

限时小测试参考答案

小测试(一) 数列的概念及通项公式

预习自评

1. ABD 2. C 3. A

基础过关

1. B 解析:对于①,根据数列的表示方法可知,不是任何数列都有通项公式,例如: π 的近似值构成的数列 3, 3.1, 3.14, 3.141, $\dots$, 就没有通项公式,①错误;对于②,根据数列的表示方法可知,②正确;对于③,给出了数列的有限项,数列的通项公式不一定唯一,例如:1, -1, 1, -1, $\dots$, 其通项公式既可以写成 $a_n = (-1)^{n+1}$, 也可以写成 $a_n = (-1)^{n-1}$, ③错误;对于④,根据数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 $\mathbf{N}^*$ (或它的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$) 到实数集 $\mathbf{R}$ 的函数可知,④正确. 故选 B.

2. BD 解析:对于选项 A, $\{1, 3, 7, \dots\}$ 是一个集合,不是数列;对于选项 B, 数列 1, 3, 7, $\dots$ 与数列 7, 3, 1, $\dots$ 项的顺序不同, 所以它们不是同一数列;对于选项 C, 设 1, 3, 7, $\dots$ 为数列 $\{a_n\}$, 根据前三项的规律, 第四项可能是 15 (通项公式为 $a_n = 2^n - 1$), 可能是 13 (通项公式为 $a_n = n^2 - n + 1$), 也可能是其他数;对于选项 D, 由于 $1 < 3 < 7$, 所以该数列一定不是递减数列. 故选 BD.

3. B 解析:由题意可得该数列从第 3 项起, 每一项等于前两项的和, 所以这个数列为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, $\dots$, 故 89 为该数列的第 11 项.

4. C 解析:根据题意可得 $2^n = 16$, 解得 $n = 4$, 则 16 是这个数列的第 4 项. 故选 C.

5. D 解析:当 $n = 1$ 时, $a_1 = 0 \neq 2$, A 错误;当 $n = 1$ 时, $a_1 = 0 \neq 2$, B 错误;当 $n = 3$ 时, $a_3 = -2 \neq 2$, C 错误;当 $n = 2k, k \in \mathbf{N}_+$ 时, $a_n = \left| 2\cos \frac{(2k-1)\pi}{2} \right| = 2 \left| \cos \left(k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right| = 0$, 当 $n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}_+$ 时, $a_n = 2|\cos(k-1)\pi| = 2$, 符合题意. 故选 D.

6. 27 $a_n = (-1)^n \sqrt{3^n}$ 解析:把数列的前 4 项统一形式为 $-\sqrt{3}, \sqrt{9}, -\sqrt{27}, \sqrt{81}$, 可知 $a_6 = \sqrt{3^6} = 27$, 数列的一个通项公式为 $a_n = (-1)^n \sqrt{3^n}$.

7. $\frac{1}{120}$ 12 解析: $\because a_n = \frac{1}{n(n+2)}, \therefore a_{10} = \frac{1}{10 \times 12} = \frac{1}{120}$. 由 $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{168}$, 得 $n^2 + 2n - 168 = 0$, 解得 $n = 12$ 或 $n = -14$ (舍去).

8. 解:(1) 设 $a_n = kn + b (k \neq 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} k + b = 3, \\ 10k + b = 21, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$\therefore a_n = 2n + 1 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore a_{2023} = 4047.$$

$$(2) \because a_2, a_4, a_6, a_8, \dots \text{为 } 5, 9, 13, 17, \dots,$$

$$\therefore b_n = 4n + 1.$$

素养提升

1. D 解析:代入验证, 可知①②③均可以作为数列 $\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0, \dots$ 的通项公式. 故选 D.

2. C 解析:数列 1, 3, 7, 15, $\dots, 2^n - 1, \dots$, 即 $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, \dots, 2^n - 1, \dots$, 故该数列的通项公式为 $a_n = 2^n - 1$. 由 $a_n = 2^n - 1 = 255$, 解得 $n = 8$, 即 255 是这个数列的第 8 项. 故选 C.

3. A 解析:因为 $a_3 = -5, a_n = (-1)^n \cdot 2^n + a$, 所以 $-8 + a = -5$, 解得 $a = 3$. 故选 A.

4. $\lambda < 3$ 解析:因为数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $a_{n+1} > a_n$, 所以 $(n+1)^2 - \lambda(n+1) + 3 > n^2 - \lambda n + 3$, 化为 $\lambda < 2n + 1$ 恒成立, 因为 $n \geq 1$ 且 $n \in \mathbf{Z}$, 则 $2n + 1 \geq 3$, 所以 $\lambda < 3$.

5. 解:因为 $f(x)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = c = 0,$$

$$\text{又 } f(1) = 1,$$

$$\text{可得 } f(-1) = -1.$$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} f(1) = a + b = 1, \\ f(-1) = -a + b = -1, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = x^3,$$

$$\text{所以 } a_n = f(n) = n^3,$$

$$\text{所以 } a_5 = 5^3 = 125.$$

6. 解:存在最大项. 理由如下:

由题意可得, $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1, a_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8},$

$$a_4 = \frac{4^2}{2^4} = 1, a_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}, \dots$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1,$$

$$\therefore a_{n+1} < a_n,$$

即当 $n \geq 3$ 时, $\{a_n\}$ 是递减数列.

$$\text{又 } \because a_1 < a_3, a_2 < a_3,$$

$$\therefore a_n \leq a_3 = \frac{9}{8}.$$

$\therefore$ 当 $n=3$ 时, $a_3 = \frac{9}{8}$ 为这个数列的最大项.

易错辨析

D 解析: 由于 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + \lambda(n+1) - (n^2 + \lambda n) = 2n + 1 + \lambda > 0$, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 从而 $\lambda > [-(2n+1)]_{\max}$, 所以 $\lambda > -3$.

小测试(二) 数列的递推公式

预习自评

1. B 2. D 3. A

基础过关

1. D 解析: $a_2 = [1 - (-1)]^2 = 4, a_3 = (1-4)^2 = 9.$

2. C 解析: 因为 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n + 1$ 且 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 所以 $a_3 = 2a_2 + a_1 + 1 = 6, a_4 = 2a_3 + a_2 + 1 = 15, a_5 = 2a_4 + a_3 + 1 = 37$. 故选 C.

3. C 解析: 因为 $a_3 = \frac{3}{4}, a_n a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$, 所以 $a_2 a_3 = a_2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, 解得 $a_2 = \frac{1}{3}$. 由 $a_1 a_2 = a_1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, 得 $a_1 = 1$. 故选 C.

4. C 解析: 由 $a_1 = S_1 = 4a_1 - 3$, 得 $a_1 = 1$, 由 $a_1 + a_2 = S_2 = 4a_2 - 3$, 得 $a_2 = \frac{4}{3}$, 所以 $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{7}{3}$.

5. A 解析: 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{a_n + 1} (n \in \mathbb{N}^*)$, $\therefore a_2 = \frac{a^2 - 2}{a + 1}$. $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是常数列, $\therefore a = \frac{a^2 - 2}{a + 1}$, 解得 $a = -2$. 故选 A.

