 B, $y = x$ 与 $y = x^3$ 的图象有三个公共点, 但这两个函数不相同, 故 B 不正确; 对于 C, 幂函数的图象一定经过点 $(1, 1)$, 若幂函数为奇函数, 则其图象一定经过点 $(-1, -1)$, 故 C 正确; 对于 D, 因为幂函数的图象一定经过点 $(1, 1)$, 所以由函数的定义知, 图象一定不经过点 $(1, -1)$, 故 D 正确. 故选 CD.

4. B 解析: 由已知, 得 $a = 0.3^2 < 1$, $b = 1.9^{0.3} > 1$. 又因为 $y = x^{0.3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $1.9^{0.3} < 2^{0.3}$, 故 $a < b < c$.

5. C 解析: 因为 $0 < a < b < 1$, 所以 $0 < a < b < 1 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. 又函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $f(a) < f(b) < f\left(\frac{1}{b}\right) < f\left(\frac{1}{a}\right)$.

6. $\frac{2}{5} \quad \frac{1}{5}$ 解析: 由题意, 得 $\begin{cases} 2a + b = 1, \\ a - 2b = 0. \end{cases}$ 解

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5}, \\ b = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

7. $(-\infty, \frac{2}{3})$ 解析: 因为函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且为增函数, 所以由不等式, 可得 $a+1 < 3-2a$, 解得 $a < \frac{2}{3}$.

8. 解: (1) 由题意, 得 $m^2 - 5m + 7 = 1$,
即 $m^2 - 5m + 6 = 0$. 解得 $m = 2$ 或 $m = 3$.
又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $m = 3$.
则 $f(x) = x^2$.

(2) 由(1)知, $g(x) = x^2 - ax - 3$.
因为 $g(x) = x^2 - ax - 3$ 在 $[1, 3]$ 上不是单调函数,
所以 $1 < \frac{a}{2} < 3$. 解得 $2 < a < 6$.

故实数 a 的取值范围为 $(2, 6)$.

素养提升

1. B 解析: 在 $y = ax + \frac{1}{a}$ 中, a 与 $\frac{1}{a}$ 同号, 当 $a > 0$ 时, 若 $x = 0$, 则 $y = \frac{1}{a} > 0$. 当 $a < 0$ 时, 若 $x = 0$, 则 $y = \frac{1}{a} < 0$, $\therefore$ 结合图象可排除 A, C 选项. 在选项 B, D 中, 由一次函数的图象知, $a < 0$, 由幂函数的图象性质可知, 选 B.

2. AC 解析: 因为函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 7)x^{-m-1}$ ($m \in \mathbf{R}$) 是幂函数, 所以 $m^2 - 5m + 7 = 1$. 解得 $m = 2$ 或 $m = 3$. 当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^{-3}$ 是奇函数, 不符合题意, 舍去; 当 $m = 3$ 时, $f(x) = x^{-4}$ 是偶函数, 符合题意. 故由 $f(2a+1) = f(a)$, 得 $f(|2a+1|) = f(|a|)$. 又因为 $f(x) = x^{-4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 所以 $|2a+1| = |a|$. 解得 $a = -1$ 或 $a = -\frac{1}{3}$. 故选 AC.

3. 1 解析: 由已知条件知, $M(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), N(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
 $\therefore (\frac{1}{3})^m = \frac{2}{3}, (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{3}$. $\therefore (\frac{1}{3})^{mn} = [(\frac{1}{3})^m]^n = (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{3}$. $\therefore mn = 1$.

4. 解: (1) 依题意, 得 $(m-1)^2 = 1$.
 $\therefore m = 0$ 或 $m = 2$.
当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^{-2}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 与题意矛盾, 舍去;
当 $m = 0$ 时, $f(x) = x^2$, 符合题意, 故 $m = 0$.

(2) 由(1)可知, $f(x) = x^2$.

当 $x \in (1, 2]$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均单调递增.

$\therefore$ 集合 $A = (1, 4], B = (1-k, 8-k]$.

$\therefore A \cup B = B, \therefore A \subseteq B$.

$$\therefore \begin{cases} 1-k \leq 1, \\ 8-k \geq 4. \end{cases}$$

$\therefore 0 \leq k \leq 4$.

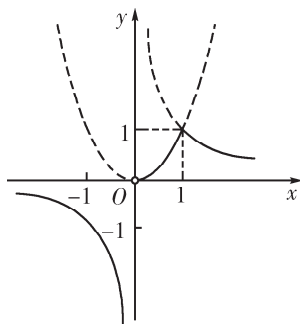
$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $[0, 4]$.

5. 解: (1) 设 $f(x) = x^a$, 因为点 $(\sqrt{2}, 2)$ 在幂函数 $f(x)$ 的图象上, 所以 $(\sqrt{2})^a = 2$.
解得 $a = 2$, 即 $f(x) = x^2$.

设 $g(x) = x^b$, 因为点 $(2, \frac{1}{2})$ 在幂函数 $g(x)$ 的图象上, 所以 $2^b = \frac{1}{2}$.

解得 $b = -1$, 即 $g(x) = x^{-1}$.

(2) 在同一平面直角坐标系中画出函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^{-1}$ 的图象, 可得函数 $h(x)$ 的图象如图所示(图中实线部分).



由题意及图象可知, $h(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x < 0 \text{ 或 } x > 1, \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

根据函数 $h(x)$ 的解析式及图象可知, 函数 $h(x)$ 的最大值为 1, 单调递增区间为 $(0, 1]$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

易错辨析

1. A 解析: $\because f(x) = x^a$ 为奇函数, $\therefore a = -1, 1, 3$. 又 $\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, $\therefore a = -1$.

2. B 解析: 由幂函数的定义, 可得 $m^2 - 3m + 3 = 1$. 解得 $m = 1$ 或 $m = 2$. 当 $m = 1$ 时, $y = x^{-2}$, 其图象不过原点; 当 $m = 2$ 时, $y = x^0$, 其图象不过原点. 故 $m = 1$ 或 $m = 2$.

小测试(二十三) 函数的应用(一)

预习自评

C

基础过关

1. A 解析:由题意设 $y=kx(k \neq 0)$, 将 $(36, 108)$ 代入解析式可得 $k=3$, 故 $y=3x$. 考虑到含氧量不可能为负, 可知 $x \geq 0$.
2. C 解析:令 $y=60$, 若 $4x=60$, 则 $x=15 > 10$, 不合题意; 若 $2x+10=60$, 则 $x=25$, 满足题意; 若 $1.5x=60$, 则 $x=40 < 100$, 不合题意. 故该公司拟录用人数为 25.
3. A 解析:令 $h=30t-5t^2=0$, 得 $t=0$ (舍) 或 $t=6$.
4. B 解析:设脚的长度为 y mm, 对应的鞋号为 x 号, 由题中表格可得, $y=5x+50$. 当 $x=30$ 时, $y=5 \times 30+50=200$. 故选 B.
5. B 解析:由题意设第一年的产量为 a , 则第三年的产量为 $a(1+44\%)=a(1+x)^2$, 解得 $x=0.2$. 故选 B.
6. 9 解析:设矩形框架一边长为 x m, 则其邻边长为 $\frac{12-2x}{2}=(6-x)$ m. 由 $\begin{cases} x>0, \\ 6-x>0, \end{cases}$ 得 $0 < x < 6$. $\therefore$ 面积 $S=x(6-x)=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$ ($0 < x < 6$). $\therefore$ 当 $x=3$ 时, S 取得最大值 9, 故框架的最大面积是 9 m^2 .
7. 500 解析:设汽车的速度为 v km/h, 则从 A 地到 C 地, $s=200-vt$ ($0 \leq t \leq 2$). 又 $t=2$ 时, $s=0$, $\therefore 2v=200$, 解得 $v=100$. 从 C 地到 B 地, $s=v(t-2)=100(t-2)$ ($2 < t \leq 5$), $\therefore$ 当 $t=5$ 时, $s=100 \times (5-2)=300$. $200+300=500$ (km), 故汽车从 A 地到 B 地行驶的路程为 500 km.
8. 解: (1) 依题意, 得
$$y = \begin{cases} 800, & 1 \leq x \leq 35 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}, \\ -10x + 1\,150, & 35 < x \leq 60 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$
 (2) 由题意, 得 $Q=y \cdot x - 15\,000 = \begin{cases} 800x - 15\,000, & 1 \leq x \leq 35 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}, \\ -10x^2 + 1\,150x - 15\,000, & 35 < x \leq 60 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}. \end{cases}$ 当 $1 \leq x \leq 35$ 且 $x \in \mathbf{N}$ 时, $x=35$, Q 取得最大值, 最大值为 $800 \times 35 - 15\,000 = 13\,000$. 当 $35 < x \leq 60$ 且 $x \in \mathbf{N}$ 时, $Q = -10x^2 + 1\,150x - 15\,000$, 其对称轴为 $x = \frac{115}{2}$. 当 $x=57$ 或 $x=58$, $Q=18\,060$. 又 $18\,060 > 13\,000$, 所以当 $x=57$ 或 $x=58$ 时, $Q_{\max}=18\,060$, 即当旅游团的人数 x 为 57 或 58 时, 旅行社可获得最大利润, 为 18 060 元.

素养提升

1. B 解析:设每天获利 y 元, 则 $y=(100-5x)(x-6)-100=-5(x-13)^2+145$, $x \geq 6$. 又 $Q=100-5x \geq 0$, 所以 $6 \leq x \leq 20$. 所以当 $x=13$ 时, 每天获利最大. 故选 B.
2. B 解析:由甲容器的形状可知, 注入水的高度随着时间的增长越来越高, 但增长的速度越来越慢, 即图象开始时陡峭, 后来趋于平缓, 观察图象可知只有 B 符合, 故选 B.
3. 0.5 解析:若以左边的树根为坐标原点建立平面直角坐标系, 则抛物线的对称轴为直线 $x=1$. 设抛物线方程为 $y=ax^2-2ax+2.5$, 当 $x=0.5$ 时, $y=0.25a-a+2.5=1$, 解得 $a=2$. $\therefore y=2(x-1)^2+0.5$. $\therefore$ 绳子的最低点距地面的距离为 0.5 m.
4. 解: (1) 依题意, 生产 x 辆新样式单车的总成本为 $(20\,000+100x)$ 元. 则
$$y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 300x - 20\,000, & 0 < x \leq 400 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}, \\ 60\,000 - 100x, & x > 400 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$
 (2) 当 $0 < x \leq 400$ 时, $y = -\frac{1}{2}(x-300)^2 + 25\,000$, 则当 $x=300$ 时, $y_{\max}=25\,000$; 当 $x > 400$ 时, $y=60\,000-100x$ 单调递减, 则 $y < 60\,000-100 \times 400 = 20\,000$. 所以当产量为 300 辆时, 自行车厂生产新样式单车的利润最大, 最大利润为 25 000 元.
5. 解: (1) 设投入资金 x 千万元, 则生产 A 芯片的毛收入 $y = \frac{x}{4}$ ($x > 0$), 将 $(1, 1)$, $(4, 2)$ 代入 $y=kx^a$, 得 $\begin{cases} k=1, \\ k \cdot 4^a=2. \end{cases} \therefore \begin{cases} k=1, \\ a=\frac{1}{2}. \end{cases}$ $\therefore$ 生产 B 芯片的毛收入 y 与 x 的关系式为 $y=\sqrt{x}$ ($x > 0$). (2) 令 $\frac{x}{4} > \sqrt{x}$, 得 $x > 16$; 令 $\frac{x}{4} = \sqrt{x}$, 得 $x = 16$; 令 $\frac{x}{4} < \sqrt{x}$, 得 $0 < x < 16$. 当投入资金大于 16 千万元时, 生产 A 芯片的毛收入更大; 当投入资金等于 16 千万元时, 生产 A, B 芯片的毛收入相等; 当投入资金小于 16 千万元时, 生产 B 芯片的毛收入更大. (3) 由题知, 投入 x 千万元生产 B 芯片,

则投入 $(40-x)$ 千万元资金生产 A 芯片.

$$\text{公司所获净利润 } f(x) = \frac{40-x}{4} + \sqrt{x} - 2 = -\frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)^2 + 9.$$

故当 $\sqrt{x}=2$, 即 $x=4$ 千万元时, 公司所获净利润最大, 最大净利润为 9 千万元.

易错辨析

解: 由题意可知, $AB=(16-x)m$,

$$\text{所以 } y=x(16-x)=-x^2+16x.$$

又 $x \geq a, 16-x \geq 4$, 所以 $a \leq x \leq 12$.

$$\text{所以 } y=-(x-8)^2+64, x \in [a, 12].$$

则对称轴方程为 $x=8$.

若 $0 < a \leq 8$, 则当 $x=8$ 时, $y_{\max}=64$.

若 $8 < a < 12$, 则 $y=-(x-8)^2+64$ 在 $[a, 12]$ 上单调递减,

则当 $x=a$ 时, $y_{\max}=-a^2+16a$.

所以 y 关于 x 的函数解析式为 $y=-x^2+16x, x \in [a, 12]$.

若 $0 < a \leq 8$, 则 $BC=8m$ 时, 花圃的面积最大, 最大面积为 $64m^2$;

若 $8 < a < 12$, 则 $BC=a m$ 时, 花圃的面积最大, 最大面积为 $(-a^2+16a)m^2$.

滚动卷(三) 小测试(十五)至(二十三)

综合拔高

1. D **解析:** 令 $t=\sqrt{x}$, 因为 $x \in [0, 9]$, 所以 $t \in [0, 3]$,

$$f(x)=x+\sqrt{x} \text{ 可转化为 } y=t^2+t=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}, t \in [0, 3]. \text{ 当 } t=3, \text{ 即 } x=9 \text{ 时, } f(x) \text{ 有最大值 } 12. \text{ 故选 D.}$$

2. A **解析:** 由题意, 得函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

$$\text{由 } f(-x)=\frac{2(-x)^2+8}{-x}=-\frac{2x^2+8}{x}=-f(x),$$

可知 $f(x)$ 是奇函数, 排除选项 C 和选项 D. 又

$$f(3)=\frac{18+8}{3}=\frac{26}{3}, f(4)=\frac{32+8}{4}=10, \text{ 由 } f(3) <$$

$f(4)$ 可知, 选项 B 错误. 故选 A.

3. C **解析:** 因为函数 $y=ax$ 与 $y=\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上

都是减函数, 则 $a < 0, b > 0$. 则 $y=ax^2+bx$ 图象的

对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a} > 0$. 故 $y=ax^2+bx$ 在

$(0, +\infty)$ 上先增后减.

4. C **解析:** 由题意知, 当 $a \in (0, 1)$ 时, 若 $f(a) =$

$f(a+1)$, 则 $\sqrt{a}=2a$, 解得 $a=\frac{1}{4}$. 则 $f(\frac{1}{a}-1) = f(3)=2 \times (3-1)=4$. 当 $a \in [1, +\infty)$ 时, 若 $f(a)=f(a+1)$, 则 $2(a-1)=2a$, 显然无解. 综上所述, 可得, $f(\frac{1}{a}-1)=4$. 故选 C.

5. D **解析:** 由题意可知, $f(0)=1, f(2)=-1$, 又知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 由 $|f(x-1)| > 1$, 得 $f(x-1) > 1$ 或 $f(x-1) < -1$, 即 $f(x-1) > f(0)$ 或 $f(x-1) < f(2)$. 所以 $x-1 < 0$ 或 $x-1 > 2$. 解得 $x < 1$ 或 $x > 3$, 故选 D.

6. $(2, +\infty)$ **解析:** 设幂函数为 $f(x)=x^a$, 因为其图象过点 $(2, 8)$, 所以 $2^a=8$. 解得 $a=3$. 所以 $f(x)=x^3$. 因为 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 所以由 $f(a-3) > f(1-a)$, 得 $a-3 > 1-a$, 解得 $a > 2$. 所以满足不等式 $f(a-3) > f(1-a)$ 的实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

7. 125 **解析:** 由已知投入广告费用为 3 万元时, 药品利润为 27 万元, 代入 $y=x^a$ 中, 得 $3^a=27$, 解得 $a=3$. 故函数解析式为 $y=x^3$. 所以当 $x=5$ 时, $y=125$.

8. **解:** (1) 当 $x > 0$ 时, $f(x)=-x^2+2x$.

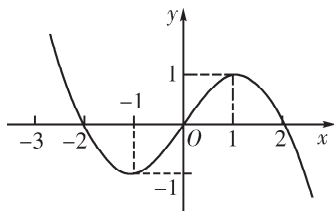
设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 且 $f(-x)=-f(x)$.

$$\therefore f(-x)=-x^2-2x=-f(x).$$

$$\therefore f(x)=x^2+2x. \text{ 又 } f(0)=0,$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -x^2+2x, & x \geq 0, \\ x^2+2x, & x < 0. \end{cases}$$

由解析式作出函数图象如图所示.



(2) 由图知, 函数 $f(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上单调递减, 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 则在 $[-3, 1]$ 上, $f(x)_{\min}=f(-1)=(-1)^2+2 \times (-1)=-1$. 当 $x=-3$ 时, $f(-3)=(-3)^2+2 \times (-3)=3$; 当 $x=1$ 时, $f(1)=-1^2+2 \times 1=1$. $\therefore$ 在 $[-3, 1]$ 上, $f(x)_{\max}=f(-3)=3$. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的值域是 $[-1, 3]$.

9. **解:** (1) $\because a > b$,

$$\therefore a-b > 0.$$

由题意, 得 $\frac{f(a)+f(-b)}{a-b} > 0$.

$$\therefore f(a) + f(-b) > 0.$$

又 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\therefore f(-b) = -f(b).$$

$$\therefore f(a) - f(b) > 0,$$

$$\text{即 } f(a) > f(b).$$

(2) 由 (1) 知, $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数.

$$\therefore f(1+m) + f(3-2m) \geq 0,$$

$$\therefore f(1+m) \geq -f(3-2m).$$

$$\text{即 } f(1+m) \geq f(2m-3).$$

$$\therefore 1+m \geq 2m-3, \therefore m \leq 4.$$

$$\therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围为 } (-\infty, 4].$$

素养提升

1. D 解析: 当 $x < 1$ 时, $f(x) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, 故 $f(x) \in [\frac{3}{4}, +\infty)$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} \in (0, 1)$. 故 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$. 故选 D.

2. B 解析: 由题意, 得函数 $f(x)$ 图象的对称轴是直线 $x = \frac{3}{2}$, 图象开口向上. 由 $f(x)$ 在区间 $(a, 2a-1)$ 上单调递减可知, $\frac{3}{2} \geq 2a-1$. 又 $a < 2a-1$, 解得 $1 < a \leq \frac{5}{4}$. 故选 B.

3. 2 解析: 当 $x \in [1, 2]$ 时, $x+1 \in [2, 3]$, 所以 $f(x+1) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{5}{12}(x+1) - \frac{1}{2} = \frac{5x-1}{12}$, 即 $f(x) = \frac{12}{5x-1} - 1$. 因为当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = \frac{12}{5x-1} - 1$ 是减函数, 则 $f(x)_{\max} = f(1) = 2$; 当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = \frac{5}{12}x - \frac{1}{2}$ 是增函数, $f(x)_{\max} = f(3) = \frac{3}{4}$. 所以当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)_{\max} = 2$. 因为对定义域上任意 x 都有 $f(x) \leq t$ 成立, 所以 $t \geq f(x)_{\max}$, 即 $t \geq 2$. 故 t 的最小值是 2.

4. 解: (1) $\because$ 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f(x) = \frac{4}{x} - x$ 为减函数, $\therefore$ 当 $x > 2$ 时, $f(x) = -x^2 + (a+2)x - 2a$ 也为减函数.

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{a+2}{2} \leq 2, \\ \frac{4}{2} - 2 \geq -2^2 + 2(a+2) - 2a. \end{cases} \quad \text{解得 } a \leq 2.$$

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

$$(2) \text{ 由题意可得, } f(1) = 3, f(2) = 0.$$

当 $a < 0$ 时, $f(2) = 0 > a$, $f(1) = 3 > a$, 不满足条件.

当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $f(x)$ 为定义域上的减函数,

仅有 $f(1) = 3 > a$ 成立, 满足条件.

当 $2 < a < 3$ 时, 在 $(0, 2]$ 上, 仅有 $f(1) = 3 > a$,

在 $(2, +\infty)$ 上, $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{a+2}{2}) =$

$$\frac{(a-2)^2}{4} < \frac{1}{4} < a,$$

所以在 $(2, +\infty)$ 上不存在正整数 x 满足 $f(x) - a > 0$.

故当 $2 < a < 3$ 时, 满足条件.

当 $3 \leq a < 7$ 时, 在 $(0, 2]$ 上, 不存在正整数 x 满足 $f(x) - a > 0$,

$$\text{在 } (2, +\infty) \text{ 上, } \frac{(a-2)^2}{4} - a = \frac{(a-4)^2 - 12}{4} < -\frac{3}{4},$$

所以在 $(2, +\infty)$ 上不存在正整数 x 满足 $f(x) - a > 0$.

故当 $3 \leq a < 7$ 时, 不满足条件.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[0, 3]$.

5. 解: (1) 设 $x > 0$, 则 $-x < 0$,

$$\text{则 } f(-x) = 2 \cdot (-x) - 1 = -2x - 1.$$

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x) = f(-x) = -2x - 1$.

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 0, \\ -2x-1, & x > 0. \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数,

所以 $f(x) > f(2x-1)$ 等价于 $|x| < |2x-1|$,

$$\text{即 } x^2 < (2x-1)^2. \text{ 解得 } x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1.$$

$$\text{所以不等式的解集是 } \left\{ x \mid x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1 \right\}.$$

(2) ① 因为 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

所以 $y=g(x+1)$ 为偶函数.

$$\text{所以 } g(1+x) = g(1-x), \text{ 即 } g(x) = g(2-x).$$

又当 $x < 1$ 时, $2-x > 1$,

$$\text{所以 } g(x) = g(2-x) = (2-x)^2 - \frac{1}{2-x} = x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{x-2}.$$

$$\text{所以 } g(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{x-2}, & x < 1. \end{cases}$$

② 任取 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } g(x_1) - g(x_2) = x_1^2 - \frac{1}{x_1} - \left(x_2^2 - \frac{1}{x_2} \right) = (x_1 -$$

$$x_2) \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} \right).$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$.

$$\text{又 } x_1 + x_2 > 0, \frac{1}{x_1 x_2} > 0,$$

$$\text{所以 } (x_1 - x_2) \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} \right) < 0,$$

即 $g(x_1) < g(x_2)$.

所以函数 $y = g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数.

又因为函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称,

所以 $g(x) > g(3x - 1)$ 等价于 $|x - 1| > |3x - 2|$,

$$\text{即 } (x - 1)^2 > (3x - 2)^2, \text{解得 } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}.$$

$$\text{所以不等式的解集为 } \left\{ x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \right\}.$$

小测试(二十四) n 次方根与分数指数幂

预习自评

1. 奇 2. $n - m$

$$3. 2^{\frac{4}{3}} \quad x^{\frac{2}{5}} \quad m^{-\frac{5}{6}} \quad \sqrt[7]{125} \quad \sqrt[4]{x^3} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

4. D

基础过关

1. C 解析: 由题意 $\frac{a^2}{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}} = a^{2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$. 故选 C.

2. BD 解析: 因为 $a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{25}{12}}$, 所以 A 中运算不正确; 因为 $a^{\frac{5}{3}} \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = a$, 所以 B 中运算正确; 因为 $a^{\frac{5}{3}} a^{-\frac{5}{3}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{5}{3}} = a^0 = 1$, 所以 C 中运算不正确; 因为 $(a^{\frac{3}{5}})^5 = a^{\frac{3}{5} \times 5} = a^3$, 所以 D 中运算正确. 故选 BD.

3. CD 解析: 对于选项 A, 因为 $-\sqrt{x} = -x^{\frac{1}{2}} (x \geq 0)$, 而 $(-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-x} (x \leq 0)$, 即 A 错误; 对于选项 B, 因为 $\sqrt[6]{y^2} = -y^{\frac{1}{3}} (y < 0)$, 即 B 错误; 对于选项 C, $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} (x \neq 0)$, 即 C 正确; 对于选项 D, $[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}} = x^{2 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} (x > 0)$, 即 D 正确.

4. A 解析: $\because x^{-\frac{2}{3}} = 4, \therefore \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = 4$, 即 $x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$. $\therefore x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^2$. $\therefore x = \pm \frac{1}{8}$. 故选 A.

5. D 解析: 由题意, 得 $a < 0$. $\therefore a \sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{(-a)^2 \left(-\frac{1}{a}\right)} = -\sqrt{-a}$. 故选 D.

$$6. \frac{19}{18} \quad \text{解析: } \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{2} - \frac{4}{9} = \frac{19}{18}.$$

$$7. a^{\frac{6}{5}} \quad \text{解析: } (a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}) \div (\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^9}) = (a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}}) \div (a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{9}{10}}) = a^{2 + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{9}{10}} = a^{\frac{6}{5}}.$$

$$8. \text{解: (1) } \left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5} + \sqrt{(-10)^2} - 2\sqrt{3} \times \sqrt[6]{27} - 4\pi^0 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{0.5} + 10 - 2\sqrt{3} \times (3^3)^{\frac{1}{6}} - 4 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + 10 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 3 = \frac{9}{4} + 10 - 6 - 3 = \frac{13}{4}.$$

$$(2) (a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}) \cdot (-3a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}) \div \left(\frac{1}{3} a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}}\right) = -9a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = -9a.$$

素养提升

1. C 解析: $\because \sqrt{a-1}$ 有意义, $\therefore a-1 \geq 0$, 即 $a \geq 1$. $\therefore (\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3} = (a-1) + |1-a| + (1-a) = (a-1) + (a-1) + (1-a) = a-1$. 故选 C.

2. A 解析: 由 $\sqrt{\sqrt{x^3}} = \frac{3}{x}$, 得 $x^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{x} \Rightarrow x^{\frac{7}{4}} = 3 \Rightarrow x = 3^{\frac{4}{7}} = 9^{\frac{2}{7}}$.

3. B 解析: $\because a - \frac{1}{a} = 2, \therefore \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$, 即 $a^2 - 2 + a^{-2} = 4$. $\therefore a^2 + a^{-2} = 6$. $\because a > 0, \therefore a + a^{-1} > 0$. $\therefore (a + a^{-1})^2 = a^2 + 2 + a^{-2} = 8, \therefore a + a^{-1} = 2\sqrt{2}$. $\therefore a^2 + a + a^{-2} + a^{-1} = 6 + 2\sqrt{2}$. 故选 B.

4. $\frac{2}{27}$ 解析: $\left(\frac{\sqrt[3]{m^2} \sqrt{n^{-3}}}{n \cdot \sqrt[3]{m^{-2}}} \div \sqrt{\frac{m \sqrt{n^{-4}}}{n \sqrt{m^{-2}}}}\right)^3 = \left[\frac{m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{-\frac{3}{2}}}{n \cdot m^{-\frac{2}{3}}} \div \left(\frac{m \cdot n^{-2}}{n \cdot m^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 = \left(m^{\frac{4}{3}} \cdot n^{-\frac{5}{2}} \cdot m^{-1} \cdot n^{\frac{3}{2}}\right)^3 = m \cdot n^{-3}$. $\therefore$ 当 $m = 2, n = 3$ 时, 原式 $= 2 \times 3^{-3} = \frac{2}{27}$.

5. 解: 因为 a, b 是方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 的两个实数根,

$$\text{所以 } \begin{cases} a+b=6, \\ ab=4. \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}} = \frac{6-2\sqrt{4}}{6+2\sqrt{4}} =$$

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

因为 $a > b > 0$, 所以 $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$.

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{6. 解: } \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y} = \frac{4\sqrt{xy}}{x-y}.$$

将 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}$ 代入上式, 得

$$\text{原式} = \frac{4\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{6}} = -24\sqrt{\frac{1}{3}} = -8\sqrt{3}.$$

易错辨析

1. C 解析: 当 $\sqrt{2-x}$ 有意义时, $x \leq 2$, 则 $\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-6x+9} = |x-2| - |x-3| = 2-x+x-3 = -1$.

2. 1 解析: $[(\sqrt{3}-2)^2]^{\frac{1}{4}} \times [(\sqrt{3}+2)^3]^{\frac{1}{6}} = (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times (\sqrt{3}+2)^{\frac{1}{2}} = [(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)]^{\frac{1}{2}} = 1$.

小测试(二十五) 无理数指数幂及其运算性质

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓

2. 125

基础过关

1. D 解析: $(\pi^{\sqrt{3}})^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}$. 故选 D.

2. B 解析: $\because b^{-3n} = 5^m, \therefore (b^{-3n})^{-\frac{1}{3n}} = (5^m)^{-\frac{1}{3n}}$, 即 $b = 5^{\frac{m}{3n}}$. 故选 B.

3. B 解析: $\because 3^a = 5, 3^b = 6, \therefore \frac{125}{36} = \frac{5^3}{6^2} = \frac{(3^a)^3}{(3^b)^2} = \frac{3^{3a}}{3^{2b}} = 3^{3a-2b}$. 故选 B.

4. D 解析: 原式 $= a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{7}{6}} = a^{-\frac{2}{3}}$. 故选 D.

5. C 解析: 由题意, 函数 $f(x) = a^x + a^{-x}$, 且 $f(1) = 3$, 可得 $a + \frac{1}{a} = 3$. 又 $f(2) = a^2 + a^{-2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = 7$, $f(0) = 1 + 1 = 2$, 所以 $f(0) + f(1) + f(2) = 12$.

6. 2 解析: 原式 $= (2^2)^{\sqrt{2}+1} \times 2^{3-2\sqrt{2}} \times (2^6)^{-\frac{2}{3}} = 2^{2\sqrt{2}+2} \times 2^{3-2\sqrt{2}} \times 2^{-4} = 2^{2\sqrt{2}+2+3-2\sqrt{2}-4} = 2$.

7. $9\sqrt{5}$ 解析: $\because a > 0, \therefore a^{2x+\frac{y}{2}} = (a^x)^2 \cdot (a^{\frac{y}{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{5}$.

8. 解: $\because a^{2x} = \sqrt{2} + 1$,

$$\therefore a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1, \text{ 即 } a^{2x} + a^{-2x} = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} + a^{-2x} - 1)}{a^x + a^{-x}} = a^{2x} + a^{-2x} - 1 = 2\sqrt{2} - 1.$$

素养提升

1. B 解析: $\because x^y = y^x, y = 9x, \therefore x^{9x} = (9x)^x, \therefore (x^9)^x = (9x)^x, \therefore x^9 = 9x, \therefore x^8 = 9, \therefore x = \sqrt[8]{9} = \sqrt[4]{3}$.

2. A 解析: $\because f(-1) = \frac{3}{4}, \therefore f(1) = -f(-1) = -\frac{3}{4}$, 即 $2^{1+a} - 1 = -\frac{3}{4}$, 即 $1+a = -2$, 解得 $a = -3$.

3. A 解析: 原式 $= (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1} (1 - 2^{-\frac{1}{32}}) (1 + 2^{-\frac{1}{32}}) (1 + 2^{-\frac{1}{16}}) (1 + 2^{-\frac{1}{8}}) (1 + 2^{-\frac{1}{4}}) (1 + 2^{-\frac{1}{2}}) = (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1} (1 - 2^{-\frac{1}{16}}) (1 + 2^{-\frac{1}{16}}) (1 + 2^{-\frac{1}{8}}) (1 + 2^{-\frac{1}{4}}) (1 + 2^{-\frac{1}{2}}) = (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1} (1 - 2^{-\frac{1}{8}}) (1 + 2^{-\frac{1}{8}}) (1 + 2^{-\frac{1}{4}}) (1 + 2^{-\frac{1}{2}}) = (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1} (1 - 2^{-\frac{1}{4}}) (1 + 2^{-\frac{1}{4}}) (1 + 2^{-\frac{1}{2}}) = (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1} (1 - 2^{-\frac{1}{2}}) (1 + 2^{-\frac{1}{2}}) = (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1} (1 - 2^{-1}) = \frac{1}{2} (1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$.

4. $\frac{64}{5}$ 解析: $\because 3^a = 2, 9^b = 3^{2b} = 5, \therefore 27^{2a-\frac{2}{3}b} = 3^{6a} \cdot 3^{-2b} = \frac{(3^a)^6}{3^{2b}} = \frac{2^6}{5} = \frac{64}{5}$.

5. 解: (1) 原式 $= \frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{4b^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} \div \frac{a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}[(a^{\frac{1}{3}})^3 - (2b^{\frac{1}{3}})^3]}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$.

(2) 原式 $= (2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}})^6 + (\sqrt{2^{\frac{3}{2}}})^{\frac{4}{3}} - 4 \times [(\frac{4}{7})^2]^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{3 \times \frac{1}{4}} - 1 = 2^2 \times 3^3 + 2^{\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} - 4 \times (\frac{4}{7})^{-1} - 2 - 1 = 108 + 2 - 7 - 3 = 100$.

6. 解: (1) $\because f(m) = 6, \therefore \frac{a^m + a^{-m}}{2} = 6$.

$$\therefore f(-m) = \frac{a^{-m} + a^m}{2} = 6.$$

$$(2) \because f(1)=3, \therefore \frac{a+a^{-1}}{2}=3.$$

$$\therefore a+a^{-1}=6.$$

$$\therefore f(2)=\frac{a^2+a^{-2}}{2}=\frac{(a+a^{-1})^2-2}{2}=17.$$

$$\therefore (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=8,$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}.$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{2}=\sqrt{2}.$$

易错辨析

B 解析:由题意,得 $a-1>0$, 即 $a>1$. 所以

$$(1-a) \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(a-1)^3}} = -\sqrt[4]{(a-1)^4 \cdot \frac{1}{(a-1)^3}} = -\sqrt[4]{a-1}. \text{ 故选 B.}$$

小测试(二十六) 指数函数的概念

预习自评

1. (1)× (2)× (3)×

2. B

基础过关

1. AD 解析:由指数函数的定义知,A,D选项是指数函数,B,C选项不是指数函数. 故选 AD.

2. A 解析:根据题意可得 $f(-1)=2^1=2$.

$\therefore f[f(-1)]=f(2)=a \cdot 2^2=1$, 解得 $a=\frac{1}{4}$. 故选 A.

3. B 解析:设指数函数的解析式为 $f(x)=a^x (a>0$, 且 $a \neq 1)$, 又由函数的图象经过点 $(3, 27)$, 则 $a^3=27$, 解得 $a=3$, 即 $f(x)=3^x$, 所以 $f(4)=3^4=81$. 故选 B.

4. D 解析:由指数函数的定义,得 $m^2-m-1=1$, 解得 $m=2$ 或 $m=-1$. 故选 D.

5. ACD 解析:由题图可知,函数 $y=a^t$ 图象经过点 $(1, 2)$, 即 $a^1=2$, 则 $a=2$, $\therefore y=2^t$. $\therefore 2^{t+1}-2^t=2^t$ 不是常数,则蓝藻每个月面积是上个月的2倍,且每个月的增长率为100%,故 A 正确,B 错误;当 $t=6$ 时, $y=2^6=64>60$, 故 C 正确;若蓝藻面积蔓延到 $2 \text{ m}^2, 3 \text{ m}^2, 6 \text{ m}^2$ 所经过的时间分别是 t_1, t_2, t_3 , 则 $2^{t_1}=2, 2^{t_2}=3, 2^{t_3}=6=2^{t_3}$, 则 $2^{t_1} \cdot 2^{t_2}=2 \times 3$, 即 $2^{t_1+t_2}=6=2^{t_3}$, 则 $t_1+t_2=t_3$, 故 D 正确.

6. 7 解析:由已知,得 $\begin{cases} a^{-1}+b=5, \\ a^0+b=4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=3. \end{cases}$ 所

以 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$. 所以 $f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+3=$

$$4+3=7.$$

7. $\sqrt{2}$ 解析: $f(-7.5)=f(-7.5+2)=f(-5.5)=f(-5.5+2)=f(-3.5)=f(-3.5+2)=f(-1.5)=f(-1.5+2)=f(0.5)=2^{0.5}=\sqrt{2}$.

8. 解:(1)由 $f(x)=a^x$ 的图象经过点 $P(2, 4)$, 得 $a^2=4$,

又 $a>0$, 所以 $a=2$.

(2)由(1)得, $f(x)=2^x$.

由 $f(2x)-3f(x)-4=0$,

得 $2^{2x}-3 \times 2^x-4=0$,

解得 $2^x=4$ 或 $2^x=-1<0$ (舍去).

由 $2^x=4$, 解得 $x=2$.

素养提升

1. AC 解析:因为函数 $f(x)$ 是指数函数, 所以 $\frac{1}{2}a-3=1$. 所以 $a=8$. 所以 $f(x)=8^x$. 所以 $f(0)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=8^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$. 故 A, C 正确.

2. B 解析:因为 $f(x)=\frac{3}{2^x+2}$, 所以 $f(2-x)=\frac{3}{2^{2-x}+2}=\frac{3 \cdot 2^x}{2 \cdot 2^x+4}$. 所以 $f(x)+f(2-x)=\frac{3}{2^x+2}+\frac{3 \cdot 2^x}{2(2^x+2)}=\frac{3}{2}$. 故 $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{5}{3}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{3}{2} \times 3+\frac{3}{2+2}=\frac{21}{4}$. 故选 B.

3. D 解析:设该乡镇现在人口数为 M , 则该乡镇现在一年的粮食总产量为 $360M \text{ kg}$, 1年后, 该乡镇粮食总产量为 $360M(1+4\%) \text{ kg}$, 人口数为 $M(1+1.2\%)$, 则人均占有粮食产量为 $\frac{360M(1+4\%)}{M(1+1.2\%)}$ kg , 2年后, 人均占有粮食产量为 $\frac{360M(1+4\%)^2}{M(1+1.2\%)^2}$ kg , 经过 x 年后, 人均占有粮食产量为 $\frac{360M(1+4\%)^x}{M(1+1.2\%)^x}$ kg , 则所求解析式为 $y=360\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^x$.

4. 3 解析:经过1年, 剩余物质的质量约是原来的 $\frac{4}{5}$; 经过2年, 剩余物质的质量约是原来的 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; 经过3年, 剩余物质的质量约是原来的 $\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$.

5. 解:(1)由题意,得 $a^2-3a+3=1, a>0$, 且 $a \neq 1$, 解得 $a=2$ 或 $a=1$ (舍去),

$$\therefore f(x) = 2^x.$$

$$(2) F(x) = 2^x - 2^{-x}, x \in \mathbf{R},$$

$$\therefore F(-x) = -F(x).$$

$\therefore F(x)$ 是奇函数.

6. 解: 设这个小镇平均每年要新增住房 x 万平方米, 据题意可得 $20 \times 8 + 6x = 20 \times (1 + 1\%)^6 \times 10$,

$$\text{所以 } x = \frac{200 \times 1.01^6 - 160}{6} \approx 9.$$

所以这个小镇平均每年至少需新增住房 9 万平方米.

易错辨析

4 解析: $\because$ 函数 $y = (a^2 - 5a + 5)a^x$ 是指数函数,

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 5a + 5 = 1, \\ a > 0, \text{ 且 } a \neq 1. \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 1 \text{ 或 } a = 4, \\ a > 0, \text{ 且 } a \neq 1, \end{cases} \therefore a = 4.$$

小测试(二十七) 指数函数的图象和性质

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\checkmark$ (4) $\times$

2. (3, $+\infty$)

基础过关

1. C 解析: 令 $x = -m$, 得到图象恒过定点 $(-m,$

$$2-n), \text{ 对应点 } (-1, 4), \text{ 故 } \begin{cases} -m = -1, \\ 2-n = 4, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} m = 1, \\ n = -2. \end{cases} \text{ 则 } m+n = -1. \text{ 故选 C.}$$

2. C 解析: $\because 0 < 0.5^{3.2} < 0.5^2 < 1, 2^{0.5} > 1, \therefore b < a < c$, 故选 C.

3. ACD 解析: 函数 $y = ax + a$ 的图象经过 $(-1, 0)$ 和 $(0, a)$ 两点, 选项 D 不可能; 在图 A 中, 由指数函数 $y = a^x$ 的图象得 $a > 1$, 由 $y = ax + a$ 的图象得 $0 < a < 1$, 选项 A 不可能; 在图 B 中, 由指数函数 $y = a^x$ 的图象得 $a > 1$, 由 $y = ax + a$ 的图象得 $a > 1$, 选项 B 可能; 在图 C 中, 由指数函数 $y = a^x$ 的图象得 $0 < a < 1$, 由 $y = ax + a$ 的图象得 $a > 1$, 选项 C 不可能. 故选 ACD.

4. D 解析: 由 $f(x) = -x^2 + 2ax = -(x-a)^2 + a^2$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 得 $a \leq 1$. 由 $g(x) = (a+1)^{1-x} = \left(\frac{1}{a+1}\right)^{x-1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数得 $0 < \frac{1}{a+1} < 1$, 因此 $a+1 > 1$, 解得 $a > 0$. 因此 a 的取值范围是 $(0, 1]$. 故选 D.

5. B 解析: 由 $2^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$, 得 $2^{x^2+1} \leq 2^{-2x+4}$, 即 $x^2+1 \leq -2x+4$, 解得 $-3 \leq x \leq 1$. $\therefore$ 函数 $y = 2^x$ 的

定义域为 $[-3, 1]$. 由于函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故当 $x = -3$ 时取得最小值 $\frac{1}{8}$, 当 $x = 1$ 时取得最大值 2, 所以函数的值域为 $\left[\frac{1}{8}, 2\right]$. 故选 B.

6. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ 解析: ① 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 所以 $f(x)_{\max} = f(1) = a$, $f(x)_{\min} = f(2) = a^2$. 所以 $a - a^2 = \frac{a}{2}$, 解得 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = 0$ (舍去). ② 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 在 $[1, 2]$ 上是增函数, 所以 $f(x)_{\max} = f(2) = a^2$, $f(x)_{\min} = f(1) = a$. 所以 $a^2 - a = \frac{a}{2}$. 解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$ (舍去). 综上所述, 实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$.

7. $(1, 2]$ 解析: 由函数 $f(x) = \begin{cases} (2a+3)x - 4a + 3, & x \geq 1, \\ a^x, & x < 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数可得 $\begin{cases} 2a+3 > 0, \\ a > 1, \\ (2a+3) - 4a + 3 \geq a, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$.

8. 解: (1) 由 $2^x - 1 \neq 0$, 可得 $x \neq 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$.

(2) $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$.

$$\text{又 } \because f(-x) = a + \frac{2}{2^{-x}-1} = a + \frac{2 \times 2^x}{1-2^x} = a -$$

$$\frac{2(2^x-1)+2}{2^x-1} = (a-2) - \frac{2}{2^x-1},$$

$$-f(x) = -a - \frac{2}{2^x-1},$$

$$\therefore a-2 = -a, \text{ 解得 } a = 1.$$

$$\text{因此 } f(x) = 1 + \frac{2}{2^x-1}.$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $2^x - 1 > 0$, $f(x) > 1$.

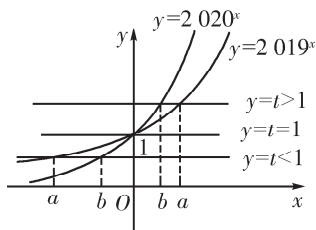
当 $x < 0$ 时, $-1 < 2^x - 1 < 0$, $f(x) < -1$.

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

素养提升

1. B 解析: 由函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $(0, 2)$ 上的值域是 $(1, a^2)$, 可知 $a > 1$, 即 $f(x)$ 是增函数, 因此选项 B 符合题意.

2. B 解析: 在同一平面直角坐标系中作出 $y = 2^{019^x}$ 与 $y = 2^{020^x}$ 的图象如图所示.



设 $2\,020^b = 2\,019^a = t$, 当 $t > 1$ 时, $0 < b < a$, ①正确;
当 $t = 1$ 时, $a = b = 0$, ⑤正确; 当 $0 < t < 1$ 时, $a < b < 0$, ②正确. ③④不可能成立. 故选 B.

3. B 解析: 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = |a^x - 1|$ 的大致图象如图 1 所示, 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ 的图象有两个公共点, 由图象可知 $0 < 2a < 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$.

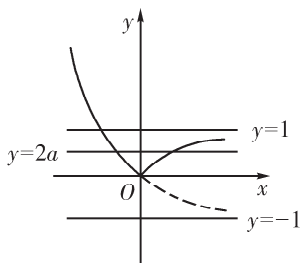


图 1

当 $a > 1$ 时, 函数 $y = |a^x - 1|$ 的大致图象如图 2 所示, 此时 $2a > 2$, 则直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ 的图象只有一个公共点.

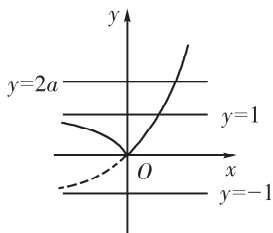


图 2

综上, $0 < a < \frac{1}{2}$, 故选 B.

4. $\frac{7}{6}$ 解析: 由已知可得 $\begin{cases} ba = 6, \\ ba^2 = 18, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = 2. \end{cases}$ 则不等式 $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - m \geq 0$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 上恒成立, 设 $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$, 显然函数 $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, $\therefore g(x) \geq g(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - m = \frac{7}{6} - m$. 故 $\frac{7}{6} - m \geq 0$, 即 $m \leq \frac{7}{6}$, $\therefore$ 实数 m 的最大值为 $\frac{7}{6}$.
5. 解: 设 $2^x = t (t > 0)$, 则 $y = t^2 - 2^a \cdot t - a$,
(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) > 30 \Leftrightarrow y = t^2 - 4t - 32 > 0$,
 $\therefore t < -4$ 或 $t > 8$.
 $\therefore t > 0$, $\therefore t > 8$. $\therefore 2^x > 8$.
 $\therefore x > 3$.
 $\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | x > 3\}$.

(2) 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$,

必有函数图象的对称轴 $t_0 = 2^{a-1} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 即 $0 < a < 2$,

故函数的最小值为 $m = \frac{4(-a) - (-2^a)^2}{4} = -2$,
 $\therefore a + 2^{2a-2} = 2$.

由于关于 a 的函数 $y = a + 2^{2a-2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,
故 $a + 2^{2a-2} = 2$ 最多有一个实根,
而当 $a = 1$ 时, $a + 2^{2a-2} = 2$, $\therefore a$ 的值为 1.

6. 解: (1) 因为定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{3^x}{a} + \frac{a}{3^x}$ 是偶函数,

则 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 即 $\frac{3^{-x}}{a} + \frac{a}{3^{-x}} = \frac{3^x}{a} + \frac{a}{3^x}$,

故 $\left(\frac{1}{a} - a\right)(3^{-x} - 3^x) = 0$ 恒成立.

因为 $3^{-x} - 3^x$ 不可能恒为 0,

所以当 $\frac{1}{a} - a = 0$ 时, $f(-x) = f(x)$ 恒成立.

而 $a > 0$, 所以 $a = 1$.

(2) 由 (1) 知, $f(x) = 3^x + \frac{1}{3^x}$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递增, 证明如下:

设任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(3^{x_1} + \frac{1}{3^{x_1}}\right) - \left(3^{x_2} + \frac{1}{3^{x_2}}\right) = \\ &= (3^{x_1} - 3^{x_2}) + \left(\frac{1}{3^{x_1}} - \frac{1}{3^{x_2}}\right) = (3^{x_1} - 3^{x_2}) + \end{aligned}$$

$$\frac{3^{x_2} - 3^{x_1}}{3^{x_1} \cdot 3^{x_2}} = \frac{(3^{x_1} - 3^{x_2})(3^{x_1} \cdot 3^{x_2} - 1)}{3^{x_1} \cdot 3^{x_2}}.$$

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $3^{x_1} < 3^{x_2}$, $3^{x_1} > 1$, $3^{x_2} > 1$.

所以 $\frac{(3^{x_1} - 3^{x_2})(3^{x_1} \cdot 3^{x_2} - 1)}{3^{x_1} \cdot 3^{x_2}} < 0$,

即 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

故函数 $f(x) = 3^x + \frac{1}{3^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 不存在. 理由如下: 由 (2) 知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而函数 $f(x)$ 是偶函数,
则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

若存在实数 m , 使得对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t-2) < f(2t-m)$ 恒成立,

则 $|t-2| < |2t-m|$ 恒成立, 即 $(t-2)^2 < (2t-m)^2$,
即 $3t^2 - (4m-4)t + m^2 - 4 > 0$ 对任意的 $t \in \mathbf{R}$ 恒成立,

则 $\Delta = [-(4m-4)]^2 - 12(m^2 - 4) < 0$,

则 $(m-4)^2 < 0$, 故 $m \in \emptyset$, 所以不存在.

易错辨析

1. $[-1, +\infty)$ 解析: 设 $t = 8 - 2x - x^2$, 则 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, 易知 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又知 $t = 8 - 2x - x^2$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减, 所以由 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 与 $t = 8 - 2x - x^2$ 复合而成的函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-2x-x^2}$ 的单调递增区间为 $[-1, +\infty)$.

2. $(1, +\infty)$ 解析: 设 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则 $t > 0$, $y = f(t) = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. $\therefore$ 函数 $f(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $\therefore f(t) > f(0) = 1$. $\therefore$ 函数 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 的值域为 $(1, +\infty)$.

小测试(二十八) 对数的概念

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. B 3. D

基础过关

1. A 解析: $\because 2^{\log_3 x} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, $\therefore \log_3 x = -2$. $\therefore x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

2. ABD 解析: $\log_3 9 = 2$ 应转化为 $3^2 = 9$.

3. C 解析: 由对数的定义知 $\begin{cases} 5-a > 0, \\ a-2 > 0, \end{cases}$ 解得 $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$.

4. C 解析: 由 $\log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0$, 得 $\log_3 (\log_4 x) = 1$, $\therefore \log_4 x = 3$. 从而 $x = 4^3 = 64$. 故选 C.

5. D 解析: 函数 $y = a^{x-2} + 3$ 中, 令 $x-2=0$, 解得 $x=2$, 此时 $y=1+3=4$, 所以定点 $P(2, 4)$. 设幂函数 $y=f(x)=x^a$, 则 $2^a=4$, 解得 $a=2$, 所以 $f(x)=x^2$. 所以 $f(3)=3^2=9$. 所以 $\log_3 f(3)=\log_3 9=2$. 故选 D.

6. 2 解析: $\log_3 9 + \log_5 1 = 2 + 0 = 2$.

7. 1 解析: 由题意, 得 $\begin{cases} x^2 + 3x = x + 3, \\ x^2 + 3x > 0, \\ x + 3 > 0 \text{ 且 } x + 3 \neq 1, \end{cases}$ 解得 $x=1$, 故实数 x 的值为 1.

8. 解: (1) 因为 $10^{-4} = 0.0001$,

所以 $\lg 0.0001 = -4$.

因为 $2^{-6} = \frac{1}{64}$, 所以 $\log_2 \frac{1}{64} = -6$.

$\log_{3.12} (\log_{15} 15) = \log_{3.12} 1 = 0$.

(2) 因为 $\log_4 x = -\frac{3}{2}$, 所以 $x = 4^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

因为 $\log_3 (\log_2 y) = 1$, 所以 $\log_2 y = 3$.

所以 $y = 2^3 = 8$.

所以 $xy = \frac{1}{8} \times 8 = 1$.

素养提升

1. A 解析: 由 $\log_3 2 = x$ 得 $3^x = 2$, 因此 $9^x = (3^x)^2 = 4$, 所以 $3^x + 9^x = 2 + 4 = 6$. 故选 A.

2. AB 解析: $\lg(\lg 10) = \lg 1 = 0$, $\lg(\ln e) = \lg 1 = 0$, 所以 AB 均正确; C 中, 若 $e = \ln x$, 则 $x = e^e$, 故 C 错误; D 中, $\lg 1 = 0$, 而 $\ln 0$ 没有意义, 故 D 错误.

3. A 解析: 设太阳的星等和亮度分别为 m_1 和 E_1 , 天狼星的星等和亮度分别为 m_2 和 E_2 , 则 $m_1 = -26.7$, $m_2 = -1.45$, $\therefore$ 由 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$,

得 $-1.45 - (-26.7) = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 即 $25.25 =$

$\frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, $\therefore \lg \frac{E_1}{E_2} = 10.1$. $\therefore \frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}$. 故选 A.

4. $\log_3 4$ 解析: $\because 2 \times 9^x - 28 = 3^x$, $2 \times (3^x)^2 - 28 = 3^x$, 即 $2 \times (3^x)^2 - 3^x - 28 = 0$, 即 $(3^x - 4)(2 \times 3^x + 7) = 0$, 解得 $3^x = 4$ 或 $3^x = -\frac{7}{2}$ (舍). 故 $x = \log_3 4$.

5. 解: 因为 $\log_{\frac{1}{2}} x = m$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^m = x$.

则 $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

因为 $\log_{\frac{1}{4}} y = m + 2$, 所以 $\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2} = y$.

则 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}$.

所以 $\frac{x^2}{y} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-(2m+4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$.

6. 解: $\because \log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0$, $\therefore \log_3 (\log_4 x) = 1$, $\therefore \log_4 x = 3$, $\therefore x = 4^3 = 64$.

由 $\log_4 (\log_2 y) = 1$, 知 $\log_2 y = 4$,

$\therefore y = 2^4 = 16$.

因此 $\sqrt{x} \cdot y^{\frac{3}{4}} = \sqrt{64} \times 16^{\frac{3}{4}} = 8 \times 8 = 64$.

易错辨析

4 解析: $\because \log_{(x-2)} (x^2 - 7x + 13) = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x^2 - 7x + 13 = 1, \\ x - 2 > 0 \text{ 且 } x - 2 \neq 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, \\ x > 2 \text{ 且 } x \neq 3, \end{cases} \text{ 解}$$

得 $x = 4$, 故 x 的值为 4.

小测试(二十九) 对数的运算

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)× (4)× (5)×

2. ABC

基础过关

1. B 解析: $4\lg 2 + 3\lg 5 - \lg \frac{1}{5} = \lg(2^4 \times 5^3 \times 5) = \lg 10^4 = 4$, 故选 B.

2. C 解析: $\log_5 12 = \frac{\lg 12}{\lg 5} = \frac{\lg 3 + \lg 4}{\lg \frac{10}{2}} = \frac{\lg 3 + 2\lg 2}{1 - \lg 2} =$

$$\frac{b+2a}{1-a} = \frac{2a+b}{1-a}, \text{ 故选 C.}$$

3. A 解析: 由 $2^a = m, 5^b = m (m > 0)$ 两边取对数, 得 $a = \log_2 m, b = \log_5 m$, 则 $\frac{1}{a} = \log_m 2, \frac{1}{b} = \log_m 5$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 2 + \log_m 5 = \log_m 10 = 2$. 所以 $m = \sqrt{10}$, 故选 A.

4. D 解析: 由 $\lg a, \lg b$ 是方程 $6x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根, 结合根与系数的关系, 得 $\lg a + \lg b = \frac{2}{3}, \lg a \cdot \lg b = -\frac{1}{2}$. $\therefore (\lg \frac{a}{b})^2 = (\lg a - \lg b)^2 = (\lg a + \lg b)^2 - 4\lg a \cdot \lg b = (\frac{2}{3})^2 - 4 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{22}{9}$, 故选 D.

5. B 解析: 由题可知, 抽气机抽 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 次后, 容器内的空气为原来的 $(\frac{2}{5})^n$. 令 $(\frac{2}{5})^n < 0.2\% =$

$$\frac{1}{500}, \therefore n > \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{500} = \frac{-\lg 500}{\lg \frac{2}{5}} = \frac{\lg \frac{10^3}{2}}{\lg \frac{10}{2^2}} =$$

$$\frac{3 - \lg 2}{1 - 2\lg 2} \approx 6.78, \text{ 则至少要抽的次数是 7, 故选 B.}$$

6. $\frac{5}{2}$ 解析: 原式 $= \log_2 6 - \log_2 3 - \frac{1}{2} + (2^{-2})^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \frac{6}{3} - \frac{1}{2} + 2^1 = 1 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

7. 0 解析: 原式 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \times 5^{\frac{1}{2} \log_5 5} - \log_3 7 \times \log_7 3^2 + \log_{12} 12 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 5^{\frac{1}{2}} - 2\log_3 7 \times \log_7 3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

8. 解: (1) 由 $\log_a 3 = m, \log_a 2 = n$, 得 $a^m = 3, a^n = 2$,

$$\therefore a^{m+2n} = a^m \cdot a^{2n} = 3 \times 2^2 = 12.$$

$$(2) \because m + n = \log_3 2 + 1,$$

$$\therefore \log_a 3 + \log_a 2 = \log_a 6 = \log_3 6, \text{ 即 } a = 3.$$

$$\therefore x + x^{-1} = a = 3.$$

$$\therefore (x - x^{-1})^2 = (x + x^{-1})^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5.$$

由 $0 < x < 1$ 知, $x - x^{-1} < 0$,

$$\therefore x - x^{-1} = -\sqrt{5}.$$

$$\therefore x^2 - x^{-2} = (x - x^{-1})(x + x^{-1}) = -\sqrt{5} \times 3 = -3\sqrt{5}.$$

素养提升

1. A 解析: 由对数的性质, 得 $\log_2 x^2 = \log_7 y$. 令 $z = \log_2 x^2 = \log_7 y$, 则 $x^2 = 2^z, y = 7^z$. 因为 $x\sqrt{y} = 14$, 所以 $x^2 y = 196$, 即 $2^z \cdot 7^z = (2 \times 7)^z = 14^z = 196$. 解得 $z = 2$. 所以 $x = 2, y = 49$, 从而 $xy = 98$. 故选 A.

2. B 解析: $\log_{49} 9 \cdot \log_5 7 = \log_7 3 \cdot \log_5 7 = \log_5 3 > 0$. 因为当 $x < 0$ 时, $f(x) = 5^{-x} - 1$, 且 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(\log_{49} 9 \cdot \log_5 7) = f(\log_5 3) = -f(-\log_5 3) = -f(\log_5 \frac{1}{3}) = -(5^{-\log_5 \frac{1}{3}} - 1) = -2$, 故选 B.

3. AD 解析: 由题意, 设 $4^a = 6^b = 9^c = k (k > 0)$, 则 $a = \log_4 k, b = \log_6 k, c = \log_9 k$. 对于选项 A, 由 $ab + bc = 2ac$, 可得 $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$. 因为 $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = \frac{\log_6 k}{\log_9 k} + \frac{\log_6 k}{\log_4 k} = \frac{\log_6 k}{\log_6 9} + \frac{\log_6 k}{\log_6 4} = \log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36 = 2$, 故 A 正确, B 错误; 对于选项 C, $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{\log_4 k} + \frac{1}{\log_6 k} = 2\log_k 4 + \log_k 6 = \log_k 96, \frac{2}{c} = \frac{2}{\log_9 k} = 2\log_k 9 = \log_k 81$, 故 $\frac{2}{c} \neq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$, 故 C 错误; 对于选项 D, $\frac{2}{b} - \frac{1}{a} = \frac{2}{\log_6 k} - \frac{1}{\log_4 k} = 2\log_k 6 - \log_k 4 = \log_k 9, \frac{1}{c} = \frac{1}{\log_9 k} = \log_k 9$, 故 $\frac{1}{c} = \frac{2}{b} - \frac{1}{a}$, 故 D 正确.

4. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 解析: 由 $\log_a b - \frac{3}{\log_a b} = 2$, 得 $\log_a b = 3$ 或 $\log_a b = -1$. 则 $b = a^3$ 或 $b = \frac{1}{a}$. 当 $b = a^3$ 时, $a^a = b^b = (a^3)^{a^3} = a^{3a^3}$, 则 $a = 3a^3$. $\therefore a > 0, \therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{\sqrt{3}}{9}$. 当 $b = \frac{1}{a}$ 时, $a^a = b^b = (\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{a}}$, 则 $a = -\frac{1}{a}$. $\therefore a > 0, \therefore$ 此时 a 无解. 综上所述, $a +$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

5. 解: (1) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \lg \frac{1}{100} - 3^{\log_3 2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{6}} + \lg 10^{-2} - 2 = 2 - 2 - 2 = -2.$

(2) $(\log_2 5 + \log_4 0.2) \times (\log_5 2 - \log_{25} 0.5) =$

$$\left(\log_2 5 + \frac{1}{2} \log_2 0.2\right) \times \left(\log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 0.5\right) =$$

$$\left(\log_2 5 + \log_2 \sqrt{\frac{1}{5}}\right) \times \left(\log_5 2 - \log_5 \sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\log_2 \sqrt{5} \times \log_5 2 \sqrt{2} = \frac{\lg \sqrt{5}}{\lg 2} \times \frac{\lg 2 \sqrt{2}}{\lg 5} = \frac{\frac{1}{2} \lg 5}{\lg 2} \times \frac{\lg 2 + \frac{1}{2} \lg 2}{\lg 5} =$$

$$\frac{\frac{3}{2} \lg 2}{\lg 5} = \frac{3}{4}.$$

6. 解: 设经过 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 年, 该高校全年投入的科研经费超过 2 000 万元.

依题意, 得 $1\,300 \times (1+0.12)^x > 2\,000$,

即 $1.12^x > \frac{20}{13}$.

$\therefore x > \log_{1.12} \frac{20}{13}$,

即 $x > \frac{\lg 2 - \lg 1.3}{\lg 1.12} \approx \frac{0.30 - 0.11}{0.05} = 3.8$.

又 $x \in \mathbf{N}^*$, 故 $x \geq 4$, 即从 2023 年起, 该高校全年投入的科研经费超过 2 000 万元.

易错辨析

D 解析: $\because 2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y (x > 2y > 0)$,

$$\therefore \lg(x-2y)^2 = \lg xy. \therefore (x-2y)^2 = xy. \therefore x^2 -$$

$$5xy + 4y^2 = 0. \therefore (x-y)(x-4y) = 0. \therefore x = y \text{ 或 } x = 4y.$$

$\because x - 2y > 0$, 且 $x > 0, y > 0$, $\therefore x \neq y$.

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{1}{4}.$$

小测试(三十) 对数函数的概念

预习自评

1. D 2. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

基础过关

1. AC 解析: 形如 $y = \log_a x (a > 0$, 且 $a \neq 1)$ 的函数是对数函数, 只有 A、C 选项中的函数是对数函数, 故选 AC.

2. B 解析: 将点 $(6, 3)$ 代入 $f(x) = \log_a(x+2)$ 中, 得 $3 = \log_a(6+2) = \log_a 8$. 即 $a^3 = 8$, $\therefore a = 2$. $\therefore f(x) = \log_2(x+2)$. $\therefore f(2) = \log_2(2+2) = 2$.

3. C 解析: 因为 $y = (a^2 - 4a + 4) \cdot \log_a x$ 是对数函

数, 所以 $a^2 - 4a + 4 = 1$. 解得 $a = 1$ 或 $a = 3$. 由于 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 所以 $a = 3$, 故选 C.

4. A 解析: 由题意知, 函数有意义时满足

$$\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1, \text{解得 } x > \frac{2}{3}, \text{且 } x \neq 1. \therefore \text{函数的定义域} \\ 3x-2 > 0. \end{cases}$$

是 $\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, 故选 A.

5. B 解析: A 中, 函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup$

$(0, +\infty)$, 与已知函数的定义域不同; B 中, 函数

$y = (\sqrt{x})^2 = x, x \in [0, +\infty)$, 与已知函数是同一个

函数; C 中, 函数 $y = \lg 10^x = x, x \in \mathbf{R}$, 与已知函数的

定义域不同; D 中, 函数 $y = 2^{\log_2 x} = x, x \in (0,$

$+\infty)$, 与已知函数的定义域不同.