6. 19 解析: $a_3 = a_2 + a_1 = 5 + 2 = 7, a_4 = a_3 + a_2 = 7 +$

$$5 = 12, a_5 = a_4 + a_3 = 12 + 7 = 19.$$

7. $\frac{81}{64}$ 解析: $a_1 a_2 \cdots a_8 = 8^2$ ①, $a_1 a_2 \cdots a_9 = 9^2$ ②, ② $\div$ ① 得, $a_9 = \frac{9^2}{8^2} = \frac{81}{64}$.

8. 解: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n) - [2(n-1)^2 - (n-1)] = 4n - 3$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$, 符合上式,

$$\text{故 } a_n = 4n - 3, n \in \mathbb{N}^*.$$

素养提升

1. BD 解析: 由 $a_1 = 3, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$, 得 $a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = -\frac{4}{3}, a_4 = 3$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 所以 $a_8 = a_{17} = -\frac{1}{4}, a_7 = a_{16} = 3$. 故选 BD.

2. C 解析: 因为 $a_1 = 2$, 所以 $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} = -1, a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} = 2$, 所以 $a_{n+3} = 1 - \frac{1}{a_{n+2}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{n+1}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{a_n}{a_n - 1}} = 1 - \frac{1}{\frac{1 - a_n}{a_n - 1}} = 1 - \frac{a_n - 1}{1 - a_n} = \frac{a_n - 1}{-1} = a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 所以

$$a_{2\ 021} = a_{3 \times 673 + 2} = a_2 = \frac{1}{2}.$$

3. D 解析: 因为 $a_n a_{n+1} = 1$, 所以 $a_n \neq 0$. 由 $a_n a_{n+1} = 1$, 得 $a_{n+1} a_{n+2} = 1$, 两式相除得 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 1$, 即 $a_n = a_{n+2}$. 由 $a_1 a_2 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, 得 $a_2 = 2$, 所以 $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_{2\ 022} = 2$, 所以 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2\ 022} = 2\ 022$.

4. 2, 4, 5, $\frac{11}{2}, \frac{23}{4}$ 解析: $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2} a_1 + 3 = 4, a_3 = \frac{1}{2} a_2 + 3 = 5, a_4 = \frac{1}{2} a_3 + 3 = \frac{11}{2}, a_5 = \frac{1}{2} a_4 + 3 = \frac{23}{4}$.

5. 解: 因为 $a_n = a_{n-1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} (n \geq 2)$,

$$\text{所以 } a_n - a_{n-1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$\text{所以 } a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \cdots + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1 = \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1.$$

又 $a_1 = 1$ 也符合上式,

所以 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

6. 解: 若 a_3 为奇数, 则 $3a_3 + 1 = 4, a_3 = 1$.

若 a_2 为奇数, 则 $3a_2 + 1 = 1, a_2 = 0$ (舍去).

若 a_2 为偶数, 则 $\frac{a_2}{2} = 1, a_2 = 2$.

若 a_1 为奇数, 则 $3a_1 + 1 = 2, a_1 = \frac{1}{3}$ (舍去).

若 a_1 为偶数, $\frac{a_1}{2} = 2, a_1 = 4$, 符合题意.

若 a_3 为偶数, 则 $\frac{a_3}{2} = 4, a_3 = 8$.

若 a_2 为奇数, 则 $3a_2 + 1 = 8, a_2 = \frac{7}{3}$ (舍去).

若 a_2 为偶数, 则 $\frac{a_2}{2} = 8, a_2 = 16$.

若 a_1 为奇数, 则 $3a_1 + 1 = 16, a_1 = 5$, 符合题意.

若 a_1 为偶数, 则 $\frac{a_1}{2} = 16, a_1 = 32$, 符合题意.

故 m 所有可能的取值为 4, 5, 32.

易错辨析

$\begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n \geq 2 \end{cases}$ 解析: 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$; 当 $n \geq$

2 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - [(n-1)^2 + 1] = 2n - 1$,

因为 $a_1 = 2$ 不符合上式, 所以 $a_n = \begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n \geq 2. \end{cases}$

小测试(三) 等差数列的概念及通项公式

预习自评

1. B 2. C 3. B

基础过关

1. B 解析: 设 p, q 的等差中项为 a , 则有 $2a = p + q =$

$\frac{1}{\sqrt{5}-2} + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5}$, 所以 $a = \sqrt{5}$, 即 p, q 的等差中

项为 $\sqrt{5}$. 故选 B.

2. A 解析: 由题意知 $a_n = 2n + 1$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2$. 故选 A.

3. B 解析: $\because a_n - a_{n-1} = 2 (n \geq 2)$, 且 $a_1 = 1$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公差的等差数列, 通项公式为 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$, $\therefore a_{10} = 2 \times 10 - 1 = 19$.

4. A 解析: 因为 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, $a_1 = 8$, 所以数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 为等差数列, 所以 $\sqrt{a_n} = \sqrt{8} + \sqrt{2}(n-1) =$

$\sqrt{2}(n+1)$, 所以 $a_n = 2(n+1)^2$. 故选 A.

5. C 解析: 因为 $a_{n+1} = a_n + 4$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 4 的等差数列, 则 $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$, 令 $4n - 2 = 2022$, 解得 $n = 506$.

6. 3 解析: 设该等差数列为 $\{a_n\}$, 其首项为 a_1 , 公差为 d , 由题意知, $a_1 = -3, a_4 = 6$, 即 $\begin{cases} a_1 = -3, \\ a_1 + 3d = 6, \end{cases}$ 解得 $d = 3$.

7. 2 解析: $\because \ln 3$ 是 $\ln 9^a$ 与 $\ln 3^b$ 的等差中项, $\therefore 2\ln 3 = \ln 9^a + \ln 3^b$, 即 $\ln 3^2 = \ln (9^a \cdot 3^b) = \ln 3^{2a+b}$, 则 $3^2 = 3^{2a+b}$, $\therefore 2a + b = 2$.

8. 解: 因为 $a_{3n} = 3a_n + 2$,

所以当 $n=1$ 时, $a_3 = 3a_1 + 2$,

即 $a_1 + 2d = 3a_1 + 2$,

所以 $d = a_1 + 1$ ①,

又 $a_3 + a_4 = 3(a_1 + a_2)$,

即 $2a_1 + 5d = 3(2a_1 + d)$,

故 $d = 2a_1$ ②,

联立①②, 解得 $a_1 = 1, d = 2$,

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

素养提升

1. C 解析: 由 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设 $a_{n+1} - a_n = d$, 则 $b_n = a_n + a_{n+1}$ 满足 $b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = a_{n+2} - a_n = 2d$. 故选 C.

2. C 解析: 设该等差数列的公差为 d . 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项分别为 $a-1, a+1, 2a+1$, 所以 $2(a+1) = a-1 + 2a+1$, 解得 $a = 2$, 所以 $a_1 = 1, d = 2$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 1$. 故选 C.

3. A 解析: 设等差数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的公差为 d , 则 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_4} = 3d = -\frac{3}{4}$, 解得 $d = -\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_1} + 9d = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$, 则 $a_{10} = -\frac{4}{5}$. 故选 A.