6. $\frac{1}{4}$ 解析: $f\left[f\left(\frac{1}{9}\right)\right] = f\left(\log_3 \frac{1}{9}\right) = f(-2) =$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

7. $x = 4$ 解析: $\because \lg(x-1) + \lg(x-2) = \lg(x-1) \cdot$

$(x-2) = \lg(x+2)$, $\therefore$ 需满足

$$\begin{cases} (x-1) \cdot (x-2) = x+2, \\ x-2 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x+2 > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } x = 4.$$

8. 解: (1) 由函数 $f(x)$ 的定义域需满足 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x+1 > 0. \end{cases}$

解得 $-1 < x < 1$.

所以 $A = \{x | -1 < x < 1\}$.

设 $t = 2x - x^2$, 则 $t \in (-\infty, 1]$.

所以 $0 < 3^t \leq 3, -3 < 3^t - 3 \leq 0$.

所以 $B = \{y | -3 < y \leq 0\}$.

所以 $A \cap B = \{x | -1 < x \leq 0\}$.

(2) 由于 $C \subseteq (A \cap B)$,

若 $C = \emptyset$, 则 $a - 1 \geq 1 - 2a$, 解得 $a \geq \frac{2}{3}$.

$$\text{若 } C \neq \emptyset, \text{ 则 } \begin{cases} a-1 < 1-2a, \\ a-1 \geq -1, \\ 1-2a \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} \leq a < \frac{2}{3}.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

素养提升

1. C 解析: 由题意, 得 $\begin{cases} x - \frac{1}{2} \neq 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$ 解得 $x > -2$ 且

$x \neq \frac{1}{2}$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, 故选 C.

2. B 解析: $\because$ 函数 $f(x) = (a^2 + a - 5) \cdot \log_a x$ 为对数函数, $\therefore \begin{cases} a^2 + a - 5 = 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ 解得 $a = 2$. $\therefore f(x) =$

$\log_2 x$. $\therefore f(\frac{1}{8}) = \log_2 \frac{1}{8} = -3$, 故选 B.

3. A 解析: $\because$ 点 (m, n) 在函数 $y = \lg x$ 的图象上, $\therefore \lg m = n$. 当 $x = m^2$ 时, $\lg x = \lg m^2 = 2 \lg m = 2n$, $\therefore$ 点 $(m^2, 2n)$ 也在该函数的图象上, 故 A 符合题意; 当 $x = 10m$ 时, $\lg x = \lg(10m) = 1 + \lg m = n + 1$, 故 B 不符合题意; 当 $x = m + 10$ 时, $\lg(m + 10) \neq n + 1$, 故 C 不符合题意; 当 $x = \frac{m}{10}$ 时, $\lg \frac{m}{10} = \lg m - 1 = n - 1$, 故 D 不符合题意. 故选 A.

4. $(-\infty, 2)$ 解析: 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有意义, 所以 $x + \frac{1}{x} - a > 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立. 则 $a < x + \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立. 因为当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立, 所以 $a < 2$.

5. 解: (1) 由题意得 $b + \log_a 8 = 2, b + \log_a 1 = -1, a > 0$, 且 $a \neq 1$.

解得 $a = 2, b = -1$.

故 $f(x) = \log_2 x - 1$.

(2) 若 $[f(x)]^2 = 3f(x)$, 则 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 3$.

$\therefore \log_2 x - 1 = 0$ 或 $\log_2 x - 1 = 3$.

$\therefore x = 2$ 或 $x = 16$.

6. 解: (1) 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $ax^2 - x + 3 > 0$ 恒成立,

当 $a = 0$ 时, $-x + 3 > 0$ 不恒成立, 不符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 1 - 12a < 0. \end{cases}$ 解得 $a > \frac{1}{12}$.

综上所述, $a > \frac{1}{12}$.

(2) 由题可知, $ax^2 - x + 3 = 9$ 在 $[1, 3]$ 上有解.

即 $a = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x}$ 在 $[1, 3]$ 上有解.

设 $t = \frac{1}{x}, t \in [\frac{1}{3}, 1]$. 则 $a = 6t^2 + t$.

因为 $y = 6t^2 + t$ 在 $t \in [\frac{1}{3}, 1]$ 上单调递增,

所以 $y \in [1, 7]$.

所以 $a \in [1, 7]$.

易错辨析

D 解析: 由题意, 得 $\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ \lg x - 1 \neq 0, \\ x > 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \geq 4, \\ x \neq 10, \\ x > 0, \end{cases}$

$\therefore x \geq 4$ 且 $x \neq 10$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[4, 10) \cup (10, +\infty)$, 故选 D.

小测试(三十一) 对数函数的图象和性质

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$

2. (2, 0)

基础过关

1. BCD 解析: 因为 $0 < a < 1$, 所以函数 $y = \log_a x$ 的图象单调递减, 在 y 轴右侧, 过定点 $(1, 0)$. 函数 $f(x) = \log_a(x + 2)$ 的图象是把 $y = \log_a x$ 的图象向左平移 2 个单位长度, 所以图象过第二、三、四象限.

2. C 解析: 令 $x - 1 = 1$, 得 $x = 2$. 则 $f(2) = 4$, 即函数 $f(x)$ 的图象恒过定点 $Q(2, 4)$, 故选 C.

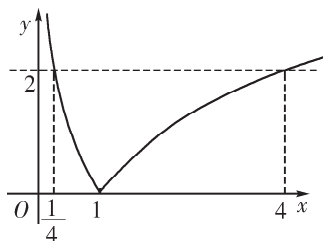
3. D 解析: 由函数 $y = 3^x$ 单调递增得 $3^{0.8} > 3^{0.7}$, A 正确; 由函数 $y = \log_{0.5} x$ 单调递减得 $\log_{0.5} 0.4 > \log_{0.5} 0.6$, B 正确; 由函数 $y = \log_2 x$ 单调递增得 $\log_2 0.3 < \log_2 1 = 0$, 而 $0.3^{0.2} > 0$, 所以 $\log_2 0.3 < 0.3^{0.2}$, C 正确; 由函数 $y = 0.75^x$ 单调递减得 $0.75^{-0.3} > 0.75^{-0.1}$, D 错误. 故选 D.

4. B 解析: 由 $f(-x) = \lg(|-x| - 1) = \lg(|x| - 1) = f(x)$ 得, $f(x)$ 是偶函数, 由此 C, D 错误. 又当 $x > 0$ 时, $f(x) = \lg(x - 1)$ 是 $(1, +\infty)$ 上的增函数, 故选 B.

5. A 解析: 画出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示. 令 $|\log_2 x| = 2$, 得 $x = \frac{1}{4}$ 或 $x = 4$. 由图象可知, 当值域

为 $[0, 2]$ 时, 定义域的最小区间是 $[\frac{1}{4}, 1]$, 则 $b - a$

的最小值为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 故选 A.



6. $(-\infty, -1)$ 解析: 由题意知, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,
 $\therefore f(x^2 - 2x - 3) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x - 3)$. 令 $t = x^2 - 2x - 3$, 则 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$. $\because y = \log_{\frac{1}{2}} t, t > 0$ 是单调递减函数, $\therefore$ 函数 $f(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递增区间, 只需满足 $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x \leq 1. \end{cases}$ 解得 $x < -1$. $\therefore$ 函数 $f(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$.

7. $(1, 2]$ 解析: 若函数 $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 2, \\ \log_a x, & x > 2 \end{cases}$ 的值域为 $[1, +\infty)$, $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 当 $x \leq 2$ 时, $y = 3 - x \geq 1$, 所以 $\begin{cases} x > 2, \\ \log_a x \geq 1. \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$.

8. 解: (1) $\because \log_a 3 > \log_a 2, \therefore a > 1$.
 $\therefore y = \log_a x$ 在 $[a, 2a]$ 上为增函数.
 $\therefore \log_a (2a) - \log_a a = \log_a 2 = 1$.
 $\therefore a = 2$.

(2) 依题意知, $\begin{cases} x-1 < 2-x, \\ x-1 > 0, \end{cases}$ 解得 $1 < x < \frac{3}{2}$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $(1, \frac{3}{2})$.

(3) 由(1)知, $g(x) = |\log_2 x - 1|$.

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $g(x) = 0$.

$\therefore g(x) = \begin{cases} 1 - \log_2 x, & 0 < x \leq 2, \\ \log_2 x - 1, & x > 2. \end{cases}$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, 2]$ 上为减函数, 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数.

$\therefore g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2]$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

素养提升

1. ABD 解析: 函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 又函数 $y = a^x$ 的图象过 $(0, 1)$, $y = \log_a x$ 的图象过 $(1, 0)$, 观察图象知, 只有 C 正确, 故选 ABD.

2. D 解析: 由题意得, 二次函数 $y = x^2 - 2ax + a$ 有零点, 因此 $\Delta = 4a^2 - 4a \geq 0$. 解得 $a \leq 0$ 或 $a \geq 1$, 故选 D.

3. C 解析: 因为对任意两个不相等的实数 $x_1, x_2 \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, 所以 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - ax - a)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上是增函数. 令 $u = x^2 - ax - a$, 而 $y = \log_{\frac{1}{3}} u$ 是减函数, 所以 $u = x^2 - ax - a$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上是减函数, 且 $u =$

$x^2 - ax - a > 0$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上恒成立. 所以

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \geq -\frac{1}{2}, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)a - a \geq 0. \end{cases} \quad \text{解得 } -1 \leq a \leq \frac{1}{2},$$

故选 C.

4. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$ 解析: $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,
 $\therefore f(\log_2 m) + f(\log_{\frac{1}{2}} m) \leq 2f(1) \Leftrightarrow f(\log_2 m) + f(-\log_2 m) \leq 2f(1) \Leftrightarrow f(\log_2 m) \leq f(1) \Leftrightarrow f(|\log_2 m|) \leq f(1)$. $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调, $\therefore |\log_2 m| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \log_2 m \leq 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 m \leq \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2$.

5. 解: (1) 不等式即为 $\log_a (1-x) < \log_a (x+3)$.

$\therefore 0 < a < 1$,

$\therefore$ 对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore \begin{cases} 1-x > x+3, \\ x+3 > 0. \end{cases}$ 解得 $-3 < x < -1$.

故不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集为 $\{x | -3 < x < -1\}$.

(2) $F(x) = f(x) + g(x) = \log_a (1-x) + \log_a (x+3) = \log_a (-x^2 - 2x + 3)$.

由 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < x < 1$.

$\therefore$ 函数 $y = F(x)$ 的定义域为 $(-3, 1)$.

$\because$ 内层函数 $u = -x^2 - 2x + 3$ 在区间 $(-3, -1)$ 上单调递增, 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减,

外层函数 $y = \log_a u$ 单调递减,

$\therefore$ 函数 $y = F(x)$ 的单调递减区间为 $(-3, -1)$, 单调递增区间为 $(-1, 1)$.

$\therefore F(x)_{\min} = F(-1) = \log_a 4 = -4$, 即 $a^{-4} = 4$.

$\therefore a = 4^{-\frac{1}{4}} = (2^2)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 解: (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^x} - 1\right)$,

故 $\frac{1}{2^x} - 1 > 0$, 解得 $x < 0$.

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$.

(2) 由题意知, $f(x) = \log_a (a^x - 1)$ ($a > 1$) 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$\therefore f(x) < f(1), \therefore \begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \end{cases}$

$\therefore$ 不等式的解集为 $(0, 1)$.

(3) 当 $a = 2$ 时, 令 $g(x) = f(x) - \log_2 (1 + 2^x) =$

$$\log_2 \frac{2^x-1}{2^x+1}, x \in [1, 3].$$

$$\text{设 } t = \frac{2^x-1}{2^x+1} = 1 - \frac{2}{2^x+1}, x \in [1, 3].$$

$$\because 2^x+1 \in [3, 9], \therefore t = 1 - \frac{2}{2^x+1} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right].$$

易证 $g(x) = \log_2 \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增.

$$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = \log_2 \frac{1}{3}.$$

$\therefore f(x) - \log_2(1+2^x) > m$ 对任意实数 $x \in [1, 3]$ 恒成立,

$$\therefore m < g(x)_{\min} = \log_2 \frac{1}{3}.$$

$$\text{即 } m \in \left(-\infty, \log_2 \frac{1}{3}\right).$$

易错辨析

1. B 解析: 令 $f(x) = 2 - ax$, $\because a > 0$, 且 $a \neq 1$, $\therefore f(x) = 2 - ax$ 是关于 x 的减函数. 由复合函数的单调性知, 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数. 由真数大于零知, $f(x)_{\min} > 0$, $\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $2 - a > 0$, 即 $a < 2$. 综上所述, $a \in (1, 2)$, 故选 B.

2. C 解析: 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\begin{cases} a-2 > 0, \\ a > 1, \\ (a-2) \times 1 - 1 \leq \log_a 1. \end{cases}$ 解得 $2 < a \leq 3$, 故选 C.

小测试(三十二) 不同函数增长的差异

预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)✗

2. $y = x^2$

基础过关

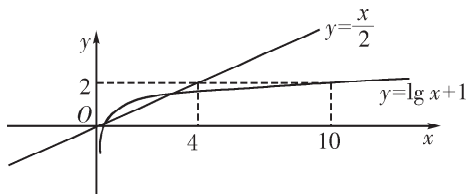
1. B 解析: 对于 D, 一次函数的增长速度不变, A, C 中函数的增长速度越来越快, 只有 B 中对数函数的增长速度越来越慢, 符合题意. 故选 B.

2. ABD 解析: 由所给数据可知 y 随 x 的增大而增大, 且增长速度越来越快, 而 A, D 中的函数增长速度越来越慢, B 中的函数增长速度保持不变.

3. C 解析: 小明匀速运动时, 所得图象为一条直线, 且距离学校越来越近, 故排除 A. 因交通堵塞停留了一段时间, 与学校的距离不变, 故排除 D. 后来为了赶时间加快速度行驶, 故排除 B. 故选 C.

4. B 解析: A 选项中, 当 $x = 10$ 时, $y = 4$, 超过 2 万元, 不符合; B 选项中, $y = \lg x + 1$ 在 $[4, 10]$ 上是增函数, $x = 10$ 时, $y_{\max} = 2$, 结合图象知, $\lg x + 1 < \frac{x}{2}$

在 $x \in [4, 10]$ 上恒成立, 故 B 符合; C 选项中, 当 $x = 10$ 时, $y = \sqrt{10} > 2$, 超过 2 万元, 不符合; D 选项中, 当 $x = 10$ 时, $y = \left(\frac{9}{8}\right)^{10}$, 设 $\left(\frac{9}{8}\right)^{10} = a$, 则 $\lg a = 10(\lg 9 - \lg 8) = 10(2\lg 3 - 3\lg 2) \approx 0.6$. 因此 $a \approx 10^{0.6} > \sqrt{10} > 2$, 超过 2 万元, 不符合. 故选 B.



5. $\frac{2}{3} \quad \frac{73}{15}$ 解析: 由模拟函数及散点图, 得

$$\begin{cases} a \lg 1.6 + b = 5, \\ a \lg 3.2 + b = 5.2. \end{cases} \therefore a(\lg 3.2 - \lg 1.6) = 0.2.$$

$$\therefore a \lg 2 = 0.2. \text{ 解得 } a = \frac{2}{3}. \therefore b = 5 - \frac{2}{3} \lg 1.6 = 5 -$$

$$\frac{2}{3}(4\lg 2 - 1) = 5 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{73}{15}.$$

6. 解: (1) 曲线 C_1 对应的函数为 $g(x) = x^3$,

曲线 C_2 对应的函数为 $f(x) = 2^x$.

(2) $\because f(1) = 2 > g(1) = 1, f(2) = 4 < g(2) = 8,$

$f(9) = 512 < g(9) = 729,$

$f(10) = 1\,024 > g(10) = 1\,000,$

$\therefore 1 < x_1 < 2, 9 < x_2 < 10.$

$\therefore x_1 < 6 < x_2, x_2 < 2\,022.$

由题图可得, 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f(x) < g(x),$

$\therefore f(6) < g(6).$

当 $x > x_2$ 时, $f(x) > g(x),$

$\therefore f(2\,022) > g(2\,022).$

又 $g(2\,022) > g(6),$

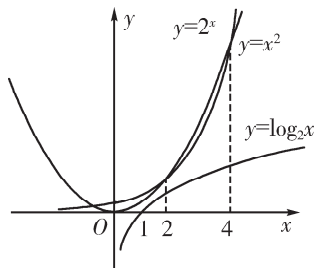
$\therefore f(2\,022) > g(2\,022) > g(6) > f(6).$

素养提升

1. D 解析: 设该林区的原有森林蓄积量为 a , 由题意知 $ax = a(1 + 0.104)^y$, 即 $y = \log_{1.104} x (x \geq 1)$, 所以 $y = f(x)$ 的图象大致为 D 中图象, 故选 D.

2. A 解析: 设甲、乙两食堂 1 月份的营业额均为 m , 甲食堂的营业额每月增加 $a (a > 0)$, 乙食堂的营业额每月增加的百分率为 x , 由题意可知, $m + 8a = m \times (1 + x)^8$, 则 5 月份甲食堂的营业额 $y_{\text{甲}} = m + 4a$, 乙食堂的营业额 $y_{\text{乙}} = m \times (1 + x)^4 = \sqrt{m(m + 8a)}$. 因为 $y_{\text{甲}}^2 - y_{\text{乙}}^2 = (m + 4a)^2 - m(m + 8a) = 16a^2 > 0$, 所以 $y_{\text{甲}} > y_{\text{乙}}$. 故当年 5 月份甲食堂的营业额较高.

3. B 解析:(方法一)在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=\log_2 x$, $y=x^2$, $y=2^x$ 的图象如图所示,在区间 $(2,4)$ 内从上往下依次是 $y=x^2$, $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 的图象. $\therefore x^2 > 2^x > \log_2 x$. 故选 B.



(方法二)取 $x=3$,经检验知 B 正确. 故选 B.

4. ③④⑤ 解析:路程 $f_i(x)$ ($i=1,2,3,4$) 关于时间 x ($x \geq 0$) 的函数关系式分别为 $f_1(x)=2^x-1$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x$, $f_4(x)=\log_2(x+1)$. 它们对应的函数模型分别是指数型函数模型、二次函数模型、一次函数模型和对数型函数模型. 当 $x=2$ 时, $f_1(2)=3$, $f_2(2)=4$, 则①不正确; 当 $x=5$ 时, $f_1(5)=31$, $f_2(5)=25$, 则②不正确; 根据四种函数的变化特点, 对数型函数的增长速度是先快后慢, 画出四个函数的图象(图略), 可知当 $x=1$ 时, 甲、乙、丙、丁四个的路程相等, 从而当 $0 < x < 1$ 时, 丁在最前面, 当 $x > 1$ 时, 丁在最后面, 则③正确; 结合对数型函数和指数型函数的图象变化情况, 可知丙不可能在最前面, 也不可能最后面, 则④正确; 指数型函数的增长速度是先慢后快, 若运动的时间足够长, 则最前面的物体一定是按照指数型函数运动的物体, 即一定是甲, 则⑤正确.

5. 解:(1)不符合. 理由如下:

对于函数模型 $f(x)=\frac{x}{30}+10$,

当 $x \in [25, 1\ 600]$ 时, $f(x)$ 是单调递增函数, 则 $f(x) \leq f(1\ 600) \leq 75$, 显然恒成立.

若函数 $f(x) \leq \frac{x}{5}$ 恒成立, 即 $\frac{x}{30}+10 \leq \frac{x}{5}$,

解得 $x \geq 60$.

$\therefore f(x) \leq \frac{x}{5}$ 不一定成立.

综上所述, 函数模型 $f(x)=\frac{x}{30}+10$ 满足基本要求

①②, 但是不满足③, 故函数模型 $f(x)=\frac{x}{30}+10$ 不符合要求.

(2) 当 $x \in [25, 1\ 600]$ 时, $g(x)=a\sqrt{x}-5$ ($a \geq 1$) 单调递增,

$\therefore$ 最大值 $g(1\ 600)=a\sqrt{1\ 600}-5=40a-5 \leq 75$.

$\therefore a \leq 2$.

设 $g(x)=a\sqrt{x}-5 \leq \frac{x}{5}$ 恒成立,

则 $a^2 x \leq \left(5 + \frac{x}{5}\right)^2$ 恒成立, 即 $a^2 \leq \frac{25}{x} + 2 + \frac{x}{25}$.

$\therefore \frac{25}{x} + \frac{x}{25} \geq 2$, 当且仅当 $x=25$ 时取等号,

$\therefore a^2 \leq 2+2=4$.

$\therefore a \geq 1, \therefore 1 \leq a \leq 2$.

故实数 a 的取值范围为 $[1, 2]$.

易错辨析

BD 解析: 由该车间连续 5 h 的生产总量 y (单位: kg) 与时间 x (单位: h) 的函数图象得, 前 3 h 内的产量逐步减少, 故 A 不正确, B 正确; 后 2 h 均没有生产, 故 C 不正确, D 正确. 故选 BD.

小测试(三十三) 函数的零点与方程的解

预习自评

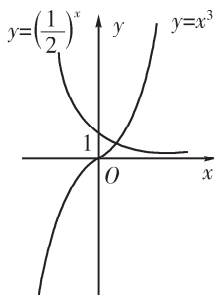
1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. D

基础过关

1. CD 解析: 有两个零点就是函数图象与 x 轴有两个交点, 故选 CD.

2. B 解析: 作出 $y=x^3$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象, 如图所示, 两个函数的图象只有一个交点, 所以函数 $f(x)$ 只有一个零点, 故选 B.



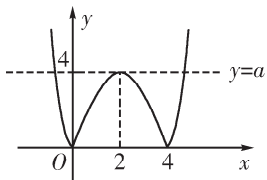
3. C 解析: 设 $f(x)=e^x-x-2$, 由题中表格的数据得, $f(-1)=-0.63 < 0$, $f(0)=-1 < 0$, $f(1)=-0.28 < 0$, $f(2)=3.39 > 0$, $f(3)=15.09 > 0$. 又 $f(x)$ 的图象是连续不断的, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 故选 C.

4. C 解析: 令 $f(x)=\log_3 x + x - 3$, 则 $f(2)=\log_3 2 + 2 - 3 = \log_3 \frac{2}{3} < 0$, $f(3)=\log_3 3 + 3 - 3 = 1 > 0$. 所以方程 $\log_3 x + x = 3$ 的根所在的区间为 $(2, 3)$. 故

选 C.

5. C 解析: $\because$ 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + a$ 在区间 $(1, e)$ 上为增函数, 且在区间 $(1, e)$ 上存在零点, $\therefore f(1) = \ln 1 - 1 + a < 0, f(e) = \ln e - \frac{1}{e} + a > 0. \therefore \frac{1}{e} - 1 < a < 1$. 故选 C.

6. 4 解析: 令函数 $f(x) = |x^2 - 4x| - a = 0$, 得 $|x^2 - 4x| = a$. 由于函数 $f(x) = |x^2 - 4x| - a$ 的零点个数 3, 故函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的图象和直线 $y = a$ 有 3 个交点, 如图所示. 故 $a = 4$.



7. $(-\frac{1}{2}, 0)$ 解析: $\because$ 函数 $f(x) = x^2 + (m-2)x + 1$ 的两个零点分别在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内,
 $\therefore \begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) > 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 1 > 0, \\ 1 + m - 2 + 1 < 0, \\ 4 + 2(m-2) + 1 > 0. \end{cases} \text{解得} -\frac{1}{2} < m < 0.$

8. (1) 解: 因为 1 为函数 $f(x)$ 的零点, 所以 $f(1) = 0$, 即 $c = 1$.

(2) 证明: 设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$,

由 (1) 知, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2-1}{x_2+1} - \frac{x_1-1}{x_1+1} = \frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)}.$$

因为 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$,

所以 $x_2 - x_1 > 0, x_2 + 1 > 0, x_1 + 1 > 0$.

所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$.

故函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是增函数.

$$(3) \text{ 解: 令 } g(x) = f(e^x) - \frac{1}{3} = \frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{1}{3} = 0.$$

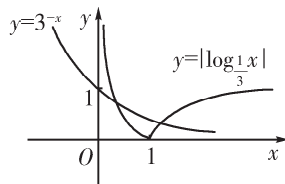
解得 $e^x = 2$, 即 $x = \ln 2$.

所以函数 $g(x)$ 的零点是 $\ln 2$.

素养提升

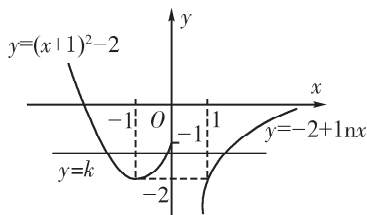
1. B 解析: 函数 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x_0) = 0$, 所以当 $0 < x_1 < x_0 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$, 故选 B.
2. B 解析: 由 $f(x) = 3^x \cdot |\log_{\frac{1}{3}} x| - 1 = 0$, 得

$|\log_{\frac{1}{3}} x| = 3^{-x}$. 分别作出函数 $y = |\log_{\frac{1}{3}} x|$ 与 $y = 3^{-x}$ 的图象, 如图所示.



由图可知, 两个函数图象的交点个数为 2, 即函数 $f(x) = 3^x |\log_{\frac{1}{3}} x| - 1$ 的零点个数为 2, 故选 B.

3. A 解析: 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = (x+1)^2 - 2$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -2 + \ln x$. 作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示.



令 $f(x) - k = 0$, 得 $f(x) = k$. 由图象知, $y = f(x) - k$ 有 3 个零点时 $f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有 3 个交点, 因此 $-2 < k \leq -1$. 故选 A.

4. 1 2 解析: $\because$ 函数 $f(x) = 3^x + x - 5$, $\therefore f(1) = 3^1 + 1 - 5 = -1 < 0, f(2) = 3^2 + 2 - 5 = 6 > 0$. $\therefore f(1)f(2) < 0$. $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 的零点 x_0 在区间 $(1, 2)$ 内. $\therefore a = 1, b = 2$.

5. 解: 由原方程, 得 $a = \frac{2-x^2}{2-x}, 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

令 $t = 2 - x$, 则 $t \in [\frac{1}{2}, 2]$.

所以 $a = \frac{2-(2-t)^2}{t} = 4 - (t + \frac{2}{t})$.

当 $t = \sqrt{2}$ 时, a 取最大值, 且 $a_{\max} = 4 - 2\sqrt{2}$;

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, a 取最小值, 且 $a_{\min} = -\frac{1}{2}$.

所以实数 a 的取值范围为 $[-\frac{1}{2}, 4 - 2\sqrt{2}]$.

6. 解: (1) $\because f(-x) = f(x)$, $\therefore |x^2 - 4| + x^2 - ax = |x^2 - 4| + x^2 + ax$.

即 $2ax = 0$ 对任意实数 x 都成立. $\therefore a = 0$.

(2) 当 $a = 4$ 时, $f(x) = |x^2 - 4| + x^2 + 4x$.

当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) = 4 + 4x$.

令 $4 + 4x = 0$, 解得 $x = -1$.

当 $x > 2$ 或 $x < -2$ 时, $f(x) = 2x^2 + 4x - 4$.

令 $2x^2 + 4x - 4 = 0$, 解得 $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

$\therefore x = -1 - \sqrt{3}$.

综上所述, 函数 $f(x)$ 的零点为 -1 和 $-1 - \sqrt{3}$.

(3) 当 $|x| \leq 2$ 时, $f(x) = -x^2 + 4 + x^2 + ax = ax + 4$,
方程 $ax + 4 = 0$ 在 $(0, 4)$ 上最多有一个实数根;
当 $|x| > 2$ 时, $f(x) = x^2 - 4 + x^2 + ax = 2x^2 + ax - 4$.
令方程 $2x^2 + ax - 4 = 0$.

若 x_1, x_2 均为该方程的两个实数根,

则 $x_1 \cdot x_2 = -2$, 不符合题意.

所以 $x_1 \in (0, 2], x_2 \in (2, 4)$.

由 $ax_1 + 4 = 0$, 得 $a = -\frac{4}{x_1}$. $\therefore a \leq -2$.

由 $2x_2^2 + ax_2 - 4 = 0$, 得 $a = \frac{4}{x_2} - 2x_2$.

$\therefore -7 < a < -2$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $-7 < a < -2$.

易错辨析

1.1 解析: 由 $\begin{cases} x > 0, \\ x - 3 \neq 0, \end{cases}$ 得 $0 < x < 3$ 或 $x > 3$. $\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0, 3) \cup (3, +\infty)$. 令 $f(x) = 0$, 即 $\frac{(x+1)\ln x}{x-3} = 0$, $\therefore x+1=0$ 或 $\ln x=0$. 解得 $x=-1$ (舍去) 或 $x=1$. $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{(x+1)\ln x}{x-3}$ 的零点是 1.

2.D 解析: 因为函数 $f(x)$ 的图象不一定是连续不断的一条曲线, 所以方程 $f(x)=0$ 可能无根.

小测试(三十四) 用二分法求方程的近似解

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. ACD

基础过关

1. ACD 解析: $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, $f(1) = 0$; 当 $x < 1$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 在零点两侧附近函数值同号, 不能用二分法求零点, 其余选项中在函数的零点两侧附近函数值异号. 故选 ACD.

2. D 解析: $\because$ 第一次所取的区间是 $[-2, 4]$, $\therefore$ 第二次所取的区间可能为 $[-2, 1], [1, 4]$. $\therefore$ 第三次所取的区间可能为 $[-2, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 1], [1, \frac{5}{2}], [\frac{5}{2}, 4]$. 故选 D.

3. B 解析: 由 $f(1.25) < 0, f(1.5) > 0$, 得 $f(1.25) \cdot f(1.5) < 0$, 又函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的, 根据零点存在定理可知, 函数 $f(x)$ 的一个零点 $x_0 \in (1.25, 1.5)$, 即方程 $x^3 + 3x - 7 = 0$ 的根所在的区

间是 $(1.25, 1.5)$. 故选 B.

4. C 解析: 设需计算 n 次, 则 n 满足 $\frac{1}{2^n} < 0.1$, 即 $2^n > 10$, 故计算 4 次就可满足要求, 故选 C.

5. A 解析: 由 $f(2) = -1.307 < 0, f(3) = 1.099 > 0$, 得方程的近似解在 $(2, 3)$ 内, 精确度为 1. 由 $f(2.5) = -0.084 < 0$, 得方程的近似解在 $(2.5, 3)$ 内, 精确度为 0.5. 由 $f(2.75) = 0.512 > 0$, 得方程的近似解在 $(2.5, 2.75)$ 内, 精确度为 0.25. 由 $f(2.625) = 0.215 > 0$, 得方程的近似解在 $(2.5, 2.625)$ 内, 精确度为 0.125. 由 $f(2.5625) = 0.066 > 0$, 得方程的近似解在 $(2.5, 2.5625)$ 内, 精确度为 $0.0625 < 0.1$. 因此可取区间 $[2.5, 2.5625]$ 内的任意值作为方程的近似解, 故选 A.

6. $(\frac{3}{2}, 2)$ 解析: 设 $f(x) = x^3 - 2x - 1$, 则 $f(1) = 1 - 2 - 1 = -2 < 0, f(2) = 8 - 4 - 1 = 3 > 0$. 取区间 $(1, 2)$ 的中点 $\frac{3}{2}$, 则 $f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^3 - 2 \times \frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{8} < 0$. 故下一步可以判断该根所在区间为 $(\frac{3}{2}, 2)$.

7. 1.5, 1.75, 1.875, 1.8125 解析: 第一次用二分法计算得区间 $(1.5, 2)$, 第二次得区间 $(1.75, 2)$, 第三次得区间 $(1.75, 1.875)$, 第四次得区间 $(1.75, 1.8125)$. 故他又取的 x 的 4 个值依次是 1.5, 1.75, 1.875, 1.8125.

8. (1) 证明: 因为 $f(0) = 1 > 0$,

$$f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - 2^2 + 1 = -\frac{1}{3} < 0,$$

所以 $f(0) \cdot f(2) < 0$.

由函数零点存在定理, 得方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 2)$ 内有实数解.

(2) 解: 取 $x_1 = \frac{1}{2} \times (0 + 2) = 1$,

$$\text{得 } f(1) = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} > 0.$$

所以 $f(1) \cdot f(2) < 0$. 下一个有解区间为 $(1, 2)$.