4. 16 解析: 由题可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 故 $a + 9b = (a + 9b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} + 9 \geq 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16$ (当且仅当 $a = 4, b = \frac{4}{3}$ 时取等号).

5. 解: 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 8, \\ a_1 + 3d = 7, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = -2, \\ d = 3, \end{cases}$$

$$(1) a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 27 = 25.$$

$$(2) a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n - 5,$$

$$\text{由 } 112 = 3n - 5,$$

$$\text{解得 } n = 39.$$

所以 112 是数列 $\{a_n\}$ 的第 39 项.

$$6. \text{解: (1) 由} \begin{cases} a_4 = 70, \\ a_{21} = -100, \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 70, \\ a_{21} = a_1 + 20d = -100, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 100, \\ d = -10, \end{cases}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 100 + (n-1) \cdot (-10) = -10n + 110.$$

$$(2) \text{由 } -18 \leq -10n + 110 \leq 18,$$

$$\text{得 } 9.2 \leq n \leq 12.8.$$

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore n = 10, 11, 12, \text{共 } 3 \text{ 项},$$

即数列 $\{a_n\}$ 中有 3 项属于区间 $[-18, 18]$.

易错辨析

D 解析: 在 $3n+11$ 中, 令 $n=1$ 得 14, 它是这个数列的第 4 项, 前面还有 5, 8, 11 三项, 故这个数列的项数为 $n+3$. 故选 D.

小测试(四) 等差数列的性质和应用

预习自评

1. B 2. B 3. B

基础过关

1. D 解析: 由等差数列的性质可知, 在等差数列中, 项数间隔相等的项也成等差数列, 由 $a_{10} = 30, a_{20} = 50$, 得 $a_{30} = 70, a_{40} = 90$. 故选 D.

2. B 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $a_1 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{13} = 100$, 所以 $5a_7 = 100$, 所以 $a_7 = 20$. 因为 $a_6 - a_2 = 4d = 12$, 所以 $d = 3$, 所以 $a_7 = a_1 + 6d = 20$, 所以 $a_1 = 2$. 故选 B.

3. C 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $a_3 +$

$a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 5a_7 = 100$, 所以 $a_7 = 20$, 所以 $3a_9 - a_{13} = 3(a_1 + 8d) - (a_1 + 12d) = 2a_1 + 12d = 2(a_1 + 6d) = 2a_7 = 40$. 故选 C.

4. C 解析: 设该等差数列为 $\{a_n\}$, 公差为 $d (d \in \mathbf{Z})$, 则 $a_1 = 23, a_n = 23 + (n-1)d$. 由题意可知

$$\begin{cases} a_6 > 0, \\ a_7 < 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 23 + (6-1)d > 0, \\ 23 + (7-1)d < 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{23}{5} < d < -\frac{23}{6}.$$

因为 d 是整数, 所以 $d = -4$.

5. B 解析: $\because a_1, a_{2021}$ 为方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两根, $\therefore a_1 + a_{2021} = 10$, 由等差数列的性质得 $2a_{1011} = 10$, 即 $a_{1011} = 5$, $\therefore a_2 + a_{1011} + a_{2020} = 3a_{1011} = 15$.

6. 3 解析: $\because a_3, a_8$ 是方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两个根, $\therefore a_3 + a_8 = 3, \therefore \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore a_1 + a_{10} = a_3 + a_8 = 3$.

7. 37 解析: 由题意得数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 12 的等差数列, 即 $b_n = 12n - 11$, 故 $b_4 = 37$.

8. 解: (1) 记数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 ,

$$\text{由题意, 得} \begin{cases} 2a_1 + 6d_1 = 16, \\ 3a_1 + 12d_1 = 30, \end{cases} \text{ 解得} \begin{cases} a_1 = 2, \\ d_1 = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = 2 + 2(n-1) = 2n,$$

$$\text{又因为 } b_1 + b_5 = 2b_3 = 14,$$

$$\text{所以 } b_3 = 7, d_2 = b_4 - b_3 = 3,$$

$$\text{又 } b_4 = b_1 + 3d_2 = 10,$$

$$\text{解得 } b_1 = 1,$$

$$\text{故 } b_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2.$$

$$(2) \text{因为 } c_n = 2(a_n + b_n) = 10n - 4,$$

$$\text{所以 } c_6 = 60 - 4 = 56.$$

素养提升

1. B 解析: 由题意得 $a_2 + a_6 + a_{10} = 3a_6 = 18$, 则 $a_6 = 6$, 所以 $a_4 + a_8 = 2a_6 = 12$.

2. D 解析: 因为 $2d = a_5 - a_3 = 2$, 所以公差 $d = 1$, 又因为 $a_3 + a_5 + 2a_{10} = 2a_4 + 2a_{10} = 4a_7 = 24$, 所以 $a_7 = 6$, 所以 $a_9 = a_7 + 2d = 8$.

3. C 解析: 设数列的公差为 d , 则 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = a_1 + 2(a_1 + d) + 3(a_1 + 2d) + 4(a_1 + 3d) = 10a_1 + 20d = 10(a_1 + 2d) = 10a_3 = 100$, 所以 $a_3 = 10$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 = 50$.

4. $(-4, 11]$ 解析: $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 \leq 3, \therefore a_2 \leq 1, d > 0$, 又 $\because a_7 - 3a_3 \leq 8$, 即 $a_1 + 6d - 3(a_1 + 2d) = -2a_1 \leq 8, \therefore a_1 \geq -4, 0 <$

$d = a_2 - a_1 \leq 5, a_4 = a_1 + 3d > -4, a_4 = a_2 + 2d \leq 1 + 10 = 11$, 即 a_4 的取值范围为 $(-4, 11]$.

5. 解: 设这四个数为 $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ (公差为 $2d$),

依题意, 得 $\begin{cases} 4a = 26, \\ a^2 - d^2 = 40, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{13}{2}, \\ d = \frac{3}{2}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = \frac{13}{2}, \\ d = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

又四个数成递减等差数列,

所以 $d < 0$,

$$\text{所以 } d = -\frac{3}{2},$$

故所求的四个数为 $11, 8, 5, 2$.

6. 解: $a_1 = 3, d = 4, a_n = a_1 + (n-1)d = 4n - 1$.

(1) 令 $a_n = 4n - 1 = 135$,

$$\therefore n = 34,$$

$\therefore 135$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 34 项.

$$\text{令 } a_n = 4n - 1 = 4m + 19,$$

则 $n = m + 5 \in \mathbf{N}^*$.

$\therefore 4m + 19$ 是 $\{a_n\}$ 中的第 $m + 5$ 项.

(2) $\because a_p, a_q$ 是 $\{a_n\}$ 中的项,

$$\therefore a_p = 4p - 1, a_q = 4q - 1.$$

$$\therefore 2a_p + 3a_q = 2(4p - 1) + 3(4q - 1) = 8p + 12q - 5 = 4(2p + 3q - 1) - 1 \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore 2a_p + 3a_q \text{ 是 } \{a_n\} \text{ 中的第 } 2p + 3q - 1 \text{ 项.}$$

易错辨析

A 解析: 由等差数列的性质可得 $a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} = 4a_7 = 12$, 解得 $a_7 = 3$, 所以 $a_4 - 3a_6 = a_4 - (a_6 + 2a_6) = a_4 - (a_6 + a_5 + a_7) = a_4 - (a_4 + a_7 + a_7) = -2a_7 = -6$. 故选 A.