再取 $x_2 = \frac{1}{2} \times (1 + 2) = \frac{3}{2}$,

$$\text{得 } f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{3} \times (\frac{3}{2})^3 - (\frac{3}{2})^2 + 1 = -\frac{1}{8} < 0.$$

所以 $f(1) \cdot f(\frac{3}{2}) < 0$, 下一个有解区间为 $(1, \frac{3}{2})$.

再取 $x_3 = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$,

得 $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{4}\right)^3 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{192} > 0$.

所以 $f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, 下一个有解区间为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

综上所述, 所求的实数解 x_0 在区间 $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$ 内.

素养提升

1. C 解析: 由二分法知, 函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ 的一个正零点在区间 $(1.375, 1.5)$ 内. 因为 $|1.5 - 1.375| = 0.125 > 0.1$, 所以没有达到精确度的要求, 应该取 $\frac{1.375 + 1.5}{2} = 1.4375$, 计算 $f(1.4375)$ 的值. 故选 C.

2. B 解析: 由二分法的过程可知, 函数零点左右的函数值异号时才可以用二分法求解. 函数①无零点, 函数②③④都有变号零点, 函数⑤有不变号零点 -4 , 故不能用二分法求零点近似值. 故选 B.

3. BD 解析: 由二分法的步骤可知: ①零点在区间 $(0, 4)$ 内, 则有 $f(0) \cdot f(4) < 0$, 不妨设 $f(0) > 0$, $f(4) < 0$, 取中点 2; ②零点在区间 $(0, 2)$ 内, 则有 $f(0) \cdot f(2) < 0$, 则 $f(0) > 0$, $f(2) < 0$, 取中点 1; ③零点在区间 $(1, 2)$ 内, 则有 $f(1) \cdot f(2) < 0$, 则 $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, 取中点 $\frac{3}{2}$; ④零点在区间 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 内, 则有 $f(1) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, 则 $f(1) > 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, 取中点 $\frac{5}{4}$; ⑤零点在区间 $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$ 内, 则有 $f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, 则 $f\left(\frac{5}{4}\right) > 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$. 所以与 $f(0)$ 符号不同的是 $f(4), f(2), f\left(\frac{3}{2}\right)$.

4. -1 或 -0.8 解析: 令 $f(x) = 2^x - x^2$, 由表中的数据, 得 $f(-1) < 0$, $f(-0.6) > 0$, $f(-0.8) < 0$, $f(-0.4) > 0$. $\therefore$ 方程 $2^x = x^2$ 的根在区间 $(-1, -0.6)$ 与 $(-0.8, -0.4)$ 内, $\therefore a = -1$ 或 $a = -0.8$.

5. 解: 令 $f(x) = 2^x + x - 4$,
则 $f(1) = 2 + 1 - 4 = -1 < 0$,
 $f(2) = 2^2 + 2 - 4 = 2 > 0$.

区间	精确度	区间中点 x_n	$f(x_n)$ 的值及符号
$(1, 2)$	$ 2 - 1 = 1$	$x_1 = 1.5$	$f(x_1) = 0.33 > 0$
$(1, 1.5)$	$ 1.5 - 1 = 0.5$	$x_2 = 1.25$	$f(x_2) = -0.37 < 0$
$(1.25, 1.5)$	$ 1.5 - 1.25 = 0.25$	$x_3 = 1.375$	$f(x_3) = -0.035 < 0$
$(1.375, 1.5)$	$ 1.5 - 1.375 = 0.125$		

$\therefore |1.375 - 1.5| = 0.125 < 0.2$,

$\therefore 2^x + x = 4$ 在 $[1, 2]$ 内的近似解可取为 1.375.

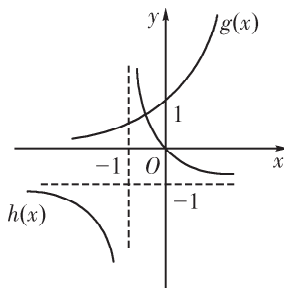
6. 解: 原方程可化为 $3^x - \frac{1}{x+1} + 1 = 0$,

即 $3^x = \frac{1}{x+1} - 1$.

令 $g(x) = 3^x$, $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$.

在同一平面直角坐标系中, 分别画出函数 $g(x) = 3^x$

与 $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ 的大致图象, 如图所示.



由图可知, 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象的交点的横坐标位于区间 $(-1, 0)$ 内且只有一个交点.

所以原方程只有一个解 $x = x_0$.

令 $f(x) = 3^x + \frac{x}{x+1} = 3^x - \frac{1}{x+1} + 1$.

因为 $f(0) = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$,

$f(-0.5) = \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0$,

$\therefore x_0 \in (-0.5, 0)$.

用二分法逐步计算列表如下:

中点值	中点(端点)函数值及符号	选取区间
	$f(-0.5) < 0, f(0) > 0$	$(-0.5, 0)$
-0.25	$f(-0.25) \approx 0.4265 > 0$	$(-0.5, -0.25)$
-0.375	$f(-0.375) \approx 0.0623 > 0$	$(-0.5, -0.375)$
-0.4375	$f(-0.4375) \approx -0.1594 < 0$	$(-0.4375, -0.375)$

$\therefore |-0.4375 - (-0.375)| = 0.0625 < 0.1$,

$\therefore$ 原方程的近似解可取为 -0.4375 .

易错辨析

D 解析:题中图象与 x 轴有 4 个交点,所以零点的个数为 4. 零点左、右函数值异号的有 3 个,所以可以用二分法求解的近似根的个数为 3,故选 D.

小测试(三十五) 函数模型的应用(一)

预习自评

(1)× (2)✓ (3)✓

基础过关

1. B 解析:设函数解析式为 $y=kx+b(k \neq 0)$. 由题图知,函数图象过点 $(1, 800)$, $(2, 1300)$, 则 $\begin{cases} k+b=800, \\ 2k+b=1300. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=500, \\ b=300. \end{cases}$ 所以 $y=500x+300$. 当 $x=0$ 时, $y=300$. 所以营销人员没有销售量时的周收入是 300 元.

2. C 解析:当 $x=1$ 时,由 $3000 = a \log_3(1+2)$, 得 $a=3000$. 所以到 2022 年冬,即第 7 年, $y=3000 \times \log_3(7+2)=6000$. 故选 C.

3. C 解析:设从 2019 年后的第 n 年的荒漠化土地面积为 y , 则 $y=7 \times (1-10\%)^n$. 故 2025 年的荒漠化土地面积为 7×0.9^6 . 故选 C.

4. C 解析:根据题意知,每年投入的研发资金增长的百分率相同. 所以从 2016 年起,每年投入的研发资金为 $(130 \times 1.12^{n-1})$ 万元. 令 $130 \times 1.12^{n-1} > 200$, 两边取常用对数, 得 $n-1 > \frac{\lg 2 - \lg 1.3}{\lg 1.12}$. 又 $\frac{\lg 2 - \lg 1.3}{\lg 1.12} \approx \frac{0.30 - 0.11}{0.05} = 3.8$, 则 $n > 4.8$. 所以从 2020 年开始投入的研发资金超过 200 万元, 故选 C.

5. 90 解析:由题意,初始温度 $T_0=90^\circ\text{C}$, 室温 $T_a=10^\circ\text{C}$, 代入公式, 得 $T=10+(90-10) \cdot 2^{-kt}=10+$

$80 \cdot 2^{-kt}$. $\therefore$ 当 $T=50^\circ\text{C}$ 时, $t=30 \text{ min}$. $\therefore 10+80 \cdot 2^{-k \cdot 30}=50$, 即 $2^{-k \cdot 30}=2^{-1}$, $\therefore -k \cdot 30=-1$, 解得 $k=\frac{1}{30}$. $\therefore T=10+80 \cdot 2^{-\frac{1}{30}t}$. $\therefore$ 当 $T=20^\circ\text{C}$ 时, $10+80 \cdot 2^{-\frac{1}{30}t}=20$, 即 $2^{-\frac{1}{30}t}=2^{-3}$. $\therefore -\frac{1}{30}t=-3$, 解得 $t=90$.

6. 解:(1)1 年后该城市人口总数为

$$y=100+100 \times 1.2\%=100 \times (1+1.2\%);$$

$$2 \text{ 年后该城市人口总数为 } y=100 \times (1+1.2\%) + 100 \times (1+1.2\%) \times 1.2\% = 100 \times (1+1.2\%)^2;$$

$$3 \text{ 年后该城市人口总数为 } y=100 \times (1+1.2\%)^3;$$

...

$$x \text{ 年后该城市人口总数为 } y=100 \times (1+1.2\%)^x, x \in \mathbf{N}^*.$$

(2)10 年后该城市人口总数为

$$y=100 \times (1+1.2\%)^{10} = 100 \times 1.012^{10} \approx 112.7 \text{ (万)}.$$

$$(3) \text{ 令 } y=120, \text{ 则有 } 100 \times (1+1.2\%)^x = 120.$$

$$\text{解得 } 15 < x < 16.$$

故大约 16 年后该城市人口总数将达到 120 万.

素养提升

1. A 解析:设这种商品的原价为 a , 则两次提价后的价格为 $a(1+10\%)^2=1.1^2a$. 又进行两次降价后的价格为 $1.1^2a(1-10\%)^2=(1+0.1)^2(1-0.1)^2a=0.9801a < a$. 因此最终售价与原来的价格相比略有降低, 故选 A.

2. B 解析:设喷气式飞机起飞时声音的强度和一般说话时声音的强度分别为 x_1, x_2 . 由题意, 得

$$f(x_1)=10 \times \lg \frac{x_1}{1 \times 10^{-12}}=140. \text{ 解得 } x_1=10^2.$$

$$f(x_2)=10 \times \lg \frac{x_2}{1 \times 10^{-12}}=60. \text{ 解得 } x_2=10^{-6}. \text{ 所以}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=10^8. \text{ 因此喷气式飞机起飞时声音的强度约为}$$

一般说话时声音的强度的 10^8 倍. 故选 B.

3. 10 解析:因为 5 min 时, A 桶和 B 桶中的水量相等. 所以 $a \cdot e^{-5n} = a - a \cdot e^{-5n}$, 所以 $e^{-5n} = \frac{1}{2}$. 令 $a \cdot e^{-nt} = \frac{a}{8}$, 则 $e^{-nt} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = e^{-15n}$, 故有 $t=15$. 因为 $15-5=10$ (min), 所以再过 10 min, A 桶中的水只有 $\frac{a}{8}$ L.

4. 解:(1)根据题意, 得 $\frac{4}{5}p_0 = p_0 e^{-k}$.

$$\therefore e^{-k} = \frac{4}{5}, \therefore p(t) = p_0 \left(\frac{4}{5} \right)^t.$$

$$(2) \text{ 令 } p(t) = p_0 \left(\frac{4}{5} \right)^t \leq \frac{1}{1000} p_0, \text{ 得 } \left(\frac{4}{5} \right)^t \leq 10^{-3}.$$

两边取常用对数, 得 $t(1-3\lg 2) \geq 3$.

$$\therefore t \geq 30.$$

因此, 至少需要过滤 30 个小时.

5. 解: (1) 由题图可知, 血液中麻醉剂的含量 y (单位: mg) 是关于时间 t (单位: h) 的一个分段函数.

当 $0 \leq t \leq 0.1$ 时, 函数的图象是一条经过 $O(0, 0)$ 的线段, 设其方程为 $y = kt$ (k 为待定系数).

又因为 $A(0.1, 1)$ 是这条线段的一个端点, 代入点 A 的坐标, 得 $k = 10$.

所以当 $0 \leq t \leq 0.1$ 时, $y = 10t$.

当 $t > 0.1$ 时, 函数解析式为

$$y = \left(\frac{1}{8} \right)^{t-a},$$

因为 $A(0.1, 1)$ 在这段函数图象上, 代入点 A 的坐标, 得 $1 = \left(\frac{1}{8} \right)^{0.1-a}$.

所以有 $0.1 - a = 0$, 解得 $a = 0.1$.

$$\text{故当 } t > 0.1 \text{ 时, } y = \left(\frac{1}{8} \right)^{t-0.1}.$$

综上所述, 血液中麻醉剂的含量 y (单位: mg) 与时间 t (单位: h) 之间的解析式为 $y = \begin{cases} 10t, & 0 \leq t \leq 0.1, \\ \left(\frac{1}{8} \right)^{t-0.1}, & t > 0.1. \end{cases}$

(2) 要使手术后的病人能清醒过来, 需要麻醉剂含量降低到 0.125 mg 以下,

$$\text{此时 } t > 0.1, \text{ 且 } y \leq 0.125 = \frac{1}{8}.$$

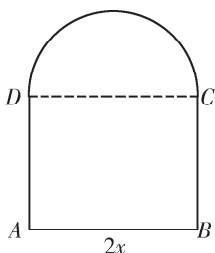
$$\text{当 } t > 0.1 \text{ 时, 令 } \left(\frac{1}{8} \right)^{t-0.1} \leq \frac{1}{8}, \text{ 得 } t - 0.1 \geq 1,$$

解得 $t \geq 1.1$.

所以至少需要经过 1.1 h 后病人才能清醒.

易错辨析

$y = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 + x, x \in \left(0, \frac{1}{\pi+2}\right)$ **解析:** 如图所示, 给框架标上字母.



$$\because AB = 2x, \therefore \widehat{CD} = \pi x, AD = \frac{1-2x-\pi x}{2}.$$

$$\therefore y = 2x \cdot \frac{1-2x-\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 + x.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x > 0, \\ \frac{1-2x-\pi x}{2} > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < x < \frac{1}{\pi+2}. \therefore \text{此框架围}$$

成的面积 y 与 x 的函数关系为 $y = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 + x, x \in \left(0, \frac{1}{\pi+2}\right)$.

小测试(三十六) 函数模型的应用(二)

预习自评

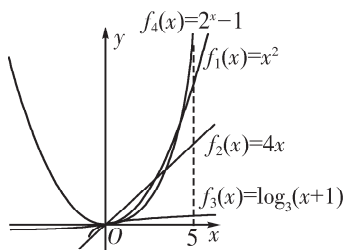
B

基础过关

1. D 解析: 设该林区的森林原有蓄积量为 a . 由题意知 $ax = a(1 + 0.104)^x$, 即 $y = \log_{1.104} x (x \geq 1)$. 所以函数 $y = f(x)$ 的图象大致为 D 中图象.

2. B 解析: 由题中表格可知, 函数在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 且 y 随 x 的增大而增大得越来越快, 分析选项可知 B 符合, 故选 B.

3. D 解析: (方法一) 分别作出四个函数的图象, 如图所示, 利用数形结合, 知 5 h 后丁车在最前面.



(方法二) 由于 4 个函数在 $(0, +\infty)$ 上均为增函数, 且 $f_1(5) = 5^2 = 25, f_2(5) = 20, f_3(5) = \log_3(5+1) = 1 + \log_3 2, f_4(5) = 2^5 - 1 = 31, f_4(5)$ 最大, 所以 5 h 后丁车在最前面, 故选 D.

4. C 解析: 由题意知, 拟定的函数应满足: ①是单调递增函数, 且增长速度先快后慢再快; ②在 $x = 50$ 左右增长速度较慢, 最小值为 500. A 中, 函数 $y = (x-50)^2 + 500$ 在 $[0, 100]$ 内先减后增, 不符合要求; B 中, 函数 $y = 10^{\frac{x}{50}} + 500$ 是指数型函数, 增长速度越来越快, 不符合要求; D 中, 函数 $y = 50[10 + \lg(2x+1)]$ 是对数型函数, 增长速度越来越慢, 不符合要求; 在 C 中, 函数 $y = \frac{1}{1000}(x-50)^3 + 625$ 的图象是由函数 $y = x^3$ 的图象经过平移和伸缩变换得到的, 形状符合要求, 且最小值为 500, 故选 C.

5. ① 解析: 若模型为 ②, 则 $f(1) = 2 + a = 4$, 解得

$a=2$. 于是 $f(x)=2^x+2$, 此时 $f(2)=6, f(3)=10, f(4)=18$, 与表格中的数据相差太大, 不符合. 若模型为③, 则 $f(1)=1+b=4$, 解得 $b=3$. 于是 $f(x)=x^2+3$, 此时 $f(2)=7, f(3)=12, f(4)=19$, 与表格中的数据相差太大, 不符合. 若模型为①, 则根据表

中数据得 $\begin{cases} f(1)=4, \\ f(3)=7, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a+b=4, \\ 3a+b=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{3}{2}, \\ b=\frac{5}{2}. \end{cases}$ 于

是 $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$. 经检验是最适合的函数模型.

6. 解: 若用函数 $y=ax+b(a \neq 0)$ 模拟, 把 $(1, 50), (2, 52)$ 代入, 则有 $\begin{cases} a+b=50, \\ 2a+b=52. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=48. \end{cases}$

所以 $y=2x+48$.

当 $x=3$ 时, $y=54$.

若用函数 $y=a^x+b$ 模拟, 把 $(1, 50), (2, 52)$ 代入,

则有 $\begin{cases} a+b=50, \\ a^2+b=52, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=48. \end{cases}$

所以 $y=2^x+48$.

当 $x=3$ 时, $y=56$.

由题知, 3 月份的产量为 53.9 千件.

因此用函数 $y=2x+48$ 模拟的估计误差较小, 故用函数 $y=ax+b$ 模拟比较好.

素养提升

1. D 解析: 根据题中图象可知在第一段时间内是吴老师离家的距离随着时间的增加而增加, 第二段时间内吴老师离家的距离随着时间的增加不变, 第三段时间内吴老师离家的距离随着时间的增加而减少, 最后回到家的位置, 对比各选项可知, 只有选项 D 正确, 故选 D.
2. C 解析: 若第一次购物标价总额超过 200, 则付款应该大于 $200 \times 0.9 = 180$ (元), 故第一次购物标价总额不超过 200 元. 若第二次购物标价总额超过 500, 则付款应该大于 $500 \times 0.9 = 450$ (元), 故第二次购物标价总额不超过 500 元. 第二次购物的标价总额为 $423 \div 0.9 = 470$ (元). 两次购物的标价总额合计 $470 + 180 = 650$ (元). 若一次性购买, 则应付款为 $500 \times 0.9 + (650 - 500) \times 0.8 = 450 + 120 = 570$ (元), 故选 C.
3. 31.5 解析: 设年销售收入为 z 万元, 年利润为 W 万元. 由题意得, 甲产品的生产成本为 $30y+4$, 销售单价为 $\frac{30y+4}{y} \times 150\% + \frac{x}{y} \times 50\%$. 故年销售收入 $z = \left(\frac{30y+4}{y} \times 150\% + \frac{x}{y} \times 50\% \right) \cdot y = 45y + 6 +$

$\frac{1}{2}x$. 所以年利润 $W = z - (30y+4) - x = 15y + 2 -$

$\frac{x}{2} = 17 + \frac{45x}{x+2} - \frac{x}{2}$. 所以当广告费为 1 万元, 即

$x=1$ 时, 该企业甲产品的年利润为 $17 + \frac{45}{1+2} -$

$\frac{1}{2} = 31.5$ (万元).

4. 解: (1) 当 $0 < x < 80$ 时, $y = 100x - \left(\frac{1}{2}x^2 + 40x \right) - 500 = -\frac{1}{2}x^2 + 60x - 500$.

当 $x \geq 80$ 时, $y = 100x - \left(101x + \frac{8 \cdot 100}{x} - 2 \cdot 180 \right) - 500 = 1 \cdot 680 - \left(x + \frac{8 \cdot 100}{x} \right)$.

$y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 60x - 500, & 0 < x < 80, \\ 1 \cdot 680 - \left(x + \frac{8 \cdot 100}{x} \right), & x \geq 80. \end{cases}$

(2) 当 $0 < x < 80$ 时, $y = -\frac{1}{2}(x-60)^2 + 1 \cdot 300$.

当 $x=60$ 时, y 取得最大值, 最大值为 1 300.

当 $x \geq 80$ 时, $y = 1 \cdot 680 - \left(x + \frac{8 \cdot 100}{x} \right) \leq 1 \cdot 680 -$

$2\sqrt{x \cdot \frac{8 \cdot 100}{x}} = 1 \cdot 500$, 当且仅当 $x = \frac{8 \cdot 100}{x}$, 即 $x = 90$ 时, y 取得最大值, 最大值为 1 500.

所以当年产量为 90 台时, 该企业所获利润最大, 最大利润为 1 500 万元.

5. 解: (1) $\because$ 随着时间 x 的增加, y 的值先减后增, 而所给的三个函数中 $y=ax+b$ 和 $y=\frac{a}{x}+b$ 显然都是单调函数, 不满足题意,

$\therefore$ 选择 $y=ax^2+bx+c$.

(2) 把点 $(4, 90), (10, 51), (36, 90)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 中, 得

$$\begin{cases} 16a+4b+c=90, \\ 100a+10b+c=51, \\ 1 \ 296a+36b+c=90. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=-10, \\ c=126. \end{cases}$$

$\therefore y = \frac{1}{4}x^2 - 10x + 126 = \frac{1}{4}(x-20)^2 + 26$.

$\therefore$ 当 $x=20$ 时, y 有最小值, 且 $y_{\min}=26$.

故当纪念章上市 20 天时, 该纪念章每枚的市场价最低, 最低市场价为 26 元.

易错辨析

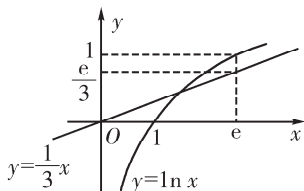
- 8 解析: 由题意, $61 = 89 \cdot e^{2r}$, $\therefore e^r = \sqrt{\frac{61}{89}}$. 令 $89 \cdot e^{xr} < 20$, 得 $x \geq 8$. 故答案为 8.

滚动卷(四) 小测试(二十四)至(三十六)

综合拔高

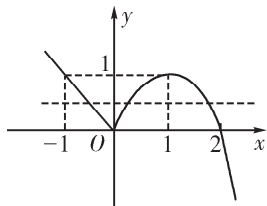
1. D 解析: 设函数 $f(x) = \log_3 x - (5-x)$. 因为 $f(3) = 1-2 = -1 < 0$, $f(4) = \log_3 4 - 1 > 0$, 所以 $f(3) \cdot f(4) < 0$. 由零点存在定理可知, 函数 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上至少存在一个零点. 故利用二分法求方程 $\log_3 x = 5-x$ 的近似解可取区间 $(3, 4)$. 故选 D.

2. D 解析: 令 $f(x) = 0$, 得 $\frac{1}{3}x = \ln x$. 在同一平面直角坐标系内作出函数 $y = \frac{1}{3}x$ 和 $y = \ln x$ 的图象, 如图所示.



由图可知两函数图象在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 内无交点, 在 $(1, e)$ 内有交点, 所以 $y = f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 内无零点, 在 $(1, e)$ 内有零点. 故选 D.

3. D 解析: 由 $f(x)[f(x) - b] = 0$, 得 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = b$, 作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示.



由图象知, $f(x) = 0$ 有 2 个根, $f(x) = b (0 < b < 1)$ 有 3 个根, 因此方程共有 5 个根. 故选 D.

4. D 解析: 设每年减少的比例为 x , 因此 1 g 这种放射性元素, 经过 100 年后剩余 $1 \times (1-x)^{100}$ g. 依题意, 得 $(1-x)^{100} = 0.5$, 所以 $x = 1 - \sqrt[100]{0.5}$. 3 年后剩余为 $(1-x)^3$, 将 x 的值代入, 得结果为 $\sqrt[100]{0.125}$. 故选 D.

5. D 解析: 由 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$, 得

$$4a = \begin{cases} 8\sqrt{x} + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{4}{x} + x, & x > 1, \end{cases}$$

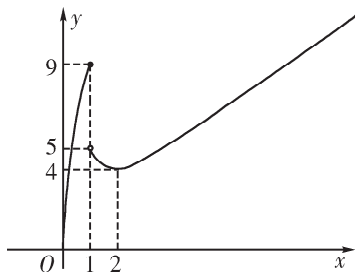
$$\text{即 } 4a = \begin{cases} (\sqrt{x} + 4)^2 - 16, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{4}{x} + x, & x > 1. \end{cases}$$

方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a (a \in \mathbf{R})$ 实数解的个数即为直

线 $y = 4a$ 与函数 $y = \begin{cases} (\sqrt{x} + 4)^2 - 16, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{4}{x} + x, & x > 1 \end{cases}$ 的

图象公共点的个数. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = (\sqrt{x} + 4)^2 - 16$ 单调递增, 此时 $y \in [0, 9]$; 当 $x > 1$ 时, $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $(1, 2]$ 上单调递减, 此时 $y \in [4, 5]$, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $y \in (4, +\infty)$, 故当 $x > 1$ 时, $y = x + \frac{4}{x} \in [4, +\infty)$. 作出函数 $y =$

$\begin{cases} (\sqrt{x} + 4)^2 - 16, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{4}{x} + x, & x > 1 \end{cases}$ 的图象如图所示.

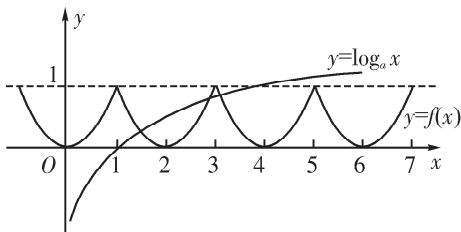


由图可知, 当直线 $y = 4a$ 与分段函数图象有两个不同的公共点时, $5 \leq 4a \leq 9$ 或 $4a = 4$, 即 $\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{9}{4}$ 或 $a = 1$. 故选 D.

6. (2, 5) 解析: $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(1)f(2) < 0$, 即 $(2-m)(5-m) < 0$. 解得 $2 < m < 5$.

7. 4.58 解析: 由题意, 得 $40 = 10 + (100 - 10) \cdot e^{-0.24t}$, 化简得 $e^{-0.24t} = \frac{1}{3}$. $\therefore -0.24t = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$. $\therefore 0.24t = \ln 3 \approx 1.099$. $t \approx 4.58$.

8. (3, 5) 解析: $\because f(x) - f(-x) = 0$, $\therefore f(x) = f(-x)$. $\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数. 又 $\because f(x)$ 的周期为 2, 且当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = x^2$, $\therefore$ 作出 $f(x)$ 的部分图象如图所示.



$\because g(x) = f(x) - \log_a x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恰有三个零点, $\therefore y = f(x)$ 和 $y = \log_a x$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上

恰有三个交点. $\therefore \begin{cases} \log_a 3 < 1, \\ \log_a 5 > 1, \text{解得 } 3 < a < 5, \text{即 } a \in \\ a > 1. \end{cases}$

(3, 5).

9. 解: (1) 由题意, 得 $y = \begin{cases} 0.16x, 0 < x \leq 10, \\ 1.6 + 2\log_5(x-9), x > 10. \end{cases}$

(2) 当 $x \in (0, 10]$ 时, $0.16x \leq 1.6$.

由 $y = 5.6$ 可知, $x > 10$.

令 $1.6 + 2\log_5(x-9) = 5.6$, 解得 $x = 34$.

$\therefore$ 老张的销售利润是 34 万元.

10. 解: (1) 当 $m = -4$ 时, $f(x) = 0$,

即 $f(x) = 2x^2 - 8x - 1 = 0$.

可以求出 $f(-1) = 9$, $f(1) = -7$.

则 $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数,

$\therefore f(x) = 0$ 在 $(-1, 1)$ 上必有根存在, 设为 x_0 .

取中点 0, 计算得 $f(0) = -1 < 0$.

则 $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

$\therefore x_0 \in (-1, 0)$.

取其中点 $-\frac{1}{2}$, 计算得 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2} > 0$.

$\therefore x_0 \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

取其中点 $-\frac{1}{4}$, 计算得 $f(-\frac{1}{4}) = \frac{9}{8} > 0$.

$\therefore x_0 \in (-\frac{1}{4}, 0)$.

取其中点 $-\frac{1}{8}$, 计算得 $f(-\frac{1}{8}) = \frac{1}{32} > 0$.

$\therefore x_0 \in (-\frac{1}{8}, 0)$, 区间长度 $\frac{1}{8} < \frac{1}{5} = 0.2$, 符合题意.

故符合要求的根 x_0 存在的区间为 $(-\frac{1}{8}, 0)$.

(2) $f(x) = 2x^2 - 8x + m + 3$ 为开口向上的抛物线,

对称轴方程为 $x = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$.

$\therefore$ 在区间 $[-1, 1]$ 上, 函数 $f(x)$ 单调递减.

又函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上存在零点,

$\therefore \begin{cases} f(-1) \geq 0, \\ f(1) \leq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2 + 8 + m + 3 \geq 0, \\ 2 - 8 + m + 3 \leq 0. \end{cases}$ 解得 $-13 \leq m \leq 3$.

故所求实数 m 的取值范围是 $[-13, 3]$.

素养提升

1. D 解析: 设快递行业产生的包装垃圾为 y 万吨, n

表示从 2015 年开始增加的年份数. 由题意, 得 $y =$

$5 \times (1 + 50\%)^n = 5 \times (\frac{3}{2})^n$. 令 $5 \times (\frac{3}{2})^n > 50$, 得

$(\frac{3}{2})^n > 10$. 两边取对数可得 $n(\lg 3 - \lg 2) > 1$.

$\therefore n(0.4771 - 0.3010) > 1$, 即 $0.1761n > 1$, 解得

$n > 5.679$. $\therefore$ 从 $2015 + 6 = 2021$ 年开始, 该地快递行业产生的包装垃圾将超过 50 万吨. 故选 D.

2. C 解析: 已知三个函数 $f(x) = 2^x + x - 2$, $g(x) =$

$x^3 - 8$, $h(x) = \log_2 x + x - 2$ 的零点依次为 a, b, c , 令

$f(x) = 2^x + x - 2 = 0$, $h(x) = \log_2 x + x - 2 = 0$, 则

$2^x = 2 - x$, $\log_2 x = 2 - x$, 即 a, c 分别为直线 $y = 2 - x$

与函数 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ 图象交点的横坐标. 因为

$y = 2^x$, $y = \log_2 x$ 互为反函数, 其图象关于直线 $y = x$

对称, 而直线 $y = 2 - x$ 与 $y = x$ 垂直, 交点坐标为

$(1, 1)$, 所以 $a + c = 2$. 又由 $b^3 - 8 = 0$, 得 $b = 2$. 所以

$a + b + c = 4$, 故选 C.

3. CD 解析: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

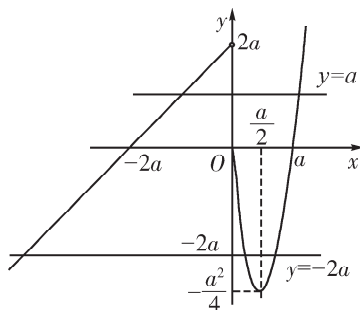
$f(x) = 0$ 有唯一实数解 $x = 0$, $f[f(x)] = 0$ 不可能

有 8 个不同实数解. 当 $a > 0$ 时, 令 $f(x) = t$, 则

$f[f(x)] = f(t) = 0$. 解得 $t_1 = -2a$, $t_2 = 0$, $t_3 = a$. 又

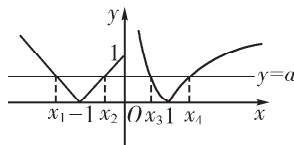
$f[f(x)] = 0$ 有 8 个不同的实数根, 作出 $f(x)$ 的大致

图象如图所示.



结合图象得 $\begin{cases} a > 0, \\ a < 2a, \\ -2a > -\frac{a^2}{4}. \end{cases}$ 解得 $a > 8$. 故选 CD.

4. $(-1, \frac{7}{3}]$ 解析: 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



依题意, 得 $x_1 + x_2 = -2$, $\log_3 x_3 + \log_3 x_4 = 0$, 即

$x_3 \cdot x_4 = 1$. 因此 $x_3(x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 x_4} = -2x_3 + \frac{1}{x_3}$.

且 $\frac{1}{3} \leq x_3 < 1$. 设 $g(x) = -2x + \frac{1}{x}$, 则 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减. 所以 $-1 < g(x) \leq \frac{7}{3}$. 故 $x_3(x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3 x_4}$ 的取值范围是 $(-1, \frac{7}{3}]$.

5. 解: (1) 因为 $f(x) < 4$,

所以 $\log_2(x+2) < 4$, 即 $0 < x+2 < 16$.