小测试(五) 等差数列的前 n 项和公式

预习自评

1. D 2. C 3. A

基础过关

1. C 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 6, \\ 5a_1 + 10d = 20, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 0, \\ d = 2, \end{cases} \text{ 所以 } a_4 = a_1 + 3d = 6.$$

2. D 解析: 因为点 (n, a_n) 在直线 $4x - y + 2 = 0$ 上, 所以 $4n - a_n + 2 = 0$, 即 $a_n = 4n + 2, a_1 = 6, d = 4$, 所以

$$a_n = 6 + 4(n - 1), S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 6n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 6n + 2n(n-1) = 2n^2 + 4n.$$

3. B 解析: 由题意得 $d = \frac{a_3 - a_1}{2} = 2$, 所以 $S_{10} = 10 \times 2 + \frac{10 \times (10-1)}{2} \times 2 = 110$.

4. A 解析: 由题意得 $d = \frac{a_{13} - a_1}{12} = 3$, 则 $S_n = 2n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 + n}{2}$.

5. B 解析: 由题意得 $\begin{cases} S_5 = 5a_1 + 10d = 25, \\ S_8 = 8a_1 + 28d = 64, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases}$

6. 11 解析: 因为 $3(a_1 + a_3 + a_k) = 9a_1 + 3(k+1)d = 9a_1 + 36d$, 所以 $3(k+1) = 36$, 解得 $k = 11$.

7. 51 解析: 因为 $a_3 + a_{11} + a_{13} = 9$, 所以 $a_9 - 6d + a_9 + 2d + a_9 + 4d = 9$, 解得 $a_9 = 3$, 所以 $S_{17} = \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = 17a_9 = 51$.

8. 解: 由 $-5, -1, 3, 7, \dots$ 成等差数列可得 $a_1 = -5, d = 4$,

设前 n 项和为 345,

$$\text{则 } S_n = -5n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 345,$$

$$\text{解得 } n = 15 \text{ 或 } n = -\frac{23}{2} \text{ (舍去),}$$

故该数列的前 15 项的和是 345.

素养提升

1. B 解析: 由 $3a_{27} + S_{21} = 72$, 得 $3(a_1 + 26d) + 21a_1 + \frac{21 \times 20}{2}d = 72$, 化简得 $a_1 + 12d = 3$, 所以 $S_{25} = 25(a_1 + 12d) = 75$.

2. A 解析: 由等差数列的性质得 $a_1 + a_{15} = 2a_8$, 因为 $a_1 + a_8 + a_{15}$ 为定值, 所以 a_8 为定值. 又因为 $S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15 \times 2a_8}{2} = 15a_8$, 所以 S_{15} 为定值. 故选 A.

3. D 解析: 由 $S_{18} = S_{20}$ 得 $S_{20} - S_{18} = a_{19} + a_{20} = 0$, 故 a_{19}, a_{20} 异号或同时为 0. 若 a_{19}, a_{20} 异号, 则 A, B 选项均错误; 由等差数列的前 n 项和公式得, $S_{38} =$

$$\frac{38(a_1+a_{38})}{2}=\frac{38(a_{19}+a_{20})}{2}=0, S_{39}=\frac{39(a_1+a_{39})}{2}=$$

$$\frac{39 \times 2a_{20}}{2}=39a_{20}, \text{ 由于 } a_{20} \text{ 不一定为 } 0, \text{ 故 C 选项错}$$

误, D 选项正确. 故选 D.

4. S_3 解析: $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = -5, a_{n+1} = a_n + 2, n \in \mathbb{N}^*, \therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -5 , 公差为 2 的等差数列. $\therefore a_1 = -5, a_2 = -3, a_3 = -1, a_4 = 1. \therefore S_1 = -5, S_2 = -8, S_3 = -9, S_4 = -8. \therefore S_1, S_2, S_3, S_4$ 中最小的为 S_3 .

5. 解: (1) 由题意得 $\begin{cases} a_1 + d = 5, \\ a_1 + 6d = a_1 + 3d + 6, \end{cases}$

解得 $a_1 = 3, d = 2$,

所以 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.

(2) 由 (1) 可知 $S_n = \frac{n(3+2n+1)}{2} = n^2 + 2n$,

又 $S_m = 99$,

所以 $m^2 + 2m = 99$,

解得 $m = 9$ 或 $m = -11$ (舍去).

所以 m 的值为 9 .

6. 解: (1) 设等差数列为 $\{a_n\}$,

则由已知得 $a_1 = a, a_2 = 4, a_3 = 3a$,

所以 $a + 3a = 8$,

得 $a_1 = a = 2$,

公差 $d = 4 - 2 = 2$,

所以 $S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d = 2k + \frac{k(k-1)}{2} \times 2 =$

$k^2 + k$.

由 $S_k = 90$, 得 $k^2 + k - 90 = 0$,

解得 $k = 9$ 或 $k = -10$ (舍去),

故 $a = 2, k = 9$.

(2) 由 (1) 得 $S_n = n(n+1)$,

则 $b_n = \frac{S_n}{n} = n + 1$,

故 $b_{n+1} - b_n = (n+2) - (n+1) = 1$,

即数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2 , 公差为 1 的等差数列,

所以 $T_n = \frac{n(2+n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$.

易错辨析

C 解析: 易知数列 $1, 4, 7, \dots, 3n+4, 3n+7$ 为等差数列, 且首项为 1 , 公差为 3 , 项数为 $n+3$, 所以原式 $= \frac{(1+3n+7)(n+3)}{2} = \frac{(n+3)(3n+8)}{2}$. 故选 C.

小测试(六) 等差数列前 n 项和的性质及应用

预习自评

1. B 2. C 3. D

基础过关

1. D 解析: 由等差数列的性质可得 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, S_{4m} - S_{3m}$ 成等差数列, 即 $2, 15, S_{3m} - S_{2m}, S_{4m} - S_{3m}$ 成等差数列, 其首项为 2 , 公差为 13 , $\therefore S_{4m} = S_m + (S_{2m} - S_m) + (S_{3m} - S_{2m}) + (S_{4m} - S_{3m}) = 2 \times 4 + \frac{4 \times 3}{2} \times 13 = 86$.

2. D 解析: 由题意, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为前 n 项和, 根据等差数列的性质, 可得 $S_5, S_{10} - S_5, S_{15} - S_{10}$ 和 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 构成等差数列, 所以 A, B 正确; 当首项与公差均为 0 时, $S_5, S_{10}, S_{15} + S_{10}$ 是等差数列, 所以 C 正确; 当首项为 1 , 公差为 1 时, 此时 $S_2 = 3, S_4 + S_2 = 13, S_6 + S_4 = 31$, 此时 $S_2, S_4 + S_2, S_6 + S_4$ 不构成等差数列, 所以 D 错误.