解得 $-2 < x < 14$.

故不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 $(-2, 14)$.

(2) $h(x)$ 在 $[2, 6]$ 上有零点等价于 $h(x) = 0$ 在 $[2, 6]$ 上有解, 即 $\log_2(x+2) + x^2 + 2x = a$ 在 $[2, 6]$ 上有解.

设 $F(x) = \log_2(x+2) + x^2 + 2x (2 \leq x \leq 6)$.

因为 $y = \log_2(x+2)$ 与 $y = x^2 + 2x$ 在 $[2, 6]$ 上均为增函数,

所以 $F(x)$ 在 $[2, 6]$ 上为增函数.

则 $F(x)_{\min} = F(2) = \log_2(2+2) + 2^2 + 2 \times 2 = 10$,

$F(x)_{\max} = F(6) = \log_2(6+2) + 6^2 + 2 \times 6 = 51$.

所以 $10 \leq F(x) \leq 51$.

故实数 a 的取值范围为 $[10, 51]$.

6. 解: (1) 由题意, 得 $P_0 e^{-5k} = (1 - 20\%) P_0$.

则 $e^{-5k} = 0.8$.

当 $t = 15$ 时, $P = P_0 e^{-15k} = P_0 (e^{-5k})^3 = (0.8)^3 P_0 = 51.2\% P_0$.

故 15 h 后还剩 51.2% 的污染物.

(2) 令 $P_0 e^{-kt} = (1 - 36\%) P_0$,

即 $(e^{-5k})^{\frac{t}{5}} = 0.64$.

即 $0.8^{\frac{t}{5}} = 0.64$, 则 $\frac{t}{5} = 2$, 解得 $t = 10$,

故污染物减少 36% 需要花 10 h.

小测试(三十七) 任意角

预习自评

1. (1) × (2) ✓ (3) × (4) ✓

2. D

基础过关

1. B 解析: 逆时针旋转是正角, 顺时针旋转是负角, 故 $\angle AOC = 120^\circ - 270^\circ = -150^\circ$. 故选 B.

2. B 解析: 因为 $\alpha = -300^\circ = -360^\circ + 60^\circ$, 所以角 α 的终边与 60° 角的终边相同, 故选 B.

3. D 解析: α 的终边和 60° 角的终边相同, β 的终边与 120° 角的终边相同. $\therefore 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\therefore$ 角 α 与 β 的终边的位置关系是关于 y 轴对称, 故选 D.

4. D 解析: 令 $k = 0$, 则 $\alpha = -60^\circ$, 角 α 的终边在第四

象限; 再令 $k = 1$, 则 $\alpha = -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ$, 角 α 的终边在第二象限, 故选 D.

5. ABC 解析: $\because$ 角 $\frac{\theta}{2}$ 的终边在第三象限, $\therefore 180^\circ + k \cdot 360^\circ < \frac{\theta}{2} < 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$. $\therefore 360^\circ + k \cdot 720^\circ < \theta < 540^\circ + k \cdot 720^\circ, k \in \mathbf{Z}$. $\therefore \theta$ 的终边可能在第一、二象限或 y 轴非负半轴.

6. $72^\circ, 162^\circ, 252^\circ, 342^\circ$ 解析: 由题意, 得 $\alpha = 288^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$, $\frac{\alpha}{4} = 72^\circ + k \cdot 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$. 又 $\frac{\alpha}{4} \in [0^\circ, 360^\circ]$, 所以 $k = 0, 1, 2, 3$. 相应的角为 $72^\circ, 162^\circ, 252^\circ, 342^\circ$.

7. ①②③④ 解析: 由题意, ① -65° 是第四象限角是正确的; ② 225° 是第三象限角, 是正确的; ③ $475^\circ = 360^\circ + 115^\circ$, 其中 115° 是第二象限角, 所以 475° 为第二象限角是正确的; ④ $-315^\circ = -360^\circ + 45^\circ$, 其中 45° 是第一象限角, 所以 -315° 是第一象限角是正确的, 所以所有正确说法的序号为 ①②③④.

8. 解: (1) 终边落在射线 OA 上的角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 210^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在射线 OB 上的角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 300^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 终边落在阴影部分 (含边界) 的角的集合是 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 210^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 300^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

素养提升

1. D 解析: 根据 $A = \{\theta | \theta \text{ 为锐角}\} = \{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$, $D = \{\theta | \theta \text{ 为小于 } 90^\circ \text{ 的正角}\} = \{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$, 可得 $A = D$.

2. C 解析: 若 α 是第一象限的角, 则 $-\alpha$ 是第四象限角, 所以 $90^\circ - \alpha$ 是第一象限角, $90^\circ + \alpha$ 是第二象限角, $360^\circ - \alpha$ 是第四象限角, $180^\circ + \alpha$ 是第三象限角, 故选 C.

3. C

4. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 解析: 因为角 α 和角 β 的终边关于 x 轴对称, 所以 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

5. 解: (1) 由 $k = 4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3 (n \in \mathbf{Z})$, 知在给定的角的集合中终边不相同的角共有四种.

(2) 由 $-360^\circ \leq k \cdot 90^\circ + 45^\circ < 360^\circ$, 得

$$-\frac{9}{2} \leq k < \frac{7}{2}.$$

又 $k \in \mathbf{Z}$, 故 k 可以取 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

所以该集合中共有 8 个角在 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 范围内.

(3) 该集合中第三象限角为 $k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

6. 解: 根据题意可知, $14\alpha, 14\beta$ 均为 360° 的整数倍.

故可设 $14\alpha = m \cdot 360^\circ, m \in \mathbf{Z}, 14\beta = n \cdot 360^\circ, n \in \mathbf{Z}$,

所以 $\alpha = \frac{m}{7} \cdot 180^\circ, \beta = \frac{n}{7} \cdot 180^\circ, m, n \in \mathbf{Z}$.

又由两只蚂蚁在第 2 s 时均位于第二象限, 得 $2\alpha, 2\beta$ 均为第二象限角.

因为 $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$,

所以 $0^\circ < 2\alpha < 2\beta < 360^\circ$. 因此 $2\alpha, 2\beta$ 均为钝角,

即 $90^\circ < 2\alpha < 2\beta < 180^\circ$,

所以 $45^\circ < \alpha < 90^\circ, 45^\circ < \beta < 90^\circ$.

所以 $45^\circ < \frac{m}{7} \cdot 180^\circ < 90^\circ, m \in \mathbf{Z}$,

$45^\circ < \frac{n}{7} \cdot 180^\circ < 90^\circ, n \in \mathbf{Z}$.

即 $\frac{7}{4} < m < \frac{7}{2}, \frac{7}{4} < n < \frac{7}{2}, m < n, m, n \in \mathbf{Z}$.

所以 $m=2, n=3$.

$\alpha = \frac{2}{7} \times 180^\circ = \left(\frac{360}{7}\right)^\circ, \beta = \frac{3}{7} \times 180^\circ = \left(\frac{540}{7}\right)^\circ$.

易错辨析

1. -60° 解析: $\because$ 将分针拨快是顺时针旋转, $\therefore$ 分针拨快 10 min, 旋转过程中形成的角的度数为 -60° .

2. C 解析: 所有与 30° 角终边相同的角可表示为 $\beta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 则令 $-720^\circ \leq 30^\circ + k \cdot 360^\circ < 0^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 得 $-750^\circ \leq k \cdot 360^\circ < -30^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $-\frac{750^\circ}{360^\circ} \leq k < -\frac{30^\circ}{360^\circ} (k \in \mathbf{Z})$, 从而 $k = -2$ 或 $k = -1$,

代入得 $\beta = -690^\circ$ 或 $\beta = -330^\circ$. 故选 C.

小测试(三十八) 弧度制

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. C 3. C

基础过关

1. C 解析: $\because -\pi < -2 < -\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ 角 α 的终边在第三象限.

2. B 解析: 显然分针在从 1 时到 3 时 20 分这段时间里, 顺时针转过了 $\frac{7}{3}$ 周, 转过的弧度数为 $\left(-\frac{7}{3}\right) \times 2\pi = -\frac{14}{3}\pi$.

3. ABD 解析: 对于 A, $65^\circ = 65 \times \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{36}$, 正确;

对于 B, $-\frac{10\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = -600^\circ$, 正确;

对于 C, $-150^\circ = -150 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{6}$, 错误;

对于 D, $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$, 正确.

4. C 解析: $\because$ 弧长为 π cm 的弧所对的圆心角为 $\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ 圆的半径 $r = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4$ cm. $\therefore$ 这条弧所在的扇形的

面积 $S = \frac{1}{2} \times \pi \times 4 = 2\pi$ cm². 故选 C.

5. B 解析: $\because$ 扇形的圆心角 $\alpha = 120^\circ$, 弦长 $AB = 12$ cm, $\therefore$ 半径 $r = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$ cm. 又 $\because \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$,

$\therefore$ 弧长 $l = |\alpha| r = \frac{2\pi}{3} \times 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm.

6. $-4\pi + \frac{\pi}{6}$ 解析: (方法一) $-690^\circ = -690 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{23}{6}\pi$ 因为 $-\frac{23}{6}\pi = -4\pi + \frac{\pi}{6}$, 所以 $-690^\circ = -4\pi + \frac{\pi}{6}$.

(方法二) $-690^\circ = -2 \times 360^\circ + 30^\circ$, 则 $-690^\circ = -4\pi + \frac{\pi}{6}$.

7. $2 - \frac{\pi}{2}$ 解析: 设 $AB = 1, \angle EAD = \alpha, \because S_{\text{扇形ADE}} = S_{\text{阴影BCD}}$, 则由题意可得 $\frac{1}{2} \times 1^2 \times \alpha = 1^2 - \frac{\pi \times 1^2}{4}$, $\therefore \alpha = 2 - \frac{\pi}{2}$.

8. 解: 设扇形的圆心角为 θ , 半径为 r cm, 弧长为 l cm, 面积为 S cm², 则 $l + 2r = 40$.
所以 $l = 40 - 2r$.

所以 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times (40 - 2r)r = -(r - 10)^2 + 100$.

当 $r = 10$ cm 时, 扇形的面积最大, 最大值为 100 cm²,

此时 $l = 40 - 2 \times 10 = 20, \theta = \frac{l}{r} = \frac{20}{10} = 2$ rad.

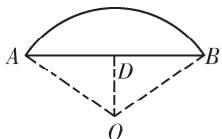
即半径为 10 cm, 圆心角为 2 rad 时, 扇形的面积最大, 最大为 100 cm².

素养提升

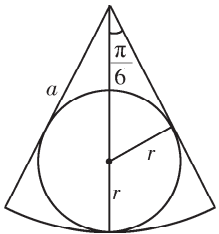
1. CD 解析: 直线 $y = -x$ 过原点, 经过第二、四象限, 故在 $[0, 2\pi)$ 内终边在直线 $y = -x$ 上的角有两个: $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 因此终边在直线 $y = -x$ 上的角的集合为 $\left\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 或 $\left\{\alpha \mid \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$. 故选 CD.

2. C 解析: 根据扇形的面积公式 $S = \frac{1}{2}lr$, 得 $4 = \frac{1}{2} \times 4r$. 解得 $r = 2$. 所以 $\alpha = \frac{4}{2} = 2$. 即这个扇形的圆心角的弧度数是 2, 故选 C.

3. B 解析: 标上字母, 如图所示. 由题意, 得 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, $OA = 4$. 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, 可得 $\angle AOD = \frac{\pi}{3}$, $\angle DAO = \frac{\pi}{6}$, $OD = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. 所以矢 = $4 - 2 = 2$. 由 $AD = AO \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, 得弦 $AB = 2AD = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. 所以弧田面积 = $\frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2) = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} \times 2 + 2^2) = 4\sqrt{3} + 2 \approx 4 \times 1.73 + 2 = 8.92 \approx 9(\text{m}^2)$. 故选 B.



4. 2:3 解析: 如图所示, 设内切圆半径为 r , 由已知可得 $r = \frac{a}{3}$. 所以 $S_{\text{内切圆}} = \pi \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{9}$. 又 $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{6}$, 所以 $\frac{S_{\text{内切圆}}}{S_{\text{扇}}} = \frac{2}{3}$.



5. 解: (1) $\because 120^\circ = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \widehat{AB} = 6 \times \frac{2\pi}{3} = 4\pi$. $\therefore \widehat{AB}$ 的长为 4π .
(2) 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D , 则 D 为 AB 的中点.
 $\because AB = 2BD = 2 \cdot OB \cdot \cos 30^\circ = 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$,
 $OD = OB \cdot \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$.
 $\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$.
 $\therefore S_{\text{扇形AOB}} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \cdot OB = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 6 = 12\pi$.
 $\therefore S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形AOB}} - S_{\triangle OAB} = 12\pi - 9\sqrt{3}$.
即弓形(阴影部分)的面积为 $12\pi - 9\sqrt{3}$.

6. 解: 由题意, 知 $OB = OA = 1$, $OC = OC' = \frac{1}{2}$, $BC = B'C' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle B'OC = \angle B'OC' = \frac{\pi}{3}$.

所以扇形 AOB' 的面积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{6}$,

$\text{Rt}\triangle B'OC'$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$,

所以 $B'C'$ 左边空白图形的面积 $S_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

因为 $B'C'$ 右边三块空白图形的面积之和 $S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$,

所以空白图形的总面积 $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$. 而半个圆 O 的面积为 $\frac{\pi}{2}$,

所以所求阴影部分的面积为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

易错辨析

1. D 解析: 与 30° 角终边相同的角表示为 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, 化为弧度制为 $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.
2. $\frac{40\pi}{3}$ 解析: $300^\circ = \frac{5}{3}\pi$, 根据弧长公式, 得 $l = \frac{5\pi}{3} \times 8 = \frac{40\pi}{3}(\text{cm})$.

小测试(三十九) 三角函数的概念(一)

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. B

基础过关

1. C 解析: 因为角 α 的终边上有一点 $P(-7, 24)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{24}{\sqrt{(-7)^2 + 24^2}} = \frac{24}{25}$. 故选 C.
2. B 解析: 角 α 的终边与单位圆交于点 $P(-\frac{1}{2}, y)$, $\therefore \cos \alpha = -\frac{1}{2}$.
3. D 解析: 当 $a = 4$ 时, 该点为 $(0, 5)$, 不在 45° 的终边上, 舍去; 当 $a \neq 4$ 时, 则 $\tan 45^\circ = \frac{a+1}{4-a} = 1$, 解得 $a = \frac{3}{2}$.
4. D 解析: 由角 α 的终边经过点 $P(x, -3)$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 可得 $\frac{-3}{x} = -\frac{3}{4}$, 所以 $x = 4$. 所以 $\cos \alpha =$

$$\frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4}{5}.$$

5. A 解析:由题意知,点P沿逆时针方向转过的角 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.则 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边与单位圆的交点坐标为

$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,即点Q的坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,故选A.

6. -2 解析:由余弦函数的定义知, $\frac{2a+1}{\sqrt{(2a+1)^2+(a-2)^2}} = -\frac{3}{5}$.化简并整理,得 $11a^2+20a-4=0$.解得 $a=-2$ 或 $a=\frac{2}{11}$,又因为 $2a+1<0$,所以 $a=-2$.

7. $\frac{1}{5}$ 解析: $\because$ 角 α 的始边与x轴的非负半轴重合,终边在射线 $4x-3y=0(x\leq 0)$ 上,不妨令 $x=-3$,则 $y=-4$. $\therefore r=5$. $\therefore \cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{4}{5}$,则 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

8. 解:(1)因为角 α 的终边经过 $P(4, -3)$,所以 $\sin \alpha = \frac{-3}{\sqrt{16+9}} = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.
所以 $2\sin \alpha - \cos \alpha = -2$.
(2)角 α 的终边与单位圆的交点Q的坐标为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$,即 $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

素养提升

1. C 解析:由题意,得点 $P(1, -\sqrt{3})$,点P到原点的距离 $r = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$,则 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. A 解析: $\because$ 角 α, β 的终边分别与单位圆交于点 $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ 和 $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $\therefore \sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\tan \beta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.故 $\sin \alpha \cdot \tan \beta = \frac{12}{13} \times (-\frac{4}{3}) = -\frac{16}{13}$.

3. B 解析:由三角函数的定义,得 $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+a^2}} = \cos 300^\circ = \frac{1}{2}$,解得 $a=3$ (舍去)或 $a=-3$.所以 $a=-3$.

4. 2 $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 解析: $\because \sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} < 0$, $\therefore n < 0$. $\because$ 角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合, $\therefore n =$

$3m$.又 $|OP| = \sqrt{10}$, $\therefore \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{m^2+9m^2} = \sqrt{10}$,即 $m=-1$,故 $n=-3$, $\sin \alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $m-n=2$.

5. 解:设点M的坐标为 (x_1, y_1) .

由题意,知 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为点M在单位圆上,

所以 $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

即 $x_1^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$.

解得 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\tan \alpha = -1$;

当 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\tan \alpha = 1$.

6. 解:设角 α 的终边上任意一点为 $P(k, -3k)(k \neq 0)$.

则 $x=k, y=-3k, r = \sqrt{k^2+(-3k)^2} = \sqrt{10}|k|$.

①当 $k>0$ 时, $r = \sqrt{10}k$.

因为 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3k}{\sqrt{10}k} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{10}k}{k} = \sqrt{10}$,

所以 $10\sin \alpha + \frac{3}{\cos \alpha} = 10 \times (-\frac{3\sqrt{10}}{10}) + 3\sqrt{10} = -3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 0$;

②当 $k<0$ 时, $r = -\sqrt{10}k$.

因为 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3k}{-\sqrt{10}k} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x} = \frac{-\sqrt{10}k}{k} = -\sqrt{10}$,

所以 $10\sin \alpha + \frac{3}{\cos \alpha} = 10 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} + 3 \times (-\sqrt{10}) = 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = 0$.

综上所述, $10\sin \alpha + \frac{3}{\cos \alpha} = 0$.

易错辨析

1. ± 1 解析: $r = \sqrt{(-3a)^2+(4a)^2} = 5|a|$,①若 $a>0$,则 $r=5a$, $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-3a}{5a} = -\frac{3}{5}$,所以 $2\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1$.

②若 $a < 0$, 则 $r = -5a$, $\sin \alpha = \frac{4a}{-5a} = -\frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{-3a}{-5a} = \frac{3}{5}$, 所以 $2\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} = -1$.

2. A 解析: 角 α 的始边是 x 轴的非负半轴, 终边经过点 $(-3, y)$, 且 $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{9+y^2}} = \frac{4}{5}$. 所以 $y > 0$, 则 $y = 4$, 则 $\tan \alpha = \frac{y}{-3} = -\frac{4}{3}$, 故选 A.

小测试(四十) 三角函数的概念(二)

预习自评

1. (1)× (2)✓ (3)×

2. C

基础过关

1. D 解析: $\because$ 点 $M(\sin \theta, \cos \theta)$ 位于第二象限, $\therefore \begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta > 0, \end{cases} \therefore \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2\pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore$ 角 θ 的终边所在的象限是第四象限, 故选 D.

2. C 解析: $\because \alpha$ 为第二象限角, $\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$. $\therefore \frac{|\sin \alpha|}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{|\cos \alpha|} = 1 - (-1) = 2$, 故选 C.

3. BCD 解析: $\because -1\ 000^\circ = -3 \times 360^\circ + 80^\circ$, $\therefore -1\ 000^\circ$ 是第一象限角. $\therefore \sin(-1\ 000^\circ) > 0$, $\therefore \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$, $\therefore \frac{10\pi}{3}$ 是第三象限角. $\therefore \cos \frac{10\pi}{3} < 0$. $\because 2\text{ rad} \approx 2 \times 57^\circ 18' = 114^\circ 36'$ 是第二象限角, $\therefore \tan 2 < 0$. $\because \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$, $\therefore 5\text{ rad}$ 是第四象限角. $\therefore \sin 5 < 0$. 故选 BCD.

4. AB 解析: 由题意知, $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0$. 选项 A, $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} > 0$; 选项 B, $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$; 选项 C, $\sin \alpha \cos \alpha < 0$; 选项 D, $\sin \alpha + \cos \alpha$ 符号不确定.

5. C 解析: 因为 $\sin A > 0$, 所以 $\cos B, \tan C$ 中必有一个为负, 即角 B, C 中必有一个为钝角, 故 $\triangle ABC$ 是钝角三角形.

6. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 解析: 原式 $= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. $(-2, 3)$ 解析: 已知 θ 的终边经过点 $(3a-9, a+2)$, 且 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$, 则 θ 为第二象限角. 所以 $\begin{cases} a+2 > 0, \\ 3a-9 < 0. \end{cases}$ 解得 $-2 < a < 3$. 故实数 a 的取值范围是 $(-2, 3)$.

8. 解: (1) 原式 $= \sin(-4 \times 360^\circ + 60^\circ) \times \cos(3 \times 360^\circ + 30^\circ) + \cos(-3 \times 360^\circ + 60^\circ) \times \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$.

(2) 原式 $= \cos\left[\frac{\pi}{3} + (-4) \times 2\pi\right] + \tan\left(\frac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

素养提升

1. C 解析: $\cos 2\ 022^\circ = \cos(2\ 022^\circ - 6 \times 360^\circ) = \cos(-138^\circ) < 0$, $\sin 2\ 022^\circ = \sin(2\ 022^\circ - 6 \times 360^\circ) = \sin(-138^\circ) < 0$, 故选 C.

2. A 解析: $\because$ 角 α 以 Ox 为始边, 终边位于第四象限, 且与单位圆交于点 $\left(\frac{1}{2}, y\right)$, $\therefore \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} = 1$, 且 $y < 0$. $\therefore y = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \sin(4\pi + \alpha) = \sin \alpha = y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. BC 解析: 因为 $x \in \left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

当 x 在第一象限时, $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = 1 + 1 - 1 = 1$;

当 x 在第二象限时, $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = 1 - 1 + 1 = 1$;

当 x 在第三象限时, $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = -1 - 1 - 1 = -3$;

当 x 在第四象限时, $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\tan x}{|\tan x|} = -1 + 1 + 1 = 1$.

4. $-2\sqrt{3}$ 解析: 由题意, 得 $\tan 510^\circ = \tan(510^\circ - 360^\circ) = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 结合三角函数的定义可知, $\frac{2}{m} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore m = -2\sqrt{3}$.

5. 解: 因为角 α 的终边经过点 $P(3, 4)$, 所以 $x = 3, y = 4$, 则 $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. 所以 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$.

(1) $\tan(-6\pi + \alpha) = \tan \alpha = \frac{4}{3}$.

$$(2) \text{ 原式} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

6. 解: (1) 由 $\frac{1}{|\sin \alpha|} = -\frac{1}{\sin \alpha}$, 知 $\sin \alpha < 0$.

由 $\lg \cos \alpha$ 有意义, 知 $\cos \alpha > 0$.

$\therefore$ 角 α 的终边在第四象限.

$$(2) \because |OM| = 1, \therefore \left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2 = 1.$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{4}{5}.$$

又 α 是第四象限角, 故 $m < 0$, 从而 $m = -\frac{4}{5}$.

由正弦函数的定义可知

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{m}{|OM|} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}.$$

易错辨析

$$1. A \quad \text{解析: } \tan\left(-\frac{35}{6}\pi\right) = \tan\left(-3 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. D 解析: 由 $\sin \alpha < 0$, 得 $2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + 2\pi (k \in \mathbb{Z})$, $\therefore k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$, 即 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角, $\therefore \tan \frac{\alpha}{2} < 0$. 故选 D.

小测试(四十一) 同角三角函数的基本关系

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓

2. A 3. B

基础过关

1. D 解析: 因为 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $\sin \alpha = \pm \frac{5}{13}$. 因为 α 是第四象限角, 所以 $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$.

2. A 解析: 因为 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是方程 $2x^2 - x - m = 0$ 的两个根, 所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{m}{2}$. 所以 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 - m = \frac{1}{4}$, 解得 $m = \frac{3}{4}$. 验证满足 $\Delta \geq 0$. 故选 A.

3. A 解析: 原式 = $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 160^\circ}{\cos^2 160^\circ}}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 160^\circ + \sin^2 160^\circ}{\cos^2 160^\circ}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 160^\circ}}} = \sqrt{\cos^2 160^\circ} = |\cos 160^\circ| = -\cos 160^\circ. \text{ 故选 A.}$$

4. D 解析: $\because 2\sin \theta + \sqrt{3}\tan \theta = 2\sin \theta + \sqrt{3}\frac{\sin \theta}{\cos \theta} =$

$$\sin \theta \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta}\right) = 0, \therefore \sin \theta = 0 \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \theta = -210^\circ, -180^\circ, 210^\circ$ 都满足题意, 而 $\theta = -240^\circ$ 不满足题意. 故选 D.

5. AC 解析: $\because$ 角 α 的终边与单位圆交于点

$$\left(\frac{3}{5}, y_0\right), \therefore \frac{9}{25} + y_0^2 = 1, \therefore y_0 = \pm \frac{4}{5}, \therefore \tan \alpha =$$

$$\frac{y_0}{\frac{3}{5}} = \pm \frac{4}{3}. \text{ 当 } \tan \alpha = \frac{4}{3} \text{ 时, } \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{3\sin \alpha - \cos \alpha} =$$

$$\frac{\tan \alpha + 2}{3\tan \alpha - 1} = \frac{10}{9}; \text{ 当 } \tan \alpha = -\frac{4}{3} \text{ 时, } \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{3\sin \alpha - \cos \alpha} =$$

$$\frac{\tan \alpha + 2}{3\tan \alpha - 1} = -\frac{2}{15}.$$

6. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 解析: $\because \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$

$$\therefore \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}. \therefore \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

7. 1 解析: $\because \alpha$ 为第二象限角, $\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0,$

$$\therefore \frac{2\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} + \cos \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2\sin \alpha}{|\sin \alpha|} +$$

$$\cos \alpha \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 2 + \cos \alpha \left|\frac{1}{\cos \alpha}\right| = 2 - 1 = 1.$$

8. 解: (1) $2\cos^2 \alpha + 3\cos \alpha \sin \alpha - 3\sin^2 \alpha$

$$= \frac{2\cos^2 \alpha + 3\cos \alpha \sin \alpha - 3\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 + 3\tan \alpha - 3\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$= 1,$$

$$\text{即 } 4\tan^2 \alpha - 3\tan \alpha - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = -\frac{1}{4} \text{ 或 } \tan \alpha = 1.$$

$$\therefore \alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right),$$

$\therefore \alpha$ 为第二象限角.

$$\therefore \tan \alpha < 0, \text{ 即 } \tan \alpha = -\frac{1}{4}.$$

$$(2) \because \tan \alpha = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\frac{2\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{3\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{4\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{9\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2\tan \alpha - 3}{4\tan \alpha - 9} =$$

$$\frac{2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) - 3}{4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) - 9} = \frac{7}{20}.$$

素养提升

1. B 解析: (方法一) 联立 $\begin{cases} \cos \alpha + 2\sin \alpha = -\sqrt{5}, \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \end{cases}$ 消去

$\cos \alpha$, 得 $(-\sqrt{5} - 2\sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 1$. 即 $5\sin^2 \alpha + 4\sqrt{5}\sin \alpha + 4 = 0$. $\therefore (\sqrt{5}\sin \alpha + 2)^2 = 0$, $\therefore \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{5} - 2\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. $\therefore \tan \alpha =$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

(方法二) $\therefore \cos \alpha + 2\sin \alpha = -\sqrt{5}$, $\therefore \cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha + 4\sin^2 \alpha = 5$. $\therefore \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha + 4\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 5$.

$$\therefore \frac{1 + 4\tan \alpha + 4\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = 5. \therefore \tan^2 \alpha - 4\tan \alpha + 4 = 0.$$

$$\therefore (\tan \alpha - 2)^2 = 0. \therefore \tan \alpha = 2.$$

2. D 解析: $\therefore \theta$ 为第四象限角, $\therefore \sin \theta < 0$.

$$\begin{aligned} & \therefore \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} - \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} \\ &= \frac{\sqrt{1-\cos^2 \theta}}{1+\cos \theta} - \frac{\sqrt{1-\cos^2 \theta}}{1-\cos \theta} \\ &= \frac{-\sin \theta}{1+\cos \theta} - \frac{-\sin \theta}{1-\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1+\cos \theta) - \sin \theta(1-\cos \theta)}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)} \\ &= \frac{2\sin \theta \cos \theta}{1-\cos^2 \theta} = \frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{\tan \theta}. \text{ 故选 D.} \end{aligned}$$

3. ABD 解析: $\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, ① $\therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$. $\therefore 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{24}{25} <$

0. 又 $\therefore \theta \in (0, \pi)$, $\therefore \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\sin \theta - \cos \theta > 0$.

$$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{49}{25}, \therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}. \text{ ② 联立 ① ②, 得}$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{4}{5}, \\ \cos \theta = -\frac{3}{5}. \end{cases} \therefore \tan \theta = -\frac{4}{3}. \text{ 故选 ABD.}$$

4. $\frac{1}{2}$ 1 解析: $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha + 2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$. $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 2\cos^3 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \tan \alpha + 2\cos^2 \alpha} =$

$$\frac{2}{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 1.$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ 解: 原式} &= \frac{\sqrt{\sin^2 130^\circ - 2\sin 130^\circ \cos 130^\circ + \cos^2 130^\circ}}{\sin 130^\circ + \sqrt{\cos^2 130^\circ}} \\ &= \frac{|\sin 130^\circ - \cos 130^\circ|}{\sin 130^\circ + |\cos 130^\circ|} \\ &= \frac{\sin 130^\circ - \cos 130^\circ}{\sin 130^\circ - \cos 130^\circ} \\ &= 1. \end{aligned}$$

6. 解: (1) 由根与系数的关系, 得

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{m}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}+4}{4}.$$

$$\therefore 2\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{m}{2}, \therefore m = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) \therefore \frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan \theta - 1} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sin \theta + \cos \theta,$$

$$\therefore \text{原式} = \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$$(3) \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$\therefore 2\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \therefore \sin \theta \text{ 和 } \cos \theta \text{ 同号.}$$

又 $\therefore \sin \theta + \cos \theta > 0$, $\therefore \sin \theta$ 与 $\cos \theta$ 同为正号.

$$\text{又 } \therefore \theta \in (0, \pi), \therefore \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \text{ 且 } \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \text{方程的两个根为 } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 和 } \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

易错辨析

1. D 解析: $\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\therefore \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{3a-1}{1+a}\right)^2 = 1$, 解得 $a = 1$ 或 $a = \frac{1}{9}$. 当 $a = 1$ 时, $\sin \theta = 0$, θ 不是第二象限角, 舍去; 当 $a = \frac{1}{9}$ 时,

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$, 符合题意. $\therefore a = \frac{1}{9}$, 故选 D.

2. B 解析: $\sqrt{1-2\sin 2\cos 2} = \sqrt{(\sin 2 - \cos 2)^2}$.

$\because \frac{\pi}{2} < 2 < \pi, \therefore \sin 2 > 0, \cos 2 < 0, \therefore$ 原式 = $|\sin 2 - \cos 2| = \sin 2 - \cos 2$.

小测试(四十二) 诱导公式(一)

预习自评

1. B 2. B 3. B

基础过关

1. A 解析: $\because \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \therefore \cos \alpha = \frac{1}{2}. \therefore \cos(-2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{2}$.

2. B 解析: $\because \cos(-80^\circ) = k, \therefore \sin(-80^\circ) = -\sqrt{1-k^2}. \therefore \tan 280^\circ = \tan(-80^\circ) = \frac{\sin(-80^\circ)}{\cos(-80^\circ)} = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$. 故选 B.

3. A 解析: 依题意, 得 $\sin(7\pi - \alpha) = \frac{3}{5}$, 即 $\sin \alpha = \frac{3}{5}. \therefore \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$, 故 $\cos(\alpha - 2022\pi) = \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

4. C 解析: 因为 $\frac{\sin(\alpha - \pi) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1}$, 又角 α 的终边在直线 $y = 2x$ 上, 所以 $\tan \alpha = 2$. 所以原式 = $\frac{2+1}{2-1} = 3$.