3. C 解析: 由 $a_n = 2n - 48$ 可知, 当 $n < 24$ 时, $a_n < 0$, 当 $n = 24$ 时, $a_n = 0$, 当 $n > 24$ 时, $a_n > 0$, 所以 $S_1 > S_2 > \dots > S_{23} = S_{24} < S_{25} < S_{26} < \dots$, 即当 $n = 23$ 或 $n = 24$ 时, S_n 取得最小值.

4. C 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 + 2d = 3a_1, \\ a_1 + d = 3a_1 - 1, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 1, \end{cases}$ 所以 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $\frac{S_n}{n} = \frac{n+1}{2}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{n+1+1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列, 所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 10 项和 $T_{10} = 10 + \frac{10 \times (10-1)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{65}{2}$.

5. B 解析: 奇数项共有 $(n+1)$ 项, 其和为 $\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2} \cdot (n+1) = \frac{2a_{n+1}}{2} \cdot (n+1) = 290$, 所以 $(n+1)a_{n+1} = 290$. 偶数项共有 n 项, 其和为 $\frac{a_2 + a_{2n}}{2} \cdot n = \frac{2a_{n+1}}{2} \cdot n = na_{n+1} = 261$, 所以 $a_{n+1} = 290 - 261 = 29$. 故选 B.

6. 9 117 解析: 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 25, a_4 = 16$, 所以 $16 = 25 + 3d$, 解得 $d = -3$, 所以 $a_n = 28 - 3n$, 则数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 当 $n \leq 9$ 时, $a_n > 0$, 当 $n >$

9 时, $a_n < 0$, 即 $S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_9 > S_{10} > S_{11} > \cdots$, 故当 $n=9$ 时, S_n 取得最大值, 即 $S_9 = 9 \times 25 + \frac{9 \times (9-1)}{2} \times (-3) = 117$.

7.4 解析: 因为 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 所以 $\frac{S_m}{m} + \frac{S_{m+2}}{m+2} = \frac{2S_{m+1}}{m+1}$, 即 $\frac{-2}{m} + \frac{3}{m+2} = 0$, 解得 $m=4$.

8. 解: (1) 因为 $S_n = n^2 - 7n$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 7n) - [(n-1)^2 - 7(n-1)] = 2n - 8$. 又因为当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -6$ 适合上式, 所以 $a_n = 2n - 8$.

(2) 因为 $|a_n| = |2n - 8| = \begin{cases} 8 - 2n, & 1 \leq n \leq 4, \\ 2n - 8, & n \geq 5. \end{cases}$

① 当 $1 \leq n \leq 4$ 时, $a_n \leq 0$, 所以 $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = -a_1 - a_2 - \cdots - a_n = -S_n = -n^2 + 7n$;

② 当 $n \geq 5$ 时, $a_n > 0$, 所以 $T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + \cdots + |a_n| = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + \cdots + a_n = S_n - 2S_4 = n^2 - 7n + 24$.

所以 $T_n = \begin{cases} -n^2 + 7n, & 1 \leq n \leq 4, \\ n^2 - 7n + 24, & n \geq 5. \end{cases}$

素养提升

1. B 解析: 由已知可知等差数列中 $S_{10} = 2\,000$, $S_{20} = 3\,500$, 因为 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等差数列, 所以 $2(S_{20} - S_{10}) = S_{10} + (S_{30} - S_{20})$, 所以 $2 \times (3\,500 - 2\,000) = 2\,000 + (S_{30} - 3\,500)$, 解得 $S_{30} = 4\,500$.

2. ABD 解析: $\because S_5 < S_6 = S_7 > S_8, \therefore a_6 > 0, a_7 = 0, a_8 < 0. \therefore d < 0. \therefore S_6$ 与 S_7 均为 S_n 的最大值. $S_9 - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 2(a_7 + a_8) < 0. \therefore S_9 < S_5$, 故 C 错误.

3. A 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值, 所以数列 $\{a_n\}$ 是递减的等差数列. 又 $a_{2\,022} + a_{2\,023} < 0, a_{2\,022} \cdot a_{2\,023} < 0$, 所以 $a_{2\,022} > 0 > a_{2\,023}$, 即数列的前 2 022 项为正数, 从第 2 023 项开始为负数, 由等差数列求和公式和性质可知, $S_{4\,043} = \frac{4\,043}{2} \cdot (a_1 + a_{4\,043}) = 4\,043a_{2\,022} > 0, S_{4\,044} = \frac{4\,044}{2} (a_1 + a_{4\,044}) =$

$2\,022(a_{2\,022} + a_{2\,023}) < 0$, 所以当 S_n 取最小正值时, $n=4\,043$.

4. 5 050 解析: 当 n 为奇数时, $a_{n+2} - a_n = 1$, 即数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列; 当 n 为偶数时, $a_{n+2} - a_n = 3$, 即数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列, 所以 $S_{100} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}) = \left(50 \times 1 + \frac{50 \times 49}{2} \times 1\right) + \left(50 \times 2 + \frac{50 \times 49}{2} \times 3\right) = 5\,050$.

5. 解: (1) 由 $a_1 = 9, a_4 + a_7 = 0$, 得 $a_1 + 3d + a_1 + 6d = 0$, 解得 $d = -2$, $\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 11 - 2n$.

(2) 由 (1) 知 $a_1 = 9, d = -2$,

$$\begin{aligned} S_n &= 9n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2) \\ &= -n^2 + 10n \\ &= -(n-5)^2 + 25, \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $n=5$ 时, S_n 取得最大值.

6. 解: 小金每天阅读时间构成以 $a_1 = 15$ 为首项, 以 $d=10$ 为公差的等差数列 $\{a_n\}$,

$$\text{则 } S_n = 15n + \frac{n(n-1)}{2} \times 10 \geq 50 \times 60,$$

$$\text{整理得 } n^2 + 2n - 600 \geq 0,$$

$$\text{设 } f(n) = n^2 + 2n - 600 (n \in \mathbf{N}^*),$$

因为 $f(n)$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 上单调递增,

$$\text{又 } f(23) = 23^2 + 2 \times 23 - 600 < 0,$$

$$f(24) = 24^2 + 2 \times 24 - 600 > 0,$$

所以他恰好读完这本书需要 24 天.

易错辨析

C 解析: 由 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+33}{n+3}$, 可设 $S_n = (3n+33) \cdot kn$, $T_n = (n+3) \cdot kn, kn \neq 0$, 则 $a_5 = S_5 - S_4 = 60k, b_5 = T_5 - T_4 = 12k$. 故 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{60k}{12k} = 5$. 故选 C.

滚动卷(一) 小测试(一)至(六)

综合拔高

1. D 解析: 由题意得数列的项分别为 $\sqrt{3 \times 1 - 1}, \sqrt{3 \times 2 - 1}, \sqrt{3 \times 3 - 1}, \sqrt{3 \times 4 - 1}, \cdots$, 由此可归纳数列的通项为 $a_n = \sqrt{3n-1}$, 令 $\sqrt{3n-1} = 4\sqrt{2}$, 解得 $n=11$, 故 $4\sqrt{2}$ 是这个数列的第 11 项.