5. C 解析: 设 $\theta = \frac{\pi}{6} - \alpha$, 则 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \alpha = \frac{\pi}{6} - \theta$, 则 $\sin(\alpha + \frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6} - \theta + \frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta. \because \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \therefore \theta \in (-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}). \therefore \sin \theta < 0$, 则 $\sin \theta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$.

6. -1 解析: 原式 = $\frac{\cos(\pi - \alpha)}{-\sin(\pi - \alpha)} \cdot \tan(-\alpha) = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = -1$.

7. 1 解析: 原式 = $\sin(-570^\circ + 720^\circ) + \cos(-2640^\circ + 2880^\circ) + \tan(1665^\circ - 1620^\circ) = \sin 150^\circ + \cos 240^\circ + \tan 45^\circ = \sin 30^\circ - \cos 60^\circ + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$.

8. 解: $\because \sin(540^\circ + \alpha) = \frac{1}{3}, \therefore \sin \alpha = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(-\sin \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\tan \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)} \\ &= -\sin \alpha \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

素养提升

1. B 解析: 由已知, 得 $-\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$. 于是 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{2\tan \alpha - 1} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = -\frac{1}{4}$.

2. A 解析: 因为角 α 的终边经过点 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 所以 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

3. A 解析: 因为函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$, 当 $0 \leq x < \pi$ 时, $f(x) = 0$, 所以 $f\left(\frac{23\pi}{6}\right) = f\left(\pi + \frac{17\pi}{6}\right) = f\left(\frac{17\pi}{6}\right) + \sin \frac{17\pi}{6} = f\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{17\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 故选 A.

4. 5 解析: 由题意可得 $f(2009) = a\sin(2009\pi + \alpha) + b\cos(2009\pi + \beta) = -a\sin \alpha - b\cos \beta = 5$. 所以 $f(2021) = a\sin(2021\pi + \alpha) + b\cos(2021\pi + \beta) = -a\sin \alpha - b\cos \beta = 5$.

5. 解: 易得 $\sin A = \sqrt{2} \sin B, \sqrt{3} \cos A = \sqrt{2} \cos B$.

平方相加得 $2\cos^2 A = 1, \cos A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$ 或 $A = \frac{3}{4}\pi$.

当 $A = \frac{3}{4}\pi$ 时, $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, 则 $B \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

此时 A, B 均为钝角, 不合题意, 舍去.

所以 $A = \frac{\pi}{4}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{7}{12}\pi$.

综上所述, $A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{7}{12}\pi$.

6. 解: (1) 解方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$, 得两根为 2 和 $-\frac{3}{5}$.

所以 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

所以 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

当 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 时, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$;

当 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 时, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

所以原式 $= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha} = \tan \alpha = \pm \frac{3}{4}$.

(2) 因为 $\sin(4\pi + \alpha) = \sqrt{2} \sin \beta$,

所以 $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$. ①

因为 $\sqrt{3} \cos(6\pi + \alpha) = \sqrt{2} \cos(2\pi + \beta)$,

所以 $\sqrt{3} \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \beta$. ②

①² + ②², 得 $\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 2$.

所以 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

又 $0 < \beta < \pi$, 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 由②得 $\beta = \frac{\pi}{6}$;

当 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时, 由②得 $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

所以 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{5\pi}{6}$.

易错辨析

1. D 解析: $\because \sin\left(\frac{5\pi}{7} - \alpha\right) = \frac{1}{3}, \therefore \sin\left(\frac{2\pi}{7} + \alpha\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{5\pi}{7} - \alpha\right)\right] = \sin\left(\frac{5\pi}{7} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$.

2. C 解析: 当 $n = 2k (k \in \mathbf{Z})$ 时, 原式 $= \frac{\sin(2k\pi + \alpha)}{\cos(2k\pi + \alpha)} =$

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$. 当 $n = 2k + 1 (k \in \mathbf{Z})$ 时, 原式 $=$

$\frac{\sin(2k\pi + \pi + \alpha)}{\cos(2k\pi + \pi + \alpha)} = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha$. 综上

所述, 原式 $= \tan \alpha$. 故选 C.

小测试(四十三) 诱导公式(二)

预习自评

1. C 2. B

基础过关

1. B 解析: $\because P(\sin 40^\circ, -\cos 140^\circ)$ 为角 α 终边上的

点, 因而 $\tan \alpha = \frac{-\cos 140^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{-\cos(90^\circ + 50^\circ)}{\sin(90^\circ - 50^\circ)} =$

$\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \tan 50^\circ$, 又 α 为锐角, 则 $\alpha = 50^\circ$, 故选 B.

2. B 解析: 因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{12}{13}$, 所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{12}{13}$.

3. C 解析: $\because \sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$, $\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ = 1, \dots, \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 44^\circ + \cos^2 43^\circ + \dots + \cos^2 3^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 1^\circ = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}$.

4. C 解析: 由题意, 得 $\begin{cases} -2\tan \alpha + 3\sin \beta = -5, \\ \tan \alpha - 6\sin \beta = 1. \end{cases}$ 解得

$\tan \alpha = 3$. 又 α 为锐角, 所以 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

5. C 解析: 由三角函数的定义, 得 $\tan \theta = -\frac{4}{3}$. 又

$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \cos(\pi + \theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{(-\cos \theta) \cdot (-\cos \theta)}{\cos \theta \cdot (-\sin \theta)} = -\frac{1}{\tan \theta} = \frac{3}{4}$, 故选 C.

6. $\frac{40}{49}$ 解析: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta = \frac{3}{7}$, 则

$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$.

7. $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 解析: $\because f(\cos x) = 1 - \cos 2x, \therefore f(\sin 15^\circ) = f(\cos 75^\circ) = 1 - \cos 150^\circ = 1 - \cos(180^\circ - 30^\circ) = 1 + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. 解: (1) $f(\alpha) = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \tan(\pi - \alpha)}{\tan(-\alpha - \pi) \sin(-\alpha - \pi)}$
 $= \frac{(-\cos \alpha) \sin \alpha (-\tan \alpha)}{(-\tan \alpha) \sin \alpha}$
 $= -\cos \alpha$.

(2) $\because \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$,

$\therefore -\sin \alpha = \frac{1}{5}$, 即 $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$.

$\therefore \alpha$ 为第三象限角,

$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$$\therefore f(\alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

素养提升

1. AC 解析: $\because \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{1}{4}, \therefore \sin \alpha = \frac{1}{4}$. 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. A 中, $\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$, 故 A 符合条件; B 中, $\cos(\pi + \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = -\frac{1}{4}$, 故 B 不符合条件; C 中, $\tan \beta = \sqrt{15}$, 即 $\sin \beta = \sqrt{15} \cos \beta$. 又 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, 所以 $\sin \beta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$. 所以 $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$. 故 C 符合条件; D 中, $\tan \beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 即 $\sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{5} \cos \beta$, 又 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, 所以 $\sin \beta = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$. 所以 $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$. 故 D 不符合条件.

2. B 解析: $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = 2$, 解得 $\tan \alpha = 3$. 又 $\sin(\alpha - 5\pi) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha(-\cos \alpha) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{3}{10}$. 故选 B.

3. B 解析: 由 $f(n) = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 + 2\sin\left(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 4$. 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2\,021) = 4 \times \frac{2\,020}{4} + 2\sin\left(\frac{2\,021\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\,021 + \sqrt{2}$. 故选 B.

4. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 解析: $f\left(\theta - \frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2} \sin \theta$, 由已知可得 θ 为第四象限角, 所以 $\sin \theta < 0$. 故 $\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\frac{4}{5}$, $f\left(\theta - \frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

$$\begin{aligned} 5. \text{解: 原式} &= \frac{\tan(360^\circ + 75^\circ - \alpha) + \sin(\alpha + 15^\circ - 180^\circ)}{\cos(180^\circ + 15^\circ + \alpha) \cdot \sin[180^\circ + (\alpha - 75^\circ)]} \\ &= \frac{\tan(75^\circ - \alpha) - \sin(\alpha + 15^\circ)}{-\cos(15^\circ + \alpha) \cdot [-\sin(\alpha - 75^\circ)]} \\ &= -\frac{1}{\cos(15^\circ + \alpha) \cdot \sin(15^\circ + \alpha)} + \frac{\sin(\alpha + 15^\circ)}{\cos(15^\circ + \alpha) \cdot \cos(15^\circ + \alpha)} \\ &\because 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \\ &\therefore 15^\circ < \alpha + 15^\circ < 105^\circ. \\ &\text{又} \because \cos(15^\circ + \alpha) = \frac{3}{5}, \\ &\therefore \sin(15^\circ + \alpha) = \frac{4}{5}. \\ &\therefore \text{原式} = -\frac{1}{\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}} = \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

$$6. \text{解: 由条件, 得} \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta, & \text{①} \\ \sqrt{3} \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \beta. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①}^2 + \text{②}^2, \text{得} \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 2. \therefore \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又} \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{将} \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 代入 ②, 得 } \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{又} \beta \in (0, \pi), \therefore \beta = \frac{\pi}{6}, \text{ 代入 ① 检验符合题意.}$$

$$\text{将} \alpha = -\frac{\pi}{4} \text{ 代入 ②, 得 } \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{又} \beta \in (0, \pi), \therefore \beta = \frac{\pi}{6}, \text{ 代入 ① 检验不符合题意.}$$

$$\text{综上所述, 存在 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{6} \text{ 满足条件.}$$

易错辨析

$$\begin{aligned} 1. \text{解析: } \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right] = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1. \end{aligned}$$

小测试(四十四) 正弦函数、余弦函数的图象

预习自评

1. C 2. B

基础过关

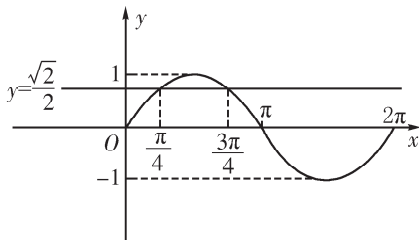
1. A 解析: 由五点作图法知五个关键点分别为 $(0, 2), \left(\frac{\pi}{4}, 3\right), \left(\frac{\pi}{2}, 4\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 3\right), (\pi, 2)$, 故选 A.

2. B 解析: 当 $x = 0$ 时, $y = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = 0$; 当

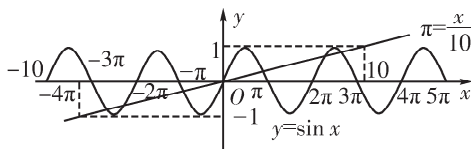
$x=2\pi$ 时, $y=1$. 结合正弦函数的图象可知 B 正确.

3. D 解析: 由诱导公式, 得 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, 所以 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 得到 $g(x)$ 的图象.

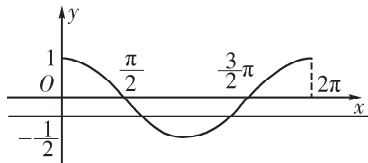
4. B 解析: 依题意, 得 $2\sin x - \sqrt{2} \geq 0$, 即 $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. 作出函数 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象及直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 如图所示. 由图象可知, 在 $[0, 2\pi]$ 上满足 $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的 x 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 即函数的定义域为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 故选 B.



5. A 解析: 在同一平面直角坐标系内画出函数 $y = \frac{x}{10}$ 和 $y = \sin x$ 的部分图象, 如图所示. 由图可知方程 $\sin x = \frac{x}{10}$ 有 7 个根.



6. 2 解析: 作函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象及直线 $y = -\frac{1}{2}$, 如图所示. 由图可知直线与函数图象有 2 个交点.

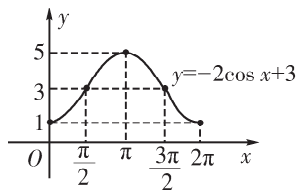


7. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ 解析: 由题意知, 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\sin x \in [-1, 1]$. 若方程 $\sin x = 4m + 1$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上有解, 则 $-1 \leq 4m + 1 \leq 1$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$, 即实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

8. 解: 列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-2\cos x + 3$	1	3	5	3	1

描点、连线得出函数 $y = -2\cos x + 3 (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的图象, 如图所示.



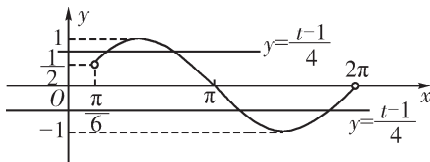
素养提升

1. C 解析: 注意图象所对的函数值的正负, 可排除选项 A, D. 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin |x| > 0$, 而图中显然小于零, 因此排除选项 B. 故选 C.

2. D 解析: 由题意, 得 $y = \begin{cases} 2\cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi, \\ 2\cos x, & \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$ 易

知 D 中图象符合要求, 故选 D.

3. BD 解析: 令 $f(x) = 0$, 可得 $\sin x = \frac{t-1}{4}$, 可知两个函数在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\pi\right)$ 上的图象有两个交点, 作出函数 $y = \sin x$ 与 $y = \frac{t-1}{4}$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\pi\right)$ 上的图象, 如下图所示.



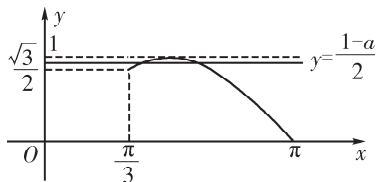
则 $\frac{1}{2} < \frac{t-1}{4} < 1$ 或 $-1 < \frac{t-1}{4} < 0$, 解得 $3 < t < 5$ 或 $-3 < t < 1$. 故选 BD.

4. $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 解析: 当 $x > 0$ 时, 由 $f(x) = \cos x > 0$, 得不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. 当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) = \cos x < 0$, 得不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为 $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. 综上, 不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

5. 解: 首先作出 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 的图象, 然后再

作出 $y = \frac{1-a}{2}$ 的图象, 如图所示.



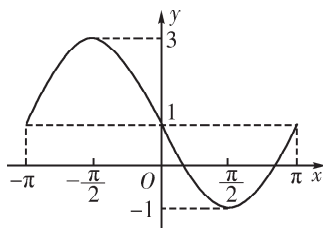
由图象知, 如果 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 与 $y = \frac{1-a}{2}$ 的图象有两个交点, 那么方程 $\sin x = \frac{1-a}{2}, x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 就有两个不相等的实数根.

此时 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1-a}{2} < 1$, 即 $-1 < a \leq 1 - \sqrt{3}$.

6. 解: 列表如下:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0
$1 - 2\sin x$	1	3	1	-1	1

描点, 并将它们用光滑的曲线连接起来, 如图所示.



(1) 由图象可知, 图象在直线 $y = 1$ 上方部分时, $y > 1$; 在直线 $y = 1$ 下方部分时, $y < 1$.

所以①当 $x \in (-\pi, 0)$ 时, $y > 1$;

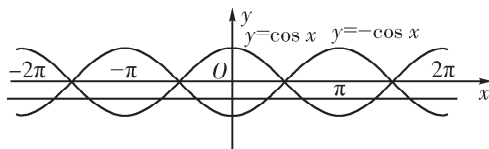
②当 $x \in (0, \pi)$ 时, $y < 1$.

(2) 如图所示, 当直线 $y = a$ 与 $y = 1 - 2\sin x, x \in [-\pi, \pi]$ 的图象有两个交点时, $1 < a < 3$ 或 $-1 < a < 1$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

易错辨析

C 解析: 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = \cos x$ 与函数 $y = -\cos x$ 的简图, 如图所示. 易知选 C.



小测试(四十五) 正弦函数、余弦函数的性质(一)

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

2. D

基础过关

1. BCD 解析: 对于 A, $\because \cos \left[4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos(4x + 2\pi) = \cos 4x, \therefore T = \frac{\pi}{2}$. 对于 B, $\because \sin \left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin(\pi + 2x) = -\sin 2x, \therefore T \neq \frac{\pi}{2}$. 同理可知 C, D 的周期均不是 $\frac{\pi}{2}$.

2. C 解析: ①③④是奇函数. 故选 C.

3. B 解析: 由 $f(-x) = f(x)$, 知 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 排除 A, C. 由 $f(x+2) = f(x)$, 知 $f(x)$ 的周期为 2, 排除 D. 故选 B.

4. A 解析: 因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 且最小正周期为 2π 的函数, 所以 $f\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = f\left(-4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. ABD 解析: 因为函数图象关于 y 轴对称, 所以是偶函数. 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 对 k 赋值可得解.

6. π 解析: 函数 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

7. $f(x) = -\cos x - \sin x$ 解析: 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x) = -\cos x - \sin x$, 即当 $x < 0$ 时, $f(x) = -\cos x - \sin x$.

8. 解: $x \in \left[-\frac{5}{2}\pi, 3\pi\right]$ 时, $3\pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = 1 - \sin x$,

所以 $f(3\pi - x) = 1 - \sin(3\pi - x) = 1 - \sin x$.

又因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数,

所以 $f(3\pi - x) = f(-x) = f(x)$.

所以 $x \in \left[-\frac{5}{2}\pi, 3\pi\right]$ 时, $f(x)$ 的解析式为 $f(x) =$

$$1 - \sin x.$$

素养提升

1. D 解析: $\because T = \frac{2\pi}{k} = \frac{8\pi}{k} \leq 2, \therefore k \geq 4\pi. \therefore$ 正整数 k

的最小值是 13.

2. BC 解析: 当 $\varphi = 0$ 时, $f(x) = \sin x$ 是奇函数. 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = \cos x$ 是偶函数. 故 B, C 正确.

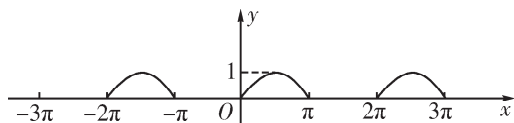
3. ABD 解析: 函数 $y = f(x) = x \cos x - \sin x$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 即该函数为奇函数, 图象关于原点对称, 故 B 不可能; 当 $x = \pi$ 时, $y = f(\pi) = \pi \cos \pi - \sin \pi = -\pi < 0$, 故 A 不可能; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = -1 < 0$, 故 D 不可能.

4. $\sqrt{2} + 1$ 解析: 由题意知 $f(1) + f(2) + \dots + f(8) = 0, f(9) + f(10) + \dots + f(16) = 0$. 依此循环, $f(1) + f(2) + \dots + f(100) = 0 + f(97) + f(98) + f(99) + f(100) = \sqrt{2} + 1$.

5. 解: (1) $y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} |\sin x| =$

$$\begin{cases} \sin x, & x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbf{Z}), \\ 0, & x \in [2k\pi - \pi, 2k\pi) (k \in \mathbf{Z}), \end{cases}$$

画出函数简图如图所示.



(2) 由图象知该函数是周期函数, 且最小正周期是 2π .

6. 解: $\because$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)},$
 $\therefore f(x+4) = f(x)$, 即 4 是 $f(x) (x \geq 0)$ 的一个周期.

$$\therefore f(2 \ 023) = f(3) = \log_2 4 = 2.$$

$$\text{又 } f(-2 \ 021) = f(2 \ 021) = f(1) = \log_2 2 = 1,$$

$$\therefore f(-2 \ 021) + f(2 \ 023) = 1 + 2 = 3.$$

易错辨析

1. ± 3 解析: $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3}, \therefore |a| = 3, \therefore a = \pm 3.$

2. D 解析: 由题意, 知 $\sin x \neq 1$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 不关于原点对称. $\therefore f(x)$ 是非奇非偶函数.

小测试(四十六) 正弦函数、余弦函数的性质(二)

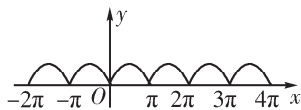
预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. $\left\{x \mid x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

基础过关

1. C 解析: 画出 $y = |\sin x|$ 的图象, 如图所示. 由图即可求解. 故选 C.



2. B 解析: $\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$

$$\therefore \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]. \therefore f(x)_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 故}$$

选 B.

3. D 解析: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$

$$2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in$$

$\mathbf{Z}$. 又 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore$ 减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. 故选 D.

4. D 解析: 易知函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数.

$$\text{因为 } \pi - 2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \pi - 3 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\pi - 3 < 1 < \pi - 2, \text{ 所以 } f(\pi - 3) < f(1) < f(\pi - 2),$$

$$\text{即 } f(3) < f(1) < f(2), c < a < b. \text{ 故选 D.}$$

5. ABD 解析: 周期是 π 的只有 B, C, $y = \cos\left(2x +$

$$\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{当 } x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 因此 C}$$

是增函数, B 是减函数, 故选 ABD.

6. -1 或 3 1 或 -3 解析: 由题意知

$$\begin{cases} a+b=1, \\ -a+b=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a+b=-3, \\ -a+b=1. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-2, \\ b=-1. \end{cases}$$

故函数 $g(x) = -\sin x + a$ 的最大值为

$a+1$, 即最大值为 3 或 -1, 函数 $g(x) = -\sin x + a$ 的最小值为 $a-1$, 即最小值为 1 或 -3.

7. $\left[\frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{4}\right]$ 解析: 由 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 知, 当

$$x \in [0, \pi] \text{ 时, } f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \text{ 和 } \left[\frac{5\pi}{8}, \pi\right] \text{ 上单调递}$$

增. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{m}{2}\right]$ 和 $[3m, \pi]$ 上均单调递

$$\text{增, } \therefore \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} \leq \frac{\pi}{8}, \\ \frac{5\pi}{8} \leq 3m < \pi, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{5\pi}{24} \leq m \leq \frac{\pi}{4}. \therefore \text{实数 } m \text{ 的}$$

取值范围为 $\left[\frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{4}\right]$.

8. 解: (1) $y = f(x) = 1 - 2a - 2a\cos x - 2(1 - \cos^2 x)$,

令 $t = \cos x$, 则 $y = 2t^2 - 2at - 2a - 1, t \in [-1, 1]$.

当 $\frac{a}{2} < -1$, 即 $a < -2$ 时, $y_{\min} = f(-1) = 1$;

当 $-1 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, 即 $-2 \leq a \leq 2$ 时,

$$y_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} - 2a - 1;$$

当 $\frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2$ 时, $y_{\min} = f(1) = -4a + 1$.

$$\text{故 } g(a) = \begin{cases} 1, & a < -2, \\ -\frac{a^2}{2} - 2a - 1, & -2 \leq a \leq 2, \\ -4a + 1, & a > 2. \end{cases}$$

(2) 由 $g(a) = \frac{1}{2}$, 得 $a = -1$.

此时 $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x + 1$.

当 $\cos x = 1$ 时, $f(x)_{\max} = 5$, 此时 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

素养提升

1. C 解析: $\therefore$ 直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称

轴, $\therefore -\frac{\pi}{4}\omega + \varphi = k_1\pi - \frac{\pi}{2} (k_1 \in \mathbf{Z})$. ① 又 $\therefore$ 点

$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心, $\therefore \frac{\pi}{4}\omega + \varphi =$

$k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$. ② $\therefore$ ② - ① 得, $\omega = 2(k_2 - k_1) + 1$.

$\therefore k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \omega > 0, \therefore \omega = 2k + 1 (k \in \mathbf{N})$. 故选 C.

2. C 解析: $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \pi x\right) = \sin \pi x, x \in$

$\left[\frac{5}{6}, t\right) (t > \frac{5}{6})$, 则 $\pi x \in \left[\frac{5}{6}\pi, \pi t\right) (t > \frac{5}{6})$.

$\therefore$ 函数有最小值也有最大值, $\therefore \frac{3\pi}{2} < \pi t \leq \frac{13\pi}{6}$ 或

$\pi t > \frac{5\pi}{2}$, 解得 $\frac{3}{2} < t \leq \frac{13}{6}$ 或 $t > \frac{5}{2}$, 故选 C.

3. ABC 解析: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对

称. $f(-x) = \sin[\cos(-x)] = \sin(\cos x) = f(x)$, 则

函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 A 正确; $f(x + 2\pi) =$

$\sin[\cos(x + 2\pi)] = \sin(\cos x) = f(x)$, 则函数 $f(x)$

的一个周期为 2π , 故 B 正确; 令 $t = \cos x, t \in [-1,$

$1]$, 则 $f(x) = \sin t$. 由于函数 $y = \sin t$ 在区间 $[-1,$

$1]$ 上单调递增, 则 $\sin(-1) \leq f(x) \leq \sin 1 \Rightarrow$

$-\sin 1 \leq f(x) \leq \sin 1$, 故 C 正确; 当 $x \in [0, \pi]$ 时,

函数 $t = \cos x$ 为减函数. 由于 $t = \cos x \in [-1, 1]$,

则函数 $y = \sin t$ 在区间 $[-1, 1]$ 上为增函数. 所以函

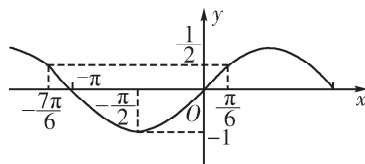
数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上单调递减, 故 D 错误.

4. 2π 解析: 由图可知, 当值域为 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 时, $b - a$

的最大值为 $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{4\pi}{3}$. $b - a$ 的最小值为

$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. $\therefore b - a$ 的最大值与最小值之和

为 $\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$.



5. 解: (1) 因为 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 最大值为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时, $0 \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$.

当 $0 \leq 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 单调

递增.

当 $\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$, 即 $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 单调

递减.

综上所述, $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增; 在

$\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

6. 解: (1) 因为函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴的任意两

个相邻交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以函数的周期 $T = \pi$.

所以 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

(2) 因为直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对

称轴,

所以 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

即 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

所以函数 $f(x)$ 的解析式是 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$,

解得 $x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

(3) 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$,

所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$,

即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

易错辨析

$$\left[-4\pi, -\frac{5\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$$

解析: $y = 1 + \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$. 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $4k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 4k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 又 $\because x \in$

$[-4\pi, 4\pi]$, $\therefore$ 函数 $y = 1 + \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间为 $\left[-4\pi, -\frac{5\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$.

小测试(四十七) 正切函数的性质与图象

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

基础过关

1. D **解析:** $f(-x) = |\tan(-2x)| = |\tan 2x| = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数, 最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$.

2. A **解析:** 当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $y = 0$, 排除 C, D; 当 $x = 0$ 时,

$y = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, 排除 B. 故选 A.

3. C **解析:** 由题可知, $\begin{cases} 1 - \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k\pi < x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases}$$

解得 $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

4. D **解析:** 由已知, 得 $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得

$\varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$. 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以

$f(x) = -2\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 令 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{3} <$

$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$. 当 $k = 0$ 时, 得 $f(x)$ 的一个单调递

减区间为 $\left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$.

5. A **解析:** 在 $y = \sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 中, 令 $x = 0$, 得

$y = \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6} = 1$, 故 $OD = 1$. 又函数 $y = \sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以 $EF = \frac{\pi}{2}$. 所以

$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot OD = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{4}$. 故选 A.

6. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ **解析:** $\because -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$,

且 $x \neq 0$, $\therefore \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{3\pi}{4}$, 且 $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2}$. 由 $y =$

$\tan x$ 的图象, 知 $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 的值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

7. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ **解析:** 根据题意可知 $\omega > 0$, 又函数 $y =$

$\tan \omega x (\omega > 0)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上是单调递增函数, $\therefore k\pi -$

$\frac{\pi}{2} \leq \omega \cdot (-\pi)$, 且 $\omega \cdot \pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 解得 $\omega \leq$

$\frac{1}{2} - k$, 且 $\omega \leq \frac{1}{2} + k, k \in \mathbf{Z}$. $\therefore \omega \leq \frac{1}{2}$, 即 ω 的取值

范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

8. **解:** $\because -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore -1 \leq \tan x \leq 1$.

令 $\tan x = t$, 则 $t \in [-1, 1]$.

$\therefore y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$.

$\therefore$ 当 $t = -1$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $y_{\min} = -4$.

当 $t = 1$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $y_{\max} = 4$.

故所求函数的值域为 $[-4, 4]$.

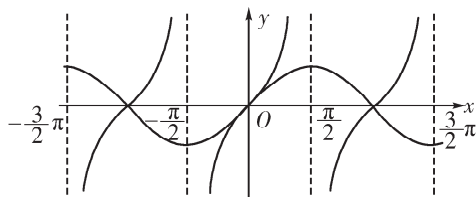
素养提升

1. A **解析:** 由 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得

$k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $f(x)$ 在 $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$ 上是增函数, 且周期为 π . $\therefore f(1) = f(1 - \pi)$, $-\frac{3}{4}\pi < 1 - \pi < -1 < 0 < \frac{\pi}{4}$, $\therefore f(1 - \pi) < f(-1) < f(0)$, 即 $f(0) > f(-1) > f(1)$.

2. B 解析: $\because$ 函数 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$, 即 $a x \tan x - x \cos x = -a x \tan x - x \cos x$, 解得 $a = 0$. $\therefore f(x) = x \cos x$, $\therefore f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. 故选 B.

3. C 解析: 在同一平面直角坐标系中, 作出 $y = \sin x$ 与 $y = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的图象, 再利用对称性作出 $x \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 的两函数的图象 (注意正切函数的定义域), 如图所示. 由图象可知它们有 3 个交点.



4. $\sqrt{3}$ 解析: 由已知得 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2$. 因为

$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$. 故 $f(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{6})$, 则 $f(\frac{\pi}{12}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

5. 解: (1) 当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x) = x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 1 = (x - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 - \frac{4}{3}$, $x \in [-1, \sqrt{3}]$.

所以当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{4}{3}$.

当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 函数 $f(x) = (x + \tan \theta)^2 - 1 - \tan^2 \theta$ 的图象的对称轴为 $x = -\tan \theta$.

因为 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, \sqrt{3}]$ 上单调,

所以 $-\tan \theta \leq -1$ 或 $-\tan \theta \geq \sqrt{3}$,

即 $\tan \theta \geq 1$ 或 $\tan \theta \leq -\sqrt{3}$.

又 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

所以 θ 的取值范围是 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

6. 解: 存在. 因为 $y = \tan \theta$ 在区间 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 上是单调递增的, 所以 $a < 0$.

又 $x \in (\frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi)$, 所以 $-ax \in (-\frac{a}{8}\pi, -\frac{5a}{8}\pi)$.

所以 $\frac{\pi}{4} - ax \in (\frac{\pi}{4} - \frac{a}{8}\pi, \frac{\pi}{4} - \frac{5a}{8}\pi)$,

所以 $\begin{cases} k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \frac{a}{8}\pi (k \in \mathbf{Z}), \\ k\pi + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{4} - \frac{5a}{8}\pi (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$

解得 $-\frac{2}{5} - \frac{8k}{5} \leq a \leq 6 - 8k (k \in \mathbf{Z})$.

令 $-\frac{2}{5} - \frac{8}{5}k = 6 - 8k$, 解得 $k = 1$.

此时 $-2 \leq a \leq -2$,

所以 $a = -2 < 0$, 所以存在 $a = -2 \in \mathbf{Z}$, 满足题意.

易错辨析

1. C 解析: 函数 $y = \tan x$ 的图象的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbf{Z}$. 令 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$. 所以函数 $y = 3\tan(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$ 的图象的对称中心是 $(k\pi - \frac{2\pi}{3}, 0), k \in \mathbf{Z}$. 令 $k = 0$, 得 $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$.

2. A 解析: 由 $k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $2k - \frac{3}{2} < x < 2k + \frac{1}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k - \frac{3}{2}, 2k + \frac{1}{2}) (k \in \mathbf{Z})$.

滚动卷(五) 小测试(三十七)至(四十七)

综合拔高

1. BD 解析: 对于 A 选项, 函数 $y = \tan x$ 为奇函数, 不符合题意. 对于 B 选项, 函数 $y = |\sin x|$ 是最小正周期为 π 的偶函数, 符合题意. 对于 C 选项, 函数 $y = 2\cos x$ 的最小正周期为 2π , 不符合题意. 对于 D 选项, 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos 2x$, 是最小正周期为 π 的偶函数, 符合题意. 故选 BD.

2. B 解析: 因为 $f(-x) = (1 - \frac{2}{1+2^{-x}})\tan(-x) = -(1 - \frac{2 \cdot 2^x}{1+2^x}) \cdot \tan x = -(\frac{1-2^x}{1+2^x})\tan x = f(x)$, 所以 $y = f(x)$ 是偶函数. 故选 B.