2. B 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$, 又 $a_2 + a_3 + a_6 + a_7 = 2$, 所以 $a_4 + a_5 = 1$.

3. A 解析: $\lg x, \lg y, \lg z$ 成等差数列 $\Rightarrow 2\lg y = \lg x + \lg z \Rightarrow \lg(x \cdot z) = \lg y^2 \Rightarrow y^2 = xz$, 但 $y^2 = xz$ 不能保证 x, y, z 均为正数. 故选 A.

4. A 解析: 当 $n=1$ 时, $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} = -1$;

当 $n=2$ 时, $a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} = 2$;

当 $n=3$ 时, $a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2} = a_1$;

当 $n=4$ 时, $a_5 = 1 - \frac{1}{a_4} = -1 = a_2$;

当 $n=5$ 时, $a_6 = 2 = a_3$;

...

所以数列 $\{a_n\}$ 是一个周期为 3 的周期数列,

故 $a_{2\,023} = a_{3 \times 674 + 1} = a_1 = \frac{1}{2}$.

5. C 解析: 由题意可知, $a+b=1, \alpha+\beta=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}$

$= 1 + \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 3 +$

$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 5$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 取等号.

6. -1 解析: $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{99} = S_{99} - S_9 = \log_{10} 100 - \log_{10} 10 = (-2) - (-1) = -1$.

7. 7 解析: 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -5$; 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)^2 - 6(n-1) = n^2 - 8n + 7, a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 7$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = -5$ 符合上式, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 7$, 所以 $a_k = 2k - 7$. 由 $5 < 2k - 7 < 8$ 解得 $6 < k < 7.5$, 因为 k 为正整数, 所以 $k=7$.

8. 5 解析: 因为 $S_{k+2} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2} = a_1 + kd + a_1 + (k+1)d = 2a_1 + (2k+1)d = 2 \times 1 + (2k+1) \times 2 = 4k + 4 = 24$, 所以 $k=5$.

9. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d .

则 $\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9d = 30, \\ a_{20} = a_1 + 19d = 50, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1 = 12, \\ d = 2, \end{cases}$

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 12 + (n-1) \times 2 = 10 + 2n$.

(2) 由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 以及 $a_1 = 12, d = 2, S_n =$

242,

得方程 $242 = 12n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2$,

即 $n^2 + 11n - 242 = 0$,

解得 $n=11$ 或 $n=-22$ (舍去).

故 $n=11$.

10. 解: (1) 设 $S_n = an^2 + bn + c (a \neq 0)$.

$\therefore a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = 6$,

$\therefore \begin{cases} -2 = a + b + c, \\ -2 + 2 = 4a + 2b + c, \\ -2 + 2 + 6 = 9a + 3b + c, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -4, \\ c = 0. \end{cases}$

$\therefore S_n = 2n^2 - 4n$.

(2) $\{a_n\}$ 是等差数列, 理由如下:

$\therefore$ 等差数列的前 n 项和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d =$

$\frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$,

当 $d \neq 0$ 时, S_n 是不含常数项的二次函数,

$\therefore S_n = 2n^2 - 4n$ 符合等差数列前 n 项和的形式,

$\therefore \{a_n\}$ 是等差数列.

素养提升

1. B 解析: 因为数列 $\{\frac{2}{a_n+1}\}$ 是等差数列, 所以

$\frac{2}{a_1+1} + \frac{2}{a_5+1} = 2 \times \frac{2}{a_3+1}$, 又 $a_1 = 1, a_3 = -\frac{1}{3}$, 所

以 $\frac{2}{1+1} + \frac{2}{a_5+1} = 2 \times \frac{2}{-\frac{1}{3}+1}$, 解得 $a_5 = -\frac{3}{5}$.

2. C 解析: 设 $a_n = -24 + (n-1)d, n \in \mathbf{N}^*$,

由 $\begin{cases} a_9 = -24 + 8d \leq 0, \\ a_{10} = -24 + 9d > 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{8}{3} < d \leq 3$.

3. C 解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = An^2 + Bn$, 则 $\frac{S_n}{n} = An + B$, 所以 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列.

因为 $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2 = 2d$, 所以 $d = 1$, 所以 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的公

差为 1, 又 $\frac{S_1}{1} = \frac{a_1}{1} = -2\,018$, 所以 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是以

$-2\,018$ 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $\frac{S_{2\,020}}{2\,020} =$

$-2\,018 + 2\,019 \times 1 = 1$, 所以 $S_{2\,020} = 2\,020$.

4. $n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 解析: 由题设可得 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} + 1 = 0$,

即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$, 所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 故通项公式为 $\frac{a_n}{n} = n$, 所以 $a_n = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

5. (1) 证明: 将 $(a_{n+1} - 1)(a_n - 1) = 3[(a_n - 1) - (a_{n+1} - 1)]$, 两边同除以 $3(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)$ 得

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{3},$$

即 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}$,

$\therefore \{b_n\}$ 是等差数列.

(2) 解: $b_1 = 1$,

$\therefore b_n = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$,

则 $a_n - 1 = \frac{3}{n+2}$,

$\therefore a_n = \frac{n+5}{n+2}$.

6. 解: (1) 因为 $a_{n+1} = (n^2 + n - \lambda)a_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

且 $a_1 = 1$,

所以当 $a_2 = -1$ 时, 得 $-1 = 2 - \lambda$,

解得 $\lambda = 3$.

从而 $a_3 = (2^2 + 2 - 3) \times (-1) = -3$.

(2) 不存在实数 λ 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列. 理由如下:

由 $a_1 = 1, a_{n+1} = (n^2 + n - \lambda)a_n$, 得 $a_2 = 2 - \lambda$,

$a_3 = (6 - \lambda)(2 - \lambda)$,

$a_4 = (12 - \lambda)(6 - \lambda)(2 - \lambda)$.

若存在实数 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列,

则 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$,

即 $(5 - \lambda)(2 - \lambda) = 1 - \lambda$,

解得 $\lambda = 3$.

于是 $a_2 - a_1 = 1 - \lambda = -2$,

$a_4 - a_3 = (11 - \lambda)(6 - \lambda)(2 - \lambda) = -24$,

$a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$,

这与 $\{a_n\}$ 为等差数列矛盾.

所以不存在实数 λ 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列.

小测试(七) 等比数列的概念及通项公式

预习自评

1. D 2. C 3. B

基础过关

1. C 解析: $a_4 = a_1 q^3 = 64, a_1 = 8$, 则 $q = 2$. 故 $a_3 =$

$a_1 q^2 = 32$.

2. C 解析: $\frac{-8}{-4} = \frac{-4}{-2} = \frac{-2}{-1} = 2$, ①正确; $\frac{-3\sqrt{3}}{3} =$

$\frac{3}{-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, ②正确; 当 $a = 0$ 时, ③不是等

比数列, ③错误; $\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^3}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}$, 其中 $a \neq 0$,

④正确.

3. B 解析: 因为 $16a_1, 4a_2, a_3$ 成等差数列, 所以

$16a_1 + a_3 = 8a_2$, 即 $16a_1 + a_1 q^2 = 8a_1 q$, 则 $(q - 4)^2 = 0$, 解得 $q = 4$.

4. D 解析: $\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = q^2$, 故 $a_7 + a_8 = a_3 q^4 +$

$a_4 q^4 = q^4(a_3 + a_4) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 24 = 54$.

5. B 解析: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $a_4 + 2a_6 =$

a_2 , 所以 $a_1 q^3 + 2a_1 q^5 = a_1 q$, 即 $2q^4 + q^2 - 1 = 0$, 解得

$q^2 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_5 = a_1 q^4 = \frac{1}{4}$.

6. -4 解析: 由题意, 得 $(2a + 2)^2 = a(3a + 3)$, 解得

$a = -4$ 或 $a = -1$, 当 $a = -1$ 时, $2a + 2 = 0, 3a + 3 = 0$, 不满足条件. 当 $a = -4$ 时, 等比数列为 $-4, -6, -9, \dots$, 满足条件.

7. 3 解析: 因为已知正项等比数列 $\{a_n\}$, $3a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$

成等差数列, 所以 $\begin{cases} q > 0, \\ 2 \times \left(\frac{1}{2}a_1 q^2\right) = 3a_1 + 2a_1 q, \end{cases}$ 解得

$q = 3$. 所以 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 3$.

8. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意知 $q > 0$.

由已知得 $\begin{cases} a_1 q^4 = 8, \\ a_1 q^6 = 2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} q^2 = \frac{1}{4}, \\ a_1 = 128. \end{cases}$

$\therefore q > 0$,

$\therefore q = \frac{1}{2}$,

$\therefore a_n = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-8}}$.

(2) 由 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,

得 $\frac{1}{3} = \frac{9}{8} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

$$\text{即} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

解得 $n=4$.

$$(3) \because a_{n+4} = a_1 q^{n+3}, a_4 = a_1 q^3,$$

$$\text{又 } a_{n+4} = a_4,$$

$$\therefore q^n = 1,$$

$\therefore$ 当 n 为偶数时, $q = \pm 1$;

当 n 为奇数时, $q = 1$.

素养提升

1. B 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_4 + a_5 +$

$$a_6 = q^3(a_1 + a_2 + a_3), \text{ 即 } 6q^3 = -3, \text{ 可得 } q^3 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因此 } a_7 + a_8 + a_9 = q^3(a_4 + a_5 + a_6) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) = \frac{3}{2}.$$

2. C 解析: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_4 = a_1 q^3 = q^3 = 8$, 所以 $q = 2$, 所以 $a_5 + a_6 = a_1 q^4 + a_1 q^5 = 48$.

3. B 解析: 由 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 得 $a_{n+1} + 1 = 2a_n + 2 = 2(a_n + 1)$, 故数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 首项为 $a_1 + 1 = 2$, 公比为 2, 所以 $a_n + 1 = 2^n$, $a_n = 2^n - 1$.

4. $2n+2-63$ 解析: 由 $a_4 - a_3 = 2$ 知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$, 又 $a_1 + a_2 = 2a_1 + d = 10$, 故 $a_1 = 4$, 则 $a_n = 2n + 2$, 所以 $b_2 = 8, b_3 = 16$, 则等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q = 2, b_1 = 4$. 又 $b_6 = a_k$, 故 $2k + 2 = 4 \times 2^{6-1}$, 解得 $k = 63$.

5. 解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $3a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列,

$$\text{所以 } 2 \times \frac{1}{2}a_3 = 3a_1 + 2a_2,$$

$$\text{即 } a_1 q^2 = 3a_1 + 2a_1 q,$$

$$\text{即 } q^2 = 3 + 2q,$$

所以 $q = 3$ 或 $q = -1$ (舍去),

$$\text{所以 } a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n.$$

6. 解: (1) 因为 $S_1 = a_1 = 1$,

且数列 $\{S_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } S_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } S_2 = a_1 + a_2 = 2,$$

$$\text{故 } a_2 = 1;$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } S_3 = S_2 + a_3 = 2^{3-1} = 4,$$

$$\text{故 } a_3 = 2.$$

$$(2) \text{ 因为 } S_n = 2^{n-1}, \text{ 则 } S_{n-1} = 2^{n-2}.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2},$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$ 不满足上式,

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2^{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

因为 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$.

$$\text{故 } \frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

易错辨析

A 解析: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 则 $a_1 q^4 = -8a_1 q$. 又因为 $a_1 \neq 0, q \neq 0$, 所以 $q^3 = -8$, 解得 $q = -2$. 因为 $a_5 > a_2$, 所以 $a_2 < 0, a_5 > 0$, 从而 $a_1 > 0$, 即 $a_1 = 1$. 故 $a_n = (-2)^{n-1}$.

小测试(八) 等比数列的性质与应用

预习自评

1. A 2. B 3. C

基础过关

1. D 解析: 因为 $q = -\frac{1}{4} < 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是摆动数列.

2. D 解析: 因为 $a_2 a_7 = 4$, 所以 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_8 = \log_2 (a_1 a_2 \cdots a_8) = \log_2 (a_2 a_7)^4 = \log_2 4^4 = 8$. 故选 D.

3. A 解析: 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 a_7 = a_5^2, a_4 a_8 = a_5 a_7$, 则 $a_3 a_7 + 2a_4 a_8 + a_7^2 = a_5^2 + 2a_5 a_7 + a_7^2 = (a_5 + a_7)^2$, 依题意, 知 $(a_5 + a_7)^2 = 16$, 而 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 于是得 $a_5 + a_7 = 4$.

4. C 解析: $\because T_{13} = 4T_9, \therefore a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10} a_{11} a_{12} \cdots a_{13} = 4a_1 a_2 \cdots a_9, \therefore a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} = 4$. 又 $\because a_{10} \cdot a_{13} = a_{11} \cdot a_{12} = a_8 \cdot a_{15}, \therefore (a_8 \cdot a_{15})^2 = 4, \therefore a_8 a_{15} = \pm 2$. 又 $\because \{a_n\}$ 为递减数列, $\therefore q > 0, \therefore a_8 a_{15} = 2$.

5. A 解析: 因为 $A_9 = a_1 a_2 a_3 \cdots a_9 = a_5^9, B_9 = b_1 b_2 b_3 \cdots b_9 = b_5^9$, 所以 $\frac{A_9}{B_9} = \left(\frac{a_5}{b_5}\right)^9 = 2^9 = 512$.

6. 3 解析: 由 $\begin{cases} a_2 a_3 = a_1 a_4 = 6, \\ a_1 + a_4 = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_4 = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_4 = 2. \end{cases}$ 因为数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 $a_1 = 2, a_4 = 3$.