3. B 解析: 因为 $|OP| = \sqrt{3+y^2}$ (O 为坐标原点), 故

由正弦函数的定义可得 $\frac{y}{\sqrt{3+y^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$. 解得 $y =$

$\frac{1}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}$ (舍去). 所以 $\tan \beta = \frac{\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. 所

以 $\frac{2\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta} = \frac{2\tan^2 \beta}{\tan^2 \beta - 1} = \frac{2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 1} =$

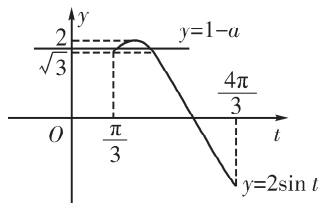
$-\frac{2}{11}$, 故选 B.

4. C 解析: $\because \sin 168^\circ = \sin(180^\circ - 12^\circ) = \sin 12^\circ$,
 $\cos 10^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin 80^\circ$. 又 $\because y = \sin x$ 在
 $x \in [0^\circ, 90^\circ]$ 上是增函数, $\therefore \sin 11^\circ < \sin 12^\circ <$
 $\sin 80^\circ$, 即 $\sin 11^\circ < \sin 168^\circ < \cos 10^\circ$. 故选 C.

5. B 解析: 因为 $\omega > 0$, 所以当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\omega x -$
 $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$. 因为函数 $f(x) =$
 $\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$), $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的值域是
 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$, 解得 $\frac{3}{2} \leq \omega \leq$
 3 , 故选 B.

6. 2 解析: 由题意, 得 $f(x_1)$ 是函数的最小值, $f(x_2)$
是函数的最大值, 故 $|x_1 - x_2|$ 的最小值等于函数的
半个周期. 又 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, 所以 $|x_1 - x_2|_{\min} = 2$.

7. $(-1, 1 - \sqrt{3}]$ 解析: 由题意, 知 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
的图象与直线 $y = 1 - a$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个不同的交
点. $\because x \in [0, \pi]$, $\therefore t = x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. $\therefore$ 函数
 $y = 2\sin t$ 的图象和直线 $y = 1 - a$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 有两
个不同的交点, 如图所示. 结合图象可知 $\sqrt{3} \leq$
 $1 - a < 2$, 即 $-1 < a \leq 1 - \sqrt{3}$.



8. 解: (1) 因为 $f(0) = \sqrt{3}$,

所以 $f(0) = 2\sin\left(\frac{1}{2} \times 0 + \varphi\right) = \sqrt{3}$.

所以 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

(2) 因为 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$.

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$,

则 $-\sqrt{3} \leq 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$.

故 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最大值为 2, 最小值为 $-\sqrt{3}$.

9. 解: (1) $f(x) = \frac{(-\cos x)(-\sin x)\tan x(-\sin x)}{(-\sin x)\sin x} =$
 $\sin x$.

$f\left(-\frac{22\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{22\pi}{3}\right) = -\sin\left(6\pi + \frac{4\pi}{3}\right) =$
 $-\sin \frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\because f(x) = \sin x$,

$\therefore g(x) = 1 - 2\sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$\therefore g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 单调递增
区间为 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$\because -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}, \therefore -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$.

$\therefore -1 \leq 1 - 2\sin x \leq 2$.

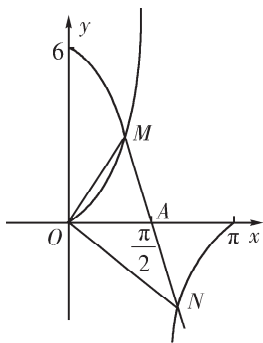
$\therefore g(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$.

素养提升

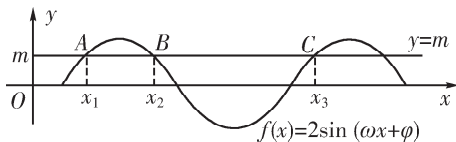
1. C 解析: $y = \cos x \cdot |\tan x| =$
 $\begin{cases} \sin x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi \leq x < \frac{3\pi}{2}, \\ -\sin x, \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$ 故选 C.

2. A 解析: 由诱导公式, 得 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} -$
 $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 则 $f(x) = \frac{1}{5}\sin\left(x +$
 $\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{6}{5}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 所以函数
 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{6}{5}$. 故选 A.

3. D 解析: 由 $6\cos x = \sqrt{3}\tan x = \sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x}$, 得 $6\cos^2 x = \sqrt{3}\sin x = 6 - 6\sin^2 x$, 即 $6\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 6 = 0$, 解得 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (舍). 又因为 $0 < x < \pi$, 所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $x = \frac{2\pi}{3}$. 不妨取 $M(\frac{\pi}{3}, 3)$, $N(\frac{2\pi}{3}, -3)$, 即 M, N 两点关于点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称, 如图所示, 则 $\triangle MON$ 的面积 $S = 2S_{\triangle OAM} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 3 = \frac{3\pi}{2}$, 故选 D.



4. 3 解析: 作出示意图如图所示.



- 由 $2|AB| = |BC| = \frac{2\pi}{3}$, 则 $|AB| = \frac{\pi}{3}$, 则 $|AC| = \pi$. 故 $f(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$. 得 $\omega = 2$, 即 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 且 $2\sin(2x_1 + \varphi) = 2\sin(2x_2 + \varphi)$, 可得 $(2x_1 + \varphi) + (2x_2 + \varphi) = \pi$, 且 $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{3}$, 得 $2x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}$. 则 $2\sin \frac{\pi}{6} = m$, 得 $m = 1$. 则 $\omega + m = 3$.
5. 解: (1) 由题意知, 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$. 因为 $\omega > 0$, 所以 $\omega = 2$. 所以 $f(x) = \tan(2x + \varphi)$. 因为函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $M(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 对称, 所以 $2 \times (-\frac{\pi}{8}) + \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

故 $f(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$.

(2) 令 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

得 $-\frac{3\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

即 $-\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}), k \in \mathbf{Z}$, 无单调递减区间.

(3) 由(1)知, $f(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$.

由 $-1 \leq \tan(2x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{3}$,

得 $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

即 $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

所以不等式 $-1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ 的解集为 $\{x \mid -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

6. 解: (1) 设花坛的面积为 $S \text{ m}^2$,

则 $S = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2} \pi$.

所以花坛的面积为 $\frac{9}{2} \pi \text{ m}^2$.

(2) 由题意知, $\widehat{AB}$ 的长为 $r_1\theta \text{ m}$, $\widehat{CD}$ 的长为 $r_2\theta \text{ m}$, 线段 AD 的长为 $(r_2 - r_1) \text{ m}$.

$60 \times 2(r_2 - r_1) + 90(r_1\theta + r_2\theta) = 1200$,

即 $4(r_2 - r_1) + 3(r_2\theta + r_1\theta) = 40$. (*)

$S = \frac{1}{2}r_2^2\theta - \frac{1}{2}r_1^2\theta = \frac{1}{2}(r_2\theta + r_1\theta)(r_2 - r_1)$,

由(*)式知, $r_2\theta + r_1\theta = \frac{40}{3} - \frac{4}{3}(r_2 - r_1)$.

记 $r_2 - r_1 = x$, 则 $0 < x < 10$.

所以 $S = \frac{1}{2}(\frac{40}{3} - \frac{4}{3}x)x = -\frac{2}{3}(x-5)^2 + \frac{50}{3}, x \in$

$(0, 10)$,

当 $x = 5$ 时, S 取得最大值, 即 $r_2 - r_1 = 5$ 时, 花坛的面积最大.

故当线段 AD 的长为 5 m 时, 花坛的面积最大.

小测试(四十八) 两角差的余弦公式

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$ (4) $\times$

2. B 3. $\frac{1}{2}$

基础过关

1. C 解析: $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} =$
 $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} = \cos \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \right) =$
 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2. A 解析: $\because \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \therefore \sin \alpha =$
 $\frac{4}{5}. \therefore \sin \beta = -\frac{12}{13}, \beta$ 是第三象限角, $\therefore \cos \beta =$
 $-\frac{5}{13}. \therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = -\frac{5}{13} \times$
 $\left(-\frac{3}{5} \right) + \left(-\frac{12}{13} \right) \times \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}.$

3. BC 解析: 由 $\sin \alpha \sin \beta = -\cos \alpha \cos \beta$, 得 $\cos(\alpha - \beta) =$
 0 , 因此 $\alpha - \beta = k \cdot 180^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$, B, C 项符合.

4. A 解析: $\because \alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3} \right), \therefore \alpha + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi \right),$
 $\therefore \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{14} \right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}, \therefore \cos \alpha =$
 $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{7}.$

5. A 解析: 因为 α, β 为锐角, $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos(\alpha + \beta) =$
 $-\frac{5}{13}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$. 所以
 $\cos(2\pi - \beta) = \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cdot$
 $\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = \left(-\frac{5}{13} \right) \times \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \times$
 $\frac{4}{5} = \frac{33}{65}.$

6. $\frac{1}{2}$ 解析: 原式 $= \cos[(\alpha - 35^\circ) - (\alpha + 25^\circ)] =$
 $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

7. $-\frac{7}{9}$ 解析: 因为 α 和 β 的终边关于 y 轴对称, 所以
 $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 那么 $\sin \beta = \sin \alpha = \frac{1}{3},$
 $\cos \alpha = -\cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (或 $\cos \beta = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$), 故
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times$
 $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{7}{9}.$

8. 解: (1) $\because \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \frac{\sqrt{10}}{5},$

$$\therefore 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}.$$

(2) $\because \cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}, \alpha, \beta$ 均为锐角,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{4}{5}, \sin(\alpha - \beta) = \pm \frac{3}{5}.$$

当 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$ 时, $\cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] =$

$$\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times$$

 $\frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$

当 $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{3}{5}$ 时, $\cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] =$

$$\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times$$

 $\left(-\frac{3}{5} \right) = 0.$

$\because \beta$ 为锐角, $\therefore \cos \beta = 0$ 舍去, 则 $\cos \beta = \frac{24}{25}.$

素养提升

1. AC 解析: $\because \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin \frac{\pi}{6} \sin x +$
 $\cos \frac{\pi}{6} \cos x = \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos(x + \varphi), \therefore \varphi =$
 $2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}),$ 令 $k=0$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 令 $k=1$, 则
 $\varphi = \frac{11}{6}\pi$. 故选 AC.

2. C 解析: 由已知, 得 $-\sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta$, ①
 $-\cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta$, ② ①² + ②², 得 $1 = 1 + 1 +$
 $2\sin \alpha \sin \beta + 2\cos \alpha \cos \beta$, 化简得 $\cos \alpha \cos \beta +$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}$, 即 $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$, 故选 C.

3. A 解析: 设大的正方形的边长为 1, 由于小正方形
 与大正方形面积之比为 $4:9$, 所以小正方形的边长
 为 $\frac{2}{3}$, 可得 $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{2}{3}$, ① $\sin \beta - \cos \beta = \frac{2}{3}$, ②

由图可得: $\cos \alpha = \sin \beta, \sin \alpha = \cos \beta$, ① $\times$ ②, 得 $\frac{4}{9} =$

$$\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$$

 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos(\alpha - \beta) = 1 - \cos(\alpha - \beta),$ 解得

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{9}.$$

4. $\sqrt{3}$ 解析: 原式 $= \frac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$

$$\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}.$$

5. 解: (1) $\because \alpha$ 为锐角, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\therefore \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}.$$

(2) $\because \alpha, \beta$ 均为锐角, $\therefore \alpha + \beta \in (0, \pi)$.

$$\text{由 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}, \text{ 得}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha +$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = \frac{4}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{8\sqrt{2} + 3}{15}.$$

6. 解: (1) 因为 $f(x) = -\cos 2x \cos \frac{5\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{9\pi}{4} =$

$$\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$(2) \text{ 因为 } f(\alpha) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \text{ 且 } f(\beta) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\cos\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{又 } \frac{\pi}{8} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } 2\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right), 2\beta - \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{所以 } \cos(2\beta - 2\alpha) = \cos\left[\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right) - \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} +$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } \frac{\pi}{8} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } 0 < 2\beta - 2\alpha < \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{所以 } 2\beta - 2\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

易错辨析

1. $\frac{\pi}{3}$ 解析: 因为 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$$\text{因为 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{因为 } \cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}, \text{ 且 } 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } 0 < \alpha -$$

$$\beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{所以 } \cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) +$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{7} \times \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}. \text{ 因为}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \beta = \frac{\pi}{3}.$$

2. C 解析: 根据题意, 得 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right), \frac{\pi}{4} -$

$$\frac{\beta}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ 所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

小测试(四十九) 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(一)

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$ (4) $\checkmark$

2. B 3. D

基础过关

1. D 解析: $\sin 40^\circ \cos 10^\circ - \sin 130^\circ \sin 10^\circ = \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 50^\circ \sin 10^\circ = \cos(50^\circ + 10^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. 故选 D.

2. C 解析: $\sqrt{3} \sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \sqrt{3} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = 2 \sin(15^\circ + 30^\circ) = 2 \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. 故选 C.

3. B 解析: 由已知, 得 $\frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$. 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

4. C 解析: $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos \beta = \frac{\sqrt{21}}{14}, \alpha, \beta$ 均为锐角,

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \sin \beta =$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{5\sqrt{7}}{14}. \therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta -$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{7} \times \frac{\sqrt{21}}{14} - \frac{2\sqrt{7}}{7} \times \frac{5\sqrt{7}}{14} = -\frac{1}{2}.$$

$\because \sin \alpha < \sin \beta$ 且 α, β 均为锐角, $\therefore 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0, \therefore \alpha - \beta = -\frac{\pi}{6}.$$

5. B 解析: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$, $\therefore \tan B =$

$$\frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)} = \frac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{\sin(B+C) + \sin(C-B)} =$$

$$\frac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{2 \cos B \sin C}, \quad \text{即} \quad \frac{\sin B}{\cos B} =$$

$$\frac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{2 \cos B \sin C}, \text{化简得 } \cos(B+C) = 0, \text{即}$$

$$\cos(\pi - A) = 0, \therefore \cos A = 0. \because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{2}.$$

$\because$ 不能判断 B 是否等于 C , $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

6. $\frac{4+\sqrt{2}}{6} \quad \frac{2\sqrt{6}-1}{6}$ 解析: 因为 $\cos \theta = \frac{1}{3}$

$(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4+\sqrt{2}}{6}, \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{6} -$$

$$\cos \theta \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}-1}{6}.$$

7. $\sqrt{2}$ 解析: 由韦达定理, 知 $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{12}$, 所以

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sqrt{3} \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sqrt{3} \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cdot$$

$$\sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \sqrt{3} \sin(\alpha + \beta) = 2 \left[\frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha + \beta) \right] = 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - (\alpha + \beta) \right] = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} +$$

$$\frac{\pi}{12} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

8. 解: (1) 因为 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{所以 } \alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{因为 } \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{10}}{10} > 0, \text{所以 } 0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{因为 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\cos(2\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) -$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$(2) \cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) +$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又因为 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{所以 } \beta = \frac{\pi}{4}.$$

素养提升

1. D 解析: 原式 $= \sin(\theta + 15^\circ + 60^\circ) + \cos(\theta + 15^\circ +$

$$30^\circ) - \sqrt{3} \cos(\theta + 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin(\theta + 15^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta +$$

$$15^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta + 15^\circ) - \frac{1}{2} \sin(\theta + 15^\circ) - \sqrt{3} \cos(\theta +$$

$$15^\circ) = 0.$$

2. C 解析: 由 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$. 则 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$, 得

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha, \text{即 } \sin(\alpha - \beta) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \text{又 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{故 } \alpha - \beta =$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha, \text{即 } 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}.$$

3. A 解析: 将 $\sin \alpha + 2\cos \beta = 1, \cos \alpha - 2\sin \beta = \sqrt{2}$ 两个等式两边分别平方再相加, 得 $5 + 4\sin(\alpha - \beta) = 3$.

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}. \because -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \therefore \alpha -$$

$$\beta = -\frac{\pi}{6}, \text{即 } \alpha = \beta - \frac{\pi}{6}. \text{代入 } \sin \alpha + 2\cos \beta = 1, \text{得}$$

$$\sqrt{3} \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = 1, \text{即 } \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. $-\frac{4}{5}$ 解析: $\sin \alpha + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha + \cos \alpha \cdot$

$$\cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha =$$

$$\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{3} \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \cdot$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{5}. \text{所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\frac{4}{5}. \text{所以 } \sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4}{5}.$$

5. 解: 因为 $f\left(4\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{30}{17}$,

$$\text{所以 } 2\cos\left[\frac{1}{4}\left(4\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\alpha=-\frac{30}{17},$$

$$\text{所以 } \sin\alpha=\frac{15}{17}.$$

$$\text{又因为 } f\left(4\beta-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{8}{5},$$

$$\text{所以 } 2\cos\left[\frac{1}{4}\left(4\beta-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\beta=\frac{8}{5},$$

$$\text{所以 } \cos\beta=\frac{4}{5}.$$

$$\text{又因为 } \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以 } \cos\alpha=\frac{8}{17}, \sin\beta=\frac{3}{5}.$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{8}{17}\times\frac{4}{5}-$$

$$\frac{15}{17}\times\frac{3}{5}=-\frac{13}{85}.$$

6. 解: (1) 由 $A\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), B\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$, 得 $\cos\alpha=$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}, \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\beta=-\frac{7\sqrt{2}}{10}, \sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$\text{则 } \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times$$

$$\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}=-\frac{9\sqrt{10}}{50}.$$

(2) 由已知, 得 $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-$

$$\sin\alpha\sin\alpha=-\frac{3}{5},$$

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

$$\because \cos 2\alpha < 0, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore 2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

$$\because \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right), \therefore 2\alpha-\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\because \sin(2\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times$$

$$\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 2\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}.$$

易错辨析

1. B 解析: $\sin 163^\circ \sin 223^\circ + \sin 253^\circ \sin 313^\circ = \sin 163^\circ \sin 223^\circ + \cos 163^\circ \cos 223^\circ = \cos(163^\circ - 223^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

2. B 解析: 由 $\sin x - \sin y = -\frac{2}{3}, \cos x - \cos y = \frac{2}{3},$

$$\text{两式分别平方相加, 得 } 2 - 2\cos(x-y) = \frac{8}{9}, \text{ 即}$$

$$\cos(x-y) = \frac{5}{9}. \because \sin x - \sin y < 0 \Rightarrow \sin x < \sin y,$$

$$\text{又 } x, y \text{ 为锐角, } \therefore x < y. \therefore \sin(x-y) =$$

$$-\sqrt{1-\cos(x-y)^2} = -\frac{2\sqrt{14}}{9}, \therefore \tan(x-y) =$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{-\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = -\frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

小测试(五十) 两角和与差的正弦、余弦、正切公式(二)

预习自评

1. C 2. D 3. 3

基础过关

1. A 解析: $\because \tan\alpha=3, \tan\beta=5, \therefore \tan(\alpha-\beta) =$

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{3-5}{1+3\times 5} = -\frac{1}{8}. \text{ 故选 A.}$$

2. A 解析: $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 15^\circ} =$

$$\tan(45^\circ - 15^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. A 解析: 根据题意, 得 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3},$ 又

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \tan\alpha = -7.$$

4. B 解析: 由题, 得 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -1,$

$$\text{所以 } \tan\alpha + \tan\beta = -1 + \tan\alpha\tan\beta, \text{ 所以 } (1 - \tan\alpha) \cdot (1 - \tan\beta) = 1 - \tan\alpha - \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = 2.$$

5. A 解析: 因为 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),$ 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right). \text{ 因为 } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -3. \text{ 所以}$$

$$\tan\theta = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{-3-1}{1-3}=2. \text{ 故选 A.}$$

6. $\frac{\pi}{3}$ 解析: 依题意有 $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\sqrt{3},$ 即

$$\tan(A+B) = -\sqrt{3}. \text{ 又因为 } 0 < A+B < \pi, \text{ 所以 } A+B = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } C = \pi - A - B = \frac{\pi}{3}.$$

7. $-\frac{3}{4}$ 解析: $\tan 2\beta = \tan [(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{1 - 7}{1 + 1 \times 7} = -\frac{3}{4}$.

8. -1 解析: 因为 $\tan 18^\circ + \tan 42^\circ + \tan 120^\circ = \tan 60^\circ(1 - \tan 18^\circ \tan 42^\circ) + \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ \cdot \tan 18^\circ \tan 42^\circ$, 所以原式 $= -1$.

9. 解: (1) 因为 $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$,

所以 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$.

因为 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{5\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + 2}{5 - \tan \alpha}$,

所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{-\frac{1}{3} + 2}{5 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{16}$.

(2) 因为 $\tan \beta = \tan [(\alpha + \beta) - \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan \alpha}$,

所以 $\tan \beta = \frac{\frac{5}{16} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{5}{16} \times (-\frac{1}{3})} = \frac{31}{43}$.

素养提升

1. B 解析: 由韦达定理, 得 $\tan \alpha + \tan \beta = -3\sqrt{3}$, $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 4$, $\therefore \tan \alpha < 0, \tan \beta < 0$, $\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-3\sqrt{3}}{1 - 4} = \sqrt{3}$. 又 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan \alpha < 0, \tan \beta < 0$, $\therefore -\pi < \alpha + \beta < 0$, $\therefore \alpha + \beta = -\frac{2\pi}{3}$.

2. CD 解析: $\because C = 120^\circ, \therefore A + B = 60^\circ, \therefore 2(A + B) = C, \therefore \tan(A + B) = \sqrt{3}$, $\therefore$ 选项 A, B 错误;

$\therefore \tan A + \tan B = \sqrt{3}(1 - \tan A \cdot \tan B) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \tan A \cdot \tan B = \frac{1}{3}$, ① 又 $\tan A + \tan B = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, ②

$\therefore$ 联立①②解得 $\tan A = \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore A = B$.

$\therefore \cos B = \sqrt{3} \sin A$, 故选项 C, D 正确.

3. B 解析: 若 $\alpha + \beta = 45^\circ$, 则 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$, 即 $\tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta$, 即 $\tan \alpha(1 + \tan \beta) + \tan \beta + 1 = 2$, 即 $(\tan \alpha + 1)(\tan \beta + 1) = 2$. 故 $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ) = (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 +$

$\tan 43^\circ) \cdots (1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ) = 2^{22}$,

则 $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 45^\circ) = 2^{22} \cdot 2 = 2^{23}$.

4. 1 解析: 原式 $= \tan 10^\circ \tan 20^\circ + \tan 60^\circ(\tan 20^\circ + \tan 10^\circ) = \tan 10^\circ \tan 20^\circ + \sqrt{3} \tan(20^\circ + 10^\circ)(1 - \tan 20^\circ \tan 10^\circ) = \tan 10^\circ \tan 20^\circ + 1 - \tan 20^\circ \cdot \tan 10^\circ = 1$.

5. 解: (1) $\tan(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4})$

$= \tan\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \tan\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\tan\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}$

$= -\sqrt{2}$.

(2) $\tan(\alpha + \beta) = \tan\left[\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$

$= \frac{\tan\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right) + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right)\tan \frac{\pi}{4}}$

$= \frac{-\sqrt{2} + 1}{1 - (-\sqrt{2}) \times 1}$

$= 2\sqrt{2} - 3$.

6. 解: (1) 因为 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \alpha \in (0, \pi)$,

所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2$,

$\tan \beta = \tan[\alpha - (\alpha - \beta)] = \frac{\tan \alpha - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan \alpha \cdot \tan(\alpha - \beta)} =$

$\frac{1}{3}$.

(2) 易知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-2 + \frac{1}{3}}{1 - (-2) \times \frac{1}{3}} =$

-1 ,

因为 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0, \alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

因为 $\tan \beta = \frac{1}{3} > 0, \beta \in (0, \pi)$, 所以 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 即 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

小测试(五十一) 二倍角的正弦、余弦、正切公式

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓ (4)✓

2. (1)1 (2) $-\frac{7}{9}$ (3) $\frac{4}{3}$

基础过关

1. B 解析: 原式 $= (\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}) \cdot (\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}) = -(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. A 解析: 原式 $= \frac{1}{2} \tan 28^\circ \cos 28^\circ = \frac{1}{2} \sin 28^\circ$, 故选 A.

3. D 解析: 由 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{5}$. 故选 D.

4. A 解析: $\because \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{5}, \therefore \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{5}, \therefore \cos x + \sin x = \frac{1}{5}, \therefore 1 + \sin 2x = \frac{1}{25}, \therefore \sin 2x = -\frac{24}{25}$.

5. D 解析: 由题意, 得 $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\alpha) = \cos[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} + 2\alpha)] = \cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha)$. 又由余弦的倍角公式, 得 $\cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{6} - \alpha) = 1 - 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{1}{3}$, 即 $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\alpha) = \frac{1}{3}$.

6. $-\frac{4}{3}$ 解析: 由 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 得 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$. 所以 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3}$.

7. 1 解析: $\frac{\sqrt{1 - 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}}{2 \cos^2 10^\circ - \sqrt{1 - \cos^2 160^\circ} - 1} = \frac{\sqrt{(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)^2}}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = 1$.

8. 解: (1) $f(\pi) = 2 \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -2 \cos \frac{\pi}{6} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

(2) 因为 $f(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = 2 \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -2 \sin \alpha = \frac{6}{5}$, 所以 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

又 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$,

所以 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times (-\frac{3}{5}) \times \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$,

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times (\frac{4}{5})^2 - 1 = \frac{7}{25}$.

所以 $f(2\alpha) = 2 \cos(2\alpha - \frac{\pi}{6})$
 $= 2 \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{6}$
 $= 2 \times \frac{7}{25} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{24}{25}) \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{7\sqrt{3} - 24}{25}$.

素养提升

1. C 解析: 因为 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ 且 α 在第一象限, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. 所以 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}$,

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$. 原式 =

$\frac{1 + \sqrt{2}(\cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4})}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{14}{5}$.

2. A 解析: $\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} - \frac{1}{\sin 170^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} - \frac{1}{\sin(180^\circ - 10^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} - \frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 10^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin(10^\circ - 30^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{-2 \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \times 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{-4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -4$. 故选 A.

3. AD 解析: $\tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin 2\theta}{\cos 2\theta} =$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}. \therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1-m}{n}=\frac{n}{1+m}, \text{ 即 A, D}$$

正确. 选项 B 中, $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{2\sin \theta \cos \theta}{2\cos^2 \theta}=\tan \theta$, 选

项 B 不正确. 同理可得选项 C 错误, 故选 AD.

4.1 解析: 原式 $=\sin 50^\circ\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)$

$$=\sin 50^\circ \cdot \frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ \cos 10^\circ+\cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=1.$$

5. 解: (1) $\because$ 角 α 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$,

$$\therefore \tan \alpha=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

(2) 以角 α 的终边为始边, 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到角 β ,

$$\therefore \beta=\alpha+\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{易得 } \cos \alpha=-\frac{3}{5}, \sin \alpha=\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \sin 2\alpha=2\sin \alpha \cos \alpha=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2 \alpha-1=-\frac{7}{25}.$$

$$\therefore \cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4}-$$

$$\sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)=\frac{17\sqrt{2}}{50}.$$

6. 解: (1) 由题意, 得 $(\sin \alpha+\cos \alpha)^2=\frac{9}{5}$,

$$\text{即 } 1+\sin 2\alpha=\frac{9}{5},$$

$$\therefore \sin 2\alpha=\frac{4}{5}, \text{ 又易知 } 2\alpha \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\frac{3}{5},$$

$$\therefore \tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{4}{3}.$$

$$(2) \because \beta \in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \beta-\frac{\pi}{4} \in\left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{又 } \sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin 2\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{24}{25}.$$

$$\text{又 } \sin 2\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 2\beta, \therefore \cos 2\beta=-\frac{24}{25}.$$

$$\text{又易知 } 2\beta \in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \therefore \sin 2\beta=\frac{7}{25}.$$

$$\text{又 } \cos^2 \alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos \alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \cos(\alpha+2\beta)=\cos \alpha \cos 2\beta-\sin \alpha \sin 2\beta=\frac{2}{5}\sqrt{5} \times$$

$$\left(-\frac{24}{25}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{7}{25}=-\frac{11\sqrt{5}}{25}.$$

易错辨析

1. A 解析: 设等腰三角形底角为 θ , 则 $\theta \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{顶角为 } \pi-2\theta. \therefore \sin \theta=\frac{\sqrt{5}}{3}, \therefore \cos \theta=\sqrt{1-\sin^2 \theta}=$$

$$\frac{2}{3}. \therefore \sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta=2\sin \theta \cos \theta=2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

2. D 解析: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=1-$

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1-2 \times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}.$$

小测试(五十二) 简单的三角恒等变换

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$

2. C 3. D

基础过关

1. C 解析: 因为 α 为第一象限角, 且 $\tan \alpha=\frac{4}{3}$, 所以

$$\cos \alpha=\frac{3}{5}. \text{ 易知 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第一或第三象限角. 当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第}$$

$$\text{一象限角时, } \sin \frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}; \text{ 当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第三}$$

$$\text{象限角时, } \sin \frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}. \text{ 故}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2}=\pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. B 解析: $\because \alpha$ 是第三象限角, $\cos \alpha=-\frac{4}{5}$,

$$\therefore \sin \alpha=-\frac{3}{5}, \therefore \tan \frac{\alpha}{2}=\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}=$$

$$\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=-3, \therefore \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\frac{\tan \frac{\alpha}{2} + 1}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

3. B 解析: $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ = \frac{1}{2}(\sin 90^\circ - \sin 50^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 40^\circ) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 50^\circ + \frac{1}{2}\cos 40^\circ = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 50^\circ + \frac{1}{2}\sin 50^\circ = \frac{1}{4}.$

4. B 解析: 设等腰三角形的顶角为 α , 底角为 β , 则 $\cos \alpha = \frac{7}{25}$. 又 $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, 即 $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}.$

5. B 解析: 由已知得 $\frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = \sin A \sin B = \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos C)$, 又 $\because A+B = \pi - C, \therefore \cos(A-B) - \cos(\pi - C) = 1 + \cos C, \therefore \cos(A-B) = 1$. 又 $\because -\pi < A-B < \pi, \therefore A-B = 0, \therefore A=B, \therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

6. 2 解析: 由题意得 $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$, 即 $1 - \sin \alpha = \frac{1}{5}, \therefore \sin \alpha = \frac{4}{5}$. $\because 450^\circ < \alpha < 540^\circ, \therefore \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \therefore \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - (-\frac{3}{5})}{\frac{4}{5}} = 2.$

7. $-2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ 解析: $\because 0 < \alpha < \pi, \therefore \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \therefore (1 + \cos \alpha) \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$. 又 $\because \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$, 且 $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}, \therefore$ 原式 $= \frac{-\sin \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{-2\sin \alpha}{\sqrt{2} \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} = -\frac{2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|}$. $\because 0 < \alpha < \pi, \therefore 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \sin \frac{\alpha}{2} > 0. \therefore$ 原式 $= -2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$

8. 解: (1) $\because \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

又 $\because \alpha \in (-\pi, 0), \therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{1}{3}.$

(2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(3\pi + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] + \left(-\sin \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(-\cos \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{1}{2} + \sin \alpha = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$

素养提升

1. D 解析: $\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha}} = \frac{|\sin \alpha|}{|\cos \alpha|} = |\tan \alpha|, \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}, \frac{\sin \alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{2\sin^2 \alpha} = \frac{1}{2\sin \alpha}, \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$. 故选 D.

2. D 解析: $\because \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}, \therefore 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{3}$. $\because \alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}, \therefore \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2}$. $\therefore \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{3}, \therefore \cos(\alpha + \beta) = 2\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 = -\frac{7}{9}.$

3. A 解析: 因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} > 0, \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} > 0$, 所以 $\alpha + \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha - \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{12}{13}, \cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{4}{5}$. 由 $\cos 2\alpha = \cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = -\frac{16}{65}$. 由 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, 且 $\sin \alpha > 0$, 可得 $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{9}{130}\sqrt{130}.$

4. $\frac{1}{2}$ 解析: $\frac{2\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \theta - 1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) - \sin \theta}{\sqrt{2}\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{\tan \theta + 1}$. 因为 $\sin 2\theta = \frac{3}{5}, 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos 2\theta = \frac{4}{5}, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 所以 $\tan \theta =$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \frac{1 - \tan \theta}{\tan \theta + 1} =$$

$$\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{2\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \theta - 1}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}.$$

5. 解: 因为 α 为钝角, β 为锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{5}{13}.$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{3}{5} \times$$

$$\frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{33}{65}.$$

因为 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 且 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha - \beta < \pi$.

(方法一) 由 $0 < \alpha - \beta < \pi$ 得, $0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以 } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{33}{65}}{2}} = \frac{7\sqrt{65}}{65},$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}.$$

$$\text{所以 } \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{4}{7}.$$

$$(\text{方法二}) \text{ 易得 } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{7\sqrt{65}}{65}.$$

$$\text{由 } 0 < \alpha - \beta < \pi, \cos(\alpha - \beta) = \frac{33}{65}, \text{ 得}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \frac{56}{65}.$$

$$\text{所以 } \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{1 + \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{56}{65}}{1 + \frac{33}{65}} = \frac{4}{7}.$$

6. 解: (1) (方法一) $\because \tan \frac{\alpha}{2} = \tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) =$

$$\frac{\tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{5}.$$

(方法二) 令 $\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \theta = 3$.

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta =$$

$$\frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2 \times 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5}.$$

(2) $\because \alpha \in (0, \pi), \therefore \sin \alpha > 0,$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}.$$

$$\because \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}, \text{ 且 } \frac{5}{13} < \frac{4}{5}, \therefore \sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha,$$

由 $\cos \alpha > 0$ 且 $\alpha \in (0, \pi)$, 得 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\because \beta \in (0, \pi), \therefore \alpha + \beta \in (0, \frac{3\pi}{2}).$$

若 $\alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\because$ 函数 $y = \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上是

增函数, 且 $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha$,

$\therefore \alpha + \beta < \alpha$, 即 $\beta < 0$, 这与 $\beta \in (0, \pi)$ 矛盾,

$$\therefore \alpha + \beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}),$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} = -\frac{12}{13}.$$

$$\therefore \cos \beta = \cos(\alpha + \beta - \alpha) = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha +$$

$$\beta) \sin \alpha = -\frac{12}{13} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

易错辨析

D 解析: $\because 5\pi < \theta < 6\pi, \therefore \frac{5\pi}{4} < \frac{\theta}{4} < \frac{3\pi}{2}, \therefore \sin \frac{\theta}{4} <$

$$0, \therefore \sin \frac{\theta}{4} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - a}{2}}.$$

小测试(五十三) 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

$$2. y = \cos(2x - \frac{2\pi}{3})$$

基础过关

1. C 解析: 因为 $y = \sin[(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{6}] =$

$\sin(x - \frac{\pi}{3})$, 所以应将函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图

象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度.

2. C 解析: 将 $y = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长

度, 得到 $y = \sin(x - \frac{\pi}{10})$ 的图象, 再将图象上各点

的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到

$$y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{10}) \text{ 的图象.}$$

3. AC 解析: 由 $y = \sin x$ 的图象变为 $y =$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象有两种变换方式. 第一种: 先平移, 后伸缩, 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$; 第二种: 先伸缩, 后平移, 各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 再向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 故①③正确.

4. D 解析: $\because y = \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right) = \sin\left[-3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$, $\therefore$ 将 $y = \sin\left[-3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度就可以得到 $y = \sin(-3x)$ 的图象.

5. C 解析: 将函数 $f(x) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度, 可得 $y = \sin\left(3x-3m+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象; 再将图象上各点的横坐标伸长到原来的6倍(纵坐标不变), 得到 $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x-3m+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 若 $g(x)$ 为奇函数, 则 $-3m+\frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $m = -\frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbf{Z}$. 所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{18}$.

6. $y = \frac{1}{4} \sin x$ 解析: $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的图象
 $\xrightarrow[\text{原来的2倍}]{\text{横坐标伸长为}}$ $y = \frac{1}{2} \sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right)\right] = \frac{1}{2} \sin x$ 的图
 $\xrightarrow[\text{原来的}\frac{1}{2}]{\text{纵坐标缩短为}}$ $y = \frac{1}{4} \sin x$ 的图象, 即所得图象
 的函数解析式为 $y = \frac{1}{4} \sin x$.

7. $2\sin\left(4x+\frac{13\pi}{12}\right)-1$ 解析: 将 $y = 2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的
 图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得函数 $y = 2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right] = 2\sin\left(4x+\frac{13\pi}{12}\right)$ 的图象, 再向下平移1
 个单位长度, 得函数 $y = 2\sin\left(4x+\frac{13\pi}{12}\right)-1$ 的图
 象, 即 $f(x) = 2\sin\left(4x+\frac{13\pi}{12}\right)-1$.

8. 解: (1) $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x -$

$$\frac{1}{2} \cos \omega x + \cos \omega x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

$$\because \omega > 0, \therefore \omega = 2, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

(2) $\therefore$ 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $y = g(x)$ 的图象,

$$\therefore y = g(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos 2x.$$

$$\text{令 } 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{解得 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore$ 函数 $y = g(x)$ 图象的对称中心的坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$.

素养提升

1. C 解析: 因为函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$
 $(\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后与原函数
 图象重合, 所以 $\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$
 $(\omega > 0)$ 的周期的倍数, 设 $\frac{\pi}{3} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$, 所以
 $\omega = 6k, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $\omega > 0$, 所以当 $k = 1$ 时, ω 取最小
 值6, 故选C.

2. A 解析: 由题可得 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 故只需将其图象上所有
 点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$, 即可得到函数
 $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故选A.

3. ABC 解析: 由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 得 $\omega = 2$. $\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi)$. 其图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后所得

图象对应的函数为 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$. 由 $g(x)$ 是偶函数, 知 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$. 因此 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. $\therefore f(0) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, A 正确; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = f(x)_{\max}$, B 正确; $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin \pi = 0$, C 正确; $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \pm 1$, D 错误. 故选 ABC.

4. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 解析: 由题意得, $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 此时 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 此时变为 $y = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 易知 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $\therefore g(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

5. 解: (1) 将 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 保持纵坐标不变, 横坐标变为原来的 2 倍, 可得 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

则 $4k\pi + \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 4k\pi + \frac{8\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

又 $x \in [0, 3\pi]$, 所以当 $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in \left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)_{\max} = 1, f(x)_{\min} = -1$,

当 $x = 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}$, 当 $x = 3\pi$ 时, $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故使方程 $f(x) = m$ 有唯一实数根的 m 的取值范围为 $m \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \{-1, 1\}$.

6. 解: (1) 因为 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $\varphi = k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2\cos \omega x + 1$.

因为函数 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = 2\cos 2x + 1$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) + 1 = \sqrt{2} + 1$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到

函数 $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 的图象, 再将所得图象上各点的横坐标伸长为原来的 4 倍, 保持纵坐标不变, 得到 $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 的图象,

所以 $g(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

当 $2k\pi \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$,

即 $4k\pi + \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 4k\pi + \frac{8\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $g(x)$ 单调递减.

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[4k\pi + \frac{2\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

易错辨析

C 解析: 因为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$,

所以将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 就可得到函数 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

小测试(五十四) 三角函数的应用(一)

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$

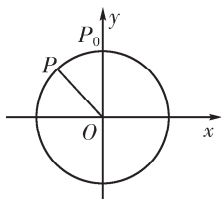
2. B

基础过关

1. A 解析: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$. $\because f(x)$ 的图象过点 $(0, 1)$, $\therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}$. 又 $\because -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$.
2. C 解析: 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{t}{2} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 知函数 $F(t)$ 的增区间为 $[4k\pi - \pi, 4k\pi + \pi], k \in \mathbf{Z}$. 当 $k = 1$ 时, $t \in [3\pi, 5\pi]$, 而 $[10, 15] \subseteq [3\pi, 5\pi]$, 故时间段 $[10, 15]$ 内人流量是增加的.
3. C 解析: 由题图易得 $y_{\min} = k - 3 = 2$, 则 $k = 5$, $\therefore y_{\max} = k + 3 = 8$.
4. ABD 解析: 由图可得, 半个周期为 0.4 s , 所以周期为 0.8 s , A 正确; 平衡位置为 x 轴, 最低点纵坐标是 -5 , 故振幅为 5 cm , B 正确; 当质点位于最高点或最低点时速度为零, 故 C 错误, D 正确.
5. C 设 $y = \sin(\omega t + \varphi)$, 其中 $\omega < 0$. 由 $\frac{2\pi}{|\omega|} = 60$, 得 $|\omega| = \frac{\pi}{30}$, $\therefore \omega = -\frac{\pi}{30}$. $\therefore y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \varphi\right)$. 又当 $t = 0$ 时, $y = \frac{1}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\therefore y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{6}\right)$.
6. 14 解析: 因为 $0 \leq t \leq 24$, 所以 $-\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, 故当 $\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$, 即 $t = 2$ 时函数取最小值 $-6 + 20 = 14$.
7. 25 解析: $\because$ 周期 $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} (\text{s})$, $\therefore$ 频率为每秒 50 次, $\therefore 0.5 \text{ s}$ 往复运行 25 次.
8. 解: (1) 由函数易知, 当 $x = 14$ 时, 函数取得最大值, 此时最高温度为 30°C , 当 $x = 6$ 时, 函数取得最小值, 此时最低温度为 10°C , 所以最大温差为 $30^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C}$.
- (2) 令 $10\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{5\pi}{4}\right) + 20 = 15$, 得 $\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, 又因为 $x \in [4, 16]$, 所以 $x = \frac{26}{3}$. 令 $10\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{5\pi}{4}\right) + 20 = 25$, 得 $\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. 又因为 $x \in [4, 16]$, 所以 $x = \frac{34}{3}$. 故该细菌能存活的最长时间为 $\frac{34}{3} - \frac{26}{3} = \frac{8}{3} (\text{h})$.

素养提升

1. C 解析: $\because T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$, $\therefore \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$. $\therefore$ 从最右边到最左边的时间为 $\frac{1}{2} \text{ s}$.
2. C 解析: $\because P_0(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\therefore \angle P_0 O x = \frac{\pi}{4}$. 按逆时针转时间 t 后得 $\angle POP_0 = t$, $\angle POx = t - \frac{\pi}{4}$, 此时 P 点纵坐标为 $2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore d = 2\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|$. 当 $t = 0$ 时, $d = \sqrt{2}$, 排除 A, D 项; 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $d = 0$, 排除 B 项, 故选 C.
3. ACD 解析: 建立如图所示的平面直角坐标系.



- 设 $\varphi (0 \leq \varphi < 2\pi)$ 是以 x 轴的非负半轴为始边, OP_0 (P_0 表示点 P 的起始位置) 为终边的角, 由点 P 的起始位置在最高点知, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 又由题知 OP 在 $t \text{ min}$ 内转过的角为 $\frac{2\pi}{20}t$, 即 $\frac{\pi t}{10}$, 所以以 x 轴的非负半轴为始边, OP 为终边的角为 $\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{2}$, 即点 P 的纵坐标为 $40\sin\left(\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{2}\right)$. 所以点 P 距离地面的高度 h 关于旋转时间 t 的函数关系式是 $h(t) = 50 + 40\sin\left(\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = 50 + 40\cos \frac{\pi t}{10}$. 当 $t = 10$ 时, $h = 50 + 40\cos \pi = 10$. A 正确; 当转速减半时, 周期是原来的 2 倍, B 错误; $h(17) = 50 + 40\cos \frac{17\pi}{10} = 50 + 40\cos \frac{3\pi}{10}$, $h(43) = 50 + 40\cos \frac{43\pi}{10} = 50 + 40\cos \frac{3\pi}{10}$, C 正确; 由 $h(t) = 50 + 40\cos \frac{\pi t}{10} \geq 70$ 得 $\cos \frac{\pi t}{10} \geq \frac{1}{2}$, 解得 $2k\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi t}{10} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $20k - \frac{10}{3} \leq t \leq 20k + \frac{10}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 因此一个周期内高度不低于 70 m 的时长为 $\frac{20}{3} \text{ min}$, D 正确. 故选 ACD.
4. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ 解析: 设 $\angle POD = \alpha$, 则 $OA = \cos \alpha$, 所以正方形 $OABC$ 的面积 $S_1 = \cos^2 \alpha$, $\triangle AOD$ 的面积

$S_2 = \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha$, 则风景区的面积 $f(\alpha) = S_1 + S_2 = \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \sin(2\alpha + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 当 $2\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 即 $\sin 2\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, $f(\alpha)$ 取得最大值, 且最大值为 $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}) \text{ km}^2$.

5. 解: (1) 由图象可知, $A = 300$,

$$\text{周期 } T = 2 \times \left(\frac{11}{900} - \frac{1}{180} \right) = \frac{1}{75},$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 150\pi.$$

$$\text{又由 } 300 \sin \left(150\pi \times \frac{1}{180} + \varphi \right) = 0, \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore i = 300 \sin \left(150\pi t + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$(2) \text{ 由题意, 得 } T \leq \frac{1}{150}, \text{ 即 } \frac{2\pi}{\omega} \leq \frac{1}{150}.$$

$$\text{又 } \because \omega > 0, \therefore \omega \geq 300\pi > 942,$$

$$\therefore \omega \text{ 的最小正整数值是 } 943.$$

$$6. \text{ 解: (1) } A = \frac{1}{2} [14 - (-2)] = 8,$$

$$b = \frac{1}{2} \times [14 + (-2)] = 6,$$

$$\text{由 } T = 24, \text{ 得 } \omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{所以 } f(t) = 8 \sin \left(\frac{\pi}{12} t + \varphi \right) + 6.$$

$$\text{又 } f(2) = 8 \sin \left(\frac{\pi}{12} \times 2 + \varphi \right) + 6 = -2.$$

$$\text{即 } \sin \left(\frac{\pi}{6} + \varphi \right) = -1,$$

$$\text{故 } \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{又 } |\varphi| < \pi, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以函数解析式为 } f(t) = 8 \sin \left(\frac{\pi}{12} t - \frac{2\pi}{3} \right) + 6.$$

(2) 当 $t = 9$ 时, $y = 8 \sin \frac{\pi}{12} + 6 < 8 \sin \frac{\pi}{6} + 6 = 10$, 气温低于 10°C , 满足开空调的条件, 所以应该开空调.

易错辨析

$y = 6 \sin \left(\frac{\pi}{7} x - \frac{9\pi}{14} \right) + 21$ 解析: 若以 1 月份为最低气温, 8 月份为最高气温, 则可得 $A = \frac{27-15}{2} = 6$,

$$b = \frac{27+15}{2} = 21, T = (8-1) \times 2 = 14, \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{7},$$

$$\varphi = -\frac{9\pi}{14}, \text{ 所以函数解析式为 } y = 6 \sin \left(\frac{\pi}{7} x - \frac{9\pi}{14} \right) + 21, x = 1, 2, \dots, 12.$$

小测试(五十五) 三角函数的应用(二)

预习自评

1. C 2. D

基础过关

$$1. \text{ C 解析: 当 } t = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } s_1 = 5 \sin \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$5 \sin \frac{3\pi}{2} = -5; \text{ 当 } t = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } s_2 = 10 \cos \frac{4\pi}{3} = 10 \times$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right) = -5, \text{ 故 } s_1 = s_2.$$

$$2. \text{ BCD 解析: 由图可知 } T = 2 \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{160} \right) = \frac{1}{80}, \text{ 所以}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{80}, \text{ 可得 } \omega = 160\pi, \text{ 故选项 A 不正确; 所以}$$

$p(t) = a + b \sin 160\pi t$, 由图知 $p(t)$ 在一个周期内最大值为 120, 最小值为 70, 所以收缩压为 120 mmHg, 舒张压为 70 mmHg, 故选项 B, C 正确;

每分钟心跳数为频率 $f = \frac{1}{T} = 80$, 故选项 D 正确.

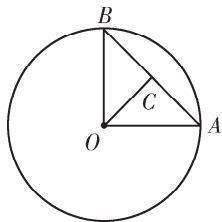
故选 BCD.

3. C 解析: 因为 $y = 500 \sin(\omega x + \varphi) + 9\,500 (\omega > 0)$, 所以当 $x = 1$ 时, $500 \sin(\omega + \varphi) + 9\,500 = 10\,000$; 当 $x = 2$ 时, $500 \sin(2\omega + \varphi) + 9\,500 = 9\,500$, 所以 ω 可取 $\frac{3\pi}{2}$, φ 可取 π , 即 $y = 500 \sin \left(\frac{3\pi}{2} x + \pi \right) + 9\,500$. 所以当 $x = 3$ 时, $y = 9\,000$.

4. D 解析: 由已知可得该函数的周期 $T = 12$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$. 又 $\because$ 当 $t = 0$ 时, $A \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\therefore y = \sin \left(\frac{\pi}{6} t + \frac{\pi}{3} \right), t \in [0, 12]$. 可解得函数的单调递增区间是 $[0, 1]$ 和 $[7, 12]$.

5. $y = 4 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ (答案不唯一) 解析: 不妨设 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0$). 由题知 $A = 4$, $T = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. 当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 且小球开始向上运动, 所以 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 不妨取 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故所求关系式可以为 $y = 4 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$.

6. $10\sin \frac{\pi t}{60}$ 解析:如图所示,经过 t s,秒针转过的角度为 $\angle AOB = \frac{\pi t}{30}$. 取 AB 的中点 C , 则 $\angle AOC = \frac{\pi t}{60}$,
 $d = |AB| = 2|OA| \sin \angle AOC = 10\sin \frac{\pi t}{60}$, $t \in [0, 60]$.



7. 解:(1)不妨设 $h(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + b$, $A > 0, \omega > 0$,

由题意得 $A = 8, T = 12, b = 10$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$.

当 $t = 0$ 时, $h = 2$, 即 $\sin \varphi = -1$,

因此 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

因此 $h(t) = 8\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) + 10, t \geq 0$.

(2)由题意及(1)得 $h(t) > 14$,

即 $8\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) + 10 > 14$,

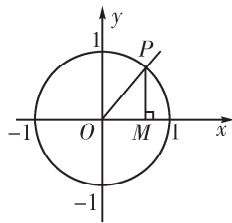
则 $\cos \frac{\pi}{6}t < -\frac{1}{2}$.

又因为 $0 \leq t \leq 12$, 所以 $4 < t < 8$.

所以在第一圈的 4 min 到 8 min 内, 点 P 离地面的高度超过 14 m.

素养提升

1. B 解析:令 $3\,000\cos\left(\frac{n\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\,000 \geq 5\,500$, 则
 $\cos\left(\frac{n\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{n\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $-6 + 12k \leq n \leq -2 + 12k, k \in \mathbf{Z}$, $\therefore 1 \leq n \leq 12$, 又 n 是正整数, $\therefore n = 6, 7, 8, 9, 10$ 共 5 个. 故选 B.
2. C 解析:如图所示, 根据题意, 设 P 的坐标为 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 其中点 P 不在坐标轴上. 则 $|OM| = |\cos \theta|$, $MP = |\sin \theta|$, 则 $S_{\triangle POM} = \frac{1}{2} \times |OM| \times |MP| = \frac{|\sin \theta \cos \theta|}{2} = \frac{|\sin 2\theta|}{4} \leq \frac{1}{4}$, 即 $\triangle POM$ 面积的最大值为 $\frac{1}{4}$. 故选 C.



3. A 解析:由题意, 得 $y_N = \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{6}x$, $y_M = \sin\left[\frac{\pi}{6}(x+3) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin \frac{\pi}{6}x$,
 $\therefore y_M - y_N = \sin \frac{\pi}{6}x + \cos \frac{\pi}{6}x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{4}\right)$,
 令 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 则 $\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, x = 12k + \frac{3}{2}, k = 0, 1, 2, 3$. $\therefore M$ 与 N 的纵坐标之差第 4 次达到最大值时, N 运动的时间 $= 3 \times 12 + \frac{3}{2} = 37.5$ (min). 故选 A.

4. $(10\,000\sqrt{5} + 25\,000) \text{ m}^2$ 解析: $\therefore S_{OACB} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} AB^2$, $\therefore AB = 100\sqrt{5 - 4\cos \theta}$, $\angle AOB = \theta, OB = 100, OA = 200$,
 $\therefore S_{OACB} = 100^2 \cdot \left(\sin \theta - 2\cos \theta + \frac{5}{2}\right)$. 令 $\tan \varphi = 2$,
 则 $S_{OACB} = 100^2 \left[\sqrt{5}\sin(\theta - \varphi) + \frac{5}{2}\right]$. $\therefore$ 直接监测覆盖区域面积的最大值为 $(10\,000\sqrt{5} + 25\,000) \text{ m}^2$.

5. 解:(1)由表中数据知周期 $T = 12$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$.

由 $t = 0, y = 1.5$, 得 $A + B = 1.5$.

由 $t = 3, y = 1$, 得 $B = 1$. $\therefore A = 0.5$.

$\therefore y = \frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{6}t + 1, t \in [0, 24]$.

(2)令 $y \geq 1$, 得 $\frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{6}t + 1 \geq 1$.

$\therefore \cos \frac{\pi}{6}t \geq 0$.

$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6}t \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore 12k - 3 \leq t \leq 12k + 3 (k \in \mathbf{Z})$.

又 $\because 8 \leq t \leq 20$, $\therefore k = 1$ 时, $9 \leq t \leq 15$.

$\therefore$ 冲浪爱好者从 9 h 到 15 h, 有 6 h 可进行冲浪.

6. 解:(1)设该函数为 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0, 0 < |\varphi| < \pi)$.
 根据条件①, 可知这个函数的周期是 12;
 由②可知, $f(2)$ 最小, $f(8)$ 最大, 且 $f(8) - f(2) = 400$. 故该函数的振幅为 200;

由③可知, $f(x)$ 在 $[2, 8]$ 上单调递增, 且 $f(2) = 100$, 所以 $f(8) = 500$.

根据上述分析, 得 $\frac{2\pi}{\omega} = 12$, 解得 $\omega = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{cases} -A+B=100, \\ A+B=500, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A=200, \\ B=300. \end{cases}$$

根据分析可知, 当 $x=2$ 时, $f(x)$ 最小; 当 $x=8$ 时, $f(x)$ 最大.

$$\text{故 } \begin{cases} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1, \\ \sin\left(8 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1. \end{cases}$$

又因为 $0 < |\varphi| < \pi$, 故 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$.

所以入住客栈的游客人数与月份之间的关系式为

$$f(x) = 200\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{5\pi}{6}\right) + 300.$$

$$(2) \text{ 令 } 200\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{5\pi}{6}\right) + 300 \geq 400,$$

$$\text{得 } \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{5\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}x - \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{解得 } 12k + 6 \leq x \leq 12k + 10, k \in \mathbf{Z}.$$

因为 $x \in \mathbf{N}^*$, 且 $1 \leq x \leq 12$,

所以 $x=6, 7, 8, 9, 10$, 即在 6 月、7 月、8 月、9 月、10 月这 5 个月份要准备不少于 400 份的食物.

易错辨析

$$y = -4\cos\frac{5\pi}{2}t, t \geq 0 \quad \text{解析: 设 } y = A\sin(\omega t + \varphi),$$

$A > 0, \omega > 0$, 则从表中可以得到 $A=4, T=0.8$,

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{5\pi}{2}, \therefore y = 4\sin\left(\frac{5\pi}{2}t + \varphi\right). \text{ 又由}$$

$$4\sin\varphi = -4, \text{ 得 } \sin\varphi = -1, \text{ 取 } \varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ 故 } y =$$

$$4\sin\left(\frac{5\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) = -4\cos\frac{5\pi}{2}t, t \geq 0.$$

滚动卷(六) 小测试(四十八)至(五十五)

综合拔高

1. A 解析: 当 $t=0$ 时, $\theta = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$, 由函数解

析式易知单摆的周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故单摆的频率

为 $\frac{1}{\pi}$.

2. D 解析: $y = \sin 2x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{个单位长度}]{\text{沿 } x \text{ 轴向右平移 } \frac{\pi}{6}}$ $y =$

$$\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象}$$

$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长到原来的 2 倍}} y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象.}$$

$$\text{故 } f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

3. C 解析: 因为 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$, $|\varphi| < \pi$) 是奇函数, 所以 $\varphi = 0$, 所以 $f(x) = A\sin \omega x$.

由题意知, 将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x) =$

$A\sin \frac{1}{2}\omega x$ 的图象. 因为 $g(x)$ 的最小正周期为 2π ,

所以 $\frac{1}{2}\omega = 1$, 即 $\omega = 2$, 所以 $g(x) = A\sin x$. 又

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = A\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A = \sqrt{2}, \text{ 所以 } A = 2, \text{ 所以}$$

$$f(x) = 2\sin 2x, \text{ 所以 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2\sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}. \text{ 故选 C.}$$

4. $\pi - \frac{5}{6}\pi$ 解析: $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为

$$\frac{2\pi}{2} = \pi. \text{ 由题意 } y = \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \text{ 函数 } y =$$

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过向左平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位长

$$\text{度, 得到函数 } y = \sin\left[2\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$\sin\left(2x + \frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的图象.}$$

5. $\frac{5\pi}{3}$ 解析: 令 $2x + \frac{\pi}{6} = t$, 则 $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$. 函数

$F(x) = f(x) - a$ 恰有 3 个零点, 等价于 $y=f(x)$ 的

图象与直线 $y=a$ 恰有 3 个交点, 即 $y=4\sin t$ 与直

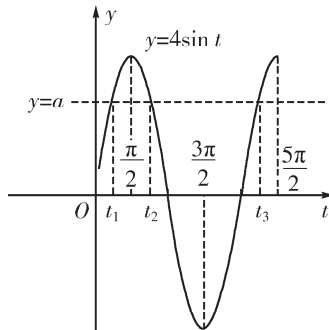
线 $y=a$ 恰有 3 个交点, 设交点横坐标分别为 $t_1, t_2,$

t_3 , 如图所示. 由正弦函数图象的对称性可得 $t_1 +$

$$\frac{\pi}{3}, t_2 + t_3 = 2x_2 + \frac{\pi}{6} + 2x_3 + \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi, \text{ 即}$$

$$x_2 + x_3 = \frac{4\pi}{3}, \text{ 故 } x_1 + 2x_2 + x_3 = (x_1 + x_2) + (x_2 +$$

$$x_3) = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$



6. 解: (1) 由题意知 $A=2, \frac{T}{2}=2\pi$, 故 $T=4\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,

$$\therefore \omega = \frac{1}{2},$$

又函数 $f(x)$ 的图象过点 $Q(\frac{\pi}{2}, -2)$,

$$\therefore 2\sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -2,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } \varphi = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } -\pi < \varphi < 0,$$

$$\therefore \varphi = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{则 } f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

(2) 将函数 $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的图象向左平

移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到函数 $y = 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3\pi}{4}\right] = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象, 再将所得图

象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$, 纵坐标不变,

可得到函数 $y = 2\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象,

$$\therefore g(x) = 2\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 时, } \frac{3}{2}x - \frac{2\pi}{3} \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\therefore \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

则 $g(x)$ 的值域为 $[-2, \sqrt{3})$.

素养提升

1. C 解析: 将曲线 $y = \sin 2x$ 向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位长度, 可得曲线 $y = \sin 2(x + \varphi) = \sin(2x + 2\varphi)$.

因为 $y = \sin(2x + 2\varphi)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称, 所以

$$2 \times \frac{\pi}{12} + 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}). \text{ 又 } \varphi > 0, \text{ 所以 } \varphi =$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{N}), \text{ 则 } \varphi \text{ 的最小值为 } \frac{\pi}{6}. \text{ 故选 C.}$$

2. D 解析: $g(x) = \sin\left[2(x + \varphi) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x +$

$$2\varphi - \frac{\pi}{6}\right), f(x_1)g(x_2) = -1, \text{ 则 } f(x_1) \text{ 和 } g(x_2) \text{ 中}$$

一个取 1, 另一个取 -1, 令 $2x_1 - \frac{\pi}{6} - (2x_2 + 2\varphi -$

$$\frac{\pi}{6}) = (2k+1)\pi, \text{ 解得 } x_1 - x_2 = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

因为 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 故选 D.

3. BCD 解析: 依据表格中数据, 可设函数为 $f(x) = A\sin \omega x + k$, 由已知数据求得 $A = 2.5, k = 5$, 周期

$$T = 12, \text{ 所以 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } f(x) =$$

$$2.5\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 5, \text{ 选项 A 错误; 选项 B 正确; 由于}$$

船进港水深至少要 6.25 m, 所以 $2.5\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) +$

$$5 \geq 6.25, \text{ 得 } \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \geq \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 \leq x \leq 24 \Rightarrow 0 \leq$$

$$\frac{\pi}{6}x \leq 4\pi, \text{ 则有 } \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ 或 } \frac{13\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}x \leq \frac{17\pi}{6}, \text{ 从}$$

而有 $1 \leq x \leq 5$ 或 $13 \leq x \leq 17$, 选项 C, D 都正确. 故选 BCD.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: 依题意, $\frac{T}{2} = 4, T = \frac{2\pi}{\omega} = 8$, 所以 $\omega = \frac{\pi}{4}$,

故 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$. $\therefore$ 将函数 $f(x)$ 的图象向

右平移 1 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,

$$\therefore g(x) = f(x-1) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}x.$$

$$\therefore g(1) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, g(2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, g(3) =$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, g(4) = \sin \pi = 0, g(5) = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$g(6) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1, g(7) = \sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, g(8) =$$

$$\sin 2\pi = 0, \text{ 所以 } g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(8) =$$

$$0, \text{ 所以 } g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(2022) =$$

$$g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6) = \frac{\sqrt{2}}{2} +$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. 解: (1) 三个条件是: ①③④, 理由如下:

若满足②: 因为 $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $A = \sqrt{2}, \omega = 1$;

若满足③: 因为 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$,

若满足④: $A = 2$,

由此可知, 若满足②, 则③④均不满足,

所以满足的三个条件是: ①③④.

(2) 由③④知, $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$,

由①知, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, 所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1$,

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{不妨令 } 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } x = -\frac{\pi}{6}; \text{ 当 } k = 0 \text{ 时, } x = \frac{\pi}{3}; \text{ 当 } k = 1$$

$$\text{时, } x = \frac{5\pi}{6},$$

所以若要 $y = f(x)$ 的对称轴只有一条落在区间 $[0, m]$ 上, 只需 $m \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

$$\text{所以 } m \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

6. 解: (1) 根据图象可知 $A = 1, \frac{1}{4}T = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}\pi$,

$$\therefore T = \pi, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2, f(x) = \cos(2x + \varphi),$$

$$\text{将 } \left(\frac{7\pi}{12}, -1\right) \text{ 代入, 得 } \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{即 } \frac{7\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \pi, \text{ 解得 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore k = 0, \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

函数 $f(x)$ 的图象上的各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 可得 $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$, 曲线再

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长

$$\text{度, 得 } g(x) = \cos\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) + 1.$$

$$\text{令 } 4x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore \text{此函数图象的对称中心为 } \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, 1\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) \text{ 当 } x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \text{ 时, } 4x + \frac{5\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right].$$

$$\therefore \cos\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],$$

$$\cos\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) + 1 \in \left[0, \frac{3}{2}\right],$$

$$\text{即 } g(x) \text{ 的值域为 } \left[0, \frac{3}{2}\right].$$

$$(3) \because g^2(x) + (2-m)g(x) + 3 - m = 0,$$

$$\therefore g^2(x) + 2g(x) + 3 = m[g(x) + 1],$$

$$\therefore m = \frac{g^2(x) + 2g(x) + 3}{g(x) + 1}.$$

$$\text{令 } t = g(x) + 1, \text{ 由 (2) 易知 } t \in \left[1, \frac{5}{2}\right].$$

$$\therefore m = \frac{t^2 + 2}{t} = t + \frac{2}{t} \in \left[2\sqrt{2}, \frac{33}{10}\right].$$

$$\text{因此 } m \text{ 的取值范围为 } \left[2\sqrt{2}, \frac{33}{10}\right].$$