7. $-\frac{5}{3}$ 解析: 因为 $\frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_{10}} = \frac{a_7 + a_{10}}{a_7 a_{10}}, \frac{1}{a_8} + \frac{1}{a_9} =$

$$\frac{a_8+a_9}{a_8a_9}, \text{由等比数列的性质知 } a_7a_{10}=a_8a_9, \text{所以}$$

$$\frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_8} + \frac{1}{a_9} + \frac{1}{a_{10}} = \frac{a_7+a_8+a_9+a_{10}}{a_8a_9} = \frac{15}{8} \div$$

$$\left(-\frac{9}{8}\right) = -\frac{5}{3}.$$

8. 解: $\because \{a_n\}$ 为等比数列,

$$\therefore a_1 \cdot a_9 = a_3 \cdot a_7 = 64.$$

$$\text{又 } \because a_3 + a_7 = 20,$$

$$\therefore a_3 = 4, a_7 = 16 \text{ 或 } a_3 = 16, a_7 = 4.$$

$$\text{①当 } a_3 = 4, a_7 = 16 \text{ 时, } \frac{a_7}{a_3} = q^4 = 4,$$

$$\text{此时 } a_{11} = a_3 q^8 = 4 \times 4^2 = 64.$$

$$\text{②当 } a_3 = 16, a_7 = 4 \text{ 时, } \frac{a_7}{a_3} = q^4 = \frac{1}{4},$$

$$\text{此时 } a_{11} = a_3 q^8 = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1.$$

素养提升

1. D 解析: 若 $a_1 = -2, q = 2 > 1$, 则 $\{a_n\}$ 的各项为 $-2, -4, -8, \dots$, 是递减数列, A 不正确; 若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项为 $-16, -8, -4, -2, \dots$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $q = \frac{1}{2} < 1$, B 不正确; 若 $a_1 = -16, q = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, 则 $\{a_n\}$ 的各项为 $-16, -8, -4, \dots$, 显然是递增数列, C 不正确. 综上可知, 只有 D 正确.

2. A 解析: 因为 $a_5a_6 + a_4a_7 = 18, a_5a_6 = a_4a_7$, 所以 $a_5a_6 = 9$, 所以 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} = \log_3 (a_1a_2 \cdots a_{10}) = \log_3 (a_5a_6)^5 = \log_3 9^5 = 10$. 故选 A.

3. B 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据题意, 依次分析选项. 对于 A, 当 $q < 0$ 时, a_k 与 a_{k+1} 异号, 则 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$, A 错误; 对于 B, $a_k \cdot a_{k+2} = a_k \cdot a_k \cdot q^2 = (a_k \cdot q)^2 > 0$, B 正确; 对于 C, $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} = a_k^3$, 则 $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} > 0$ 不一定成立, C 错误; 对于 D, $a_k \cdot a_{k+3} = a_k^2 \cdot q^3$, 则 $a_k \cdot a_{k+3} > 0$ 不一定成立, D 错误.

4. 12 解析: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, 由已知, 得 $a_1a_2a_3 = 2, a_{n-2}a_{n-1}a_n = 4$, 又由等比数列的性质, 得 $(a_1a_n)^3 = 8$, 所以 $a_1a_n = 2$. 又因为 $a_1a_2a_3 \cdots a_n = 64 = 2^6 = (a_1a_n)^6$, 所以该数列有 12 项.

5. (1) 证明: 因为 $b_n = \log_2 a_n$,

$$\text{所以 } b_{n+1} - b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = \log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_2 q$$

($q > 0$) 为常数,

所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列且公差 $d = \log_2 q$.

(2) 解: 因为 $b_1 + b_3 + b_5 = 6$,

$$\text{所以 } (b_1 + b_5) + b_3 = 2b_3 + b_3 = 3b_3 = 6,$$

$$\text{即 } b_3 = 2.$$

又因为 $a_1 > 1$,

$$\text{所以 } b_1 = \log_2 a_1 > 0,$$

又因为 $b_1b_3b_5 = 0$,

$$\text{所以 } b_5 = 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} b_3 = 2, \\ b_5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} b_1 + 2d = 2, \\ b_1 + 4d = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b_1 = 4, \\ d = -1, \end{cases}$$

$$\text{因此 } S_n = 4n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = \frac{9n-n^2}{2}.$$

又因为 $d = \log_2 q = -1$,

$$\text{所以 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } b_1 = \log_2 a_1 = 4,$$

$$\text{所以 } a_1 = 16,$$

$$\text{所以 } a_n = 2^{5-n} (n \in \mathbf{N}^*).$$

6. 解: (1) 由题意得 $a_1 = 5 \times 1.5 - 1.5 = 6$,

$$a_2 = 6 \times 1.5 - 1.5 = 7.5,$$

$$a_3 = 7.5 \times 1.5 - 1.5 = 9.75,$$

$\dots$,

$$a_{n+1} = 1.5a_n - 1.5,$$

$$\text{则 } a_{n+1} - 3 = 1.5(a_n - 3),$$

$$\text{又 } a_1 - 3 = 3,$$

所以数列 $\{a_n - 3\}$ 是首项为 3, 公比为 1.5 的等比数列.

$$(2) \text{由(1)可得, } a_n - 3 = 3 \times 1.5^{n-1},$$

$$\text{所以 } a_n = 3 + 3 \times 1.5^{n-1},$$

$$\text{令 } a_n = 3 + 3 \times 1.5^{n-1} > 21,$$

$$\text{即 } n-1 > \frac{\lg 6}{\lg 1.5} = \frac{\lg 3 + \lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \approx 4.42,$$

$$\text{所以 } n > 5.42,$$

故至少到 2026 年的年底, 企业的剩余资金会超过 21 千万元.

易错辨析

2ⁿ 解析: 由 $2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$, 整理得 $2q^2 -$

$5q+2=0$, 解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$. 由 $a_5^2=a_{10}=a_1q^9>0$, 得 $a_1>0$. 又因为数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $q=2$. 由 $(a_1q^4)^2=a_1q^9$, 解得 $a_1=q=2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

小测试(九) 等比数列的前 n 项和公式

预习自评

1. C 2. A 3. A

基础过关

1. D 解析: 因为 $2a_{n+1}=a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$, 又 $a_1=1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 所以 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 所以 $S_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}=2-a_n$. 故选 D.

2. B 解析: 根据题意, 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 $\frac{189}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$, 则有 $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{189}{4}$, 解得 $a_1=24$, 则 $a_6=a_1q^5=\frac{3}{4}$.

3. C 解析: 当 $q=1$ 时, $S_4=4a_1=2 \times 2a_1=2S_2$, 满足题意; 当 $q \neq 1$ 时, 由 $S_4=2S_2$, 得 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^2)}{1-q}$, 即 $1+q^2=2$, 解得 $q=-1$. 综上所述, $q=\pm 1$.

4. C 解析: 由题可得此人每天走的路程形成以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列 $\{a_n\}$, 则 $S_6=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=252$, 解得 $a_1=128$, 故此人后四天走的路程为 $S_6-S_2=252-(128+64)=60$ (里).

5. C 解析: 因为 $a_1=1, a_{n+1}=-2a_n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比 $q=-2$ 的等比数列, 所以 $a_n=a_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$, 所以 $b_n=|a_n|=|(-2)^{n-1}|=2^{n-1}$, 所以 $b_1=1, \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 所以 $S_n=\frac{1 \times (1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

6. $\frac{1}{2}$ 解析: $S_3=\frac{2 \times (1-q^3)}{1-q}=\frac{7}{2}$, 解得 $q=\frac{1}{2}$ (负值已舍去).

7. 5 3 解析: 由 $S_n=93, a_n=48$, 公比 $q=2$, 得 $\begin{cases} a_1(2^n-1)=93, \\ a_1 \cdot 2^{n-1}=48, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=3, \\ n=5. \end{cases}$

8. 解: (1) 依题意有 $a_1+(a_1+a_1q)=2(a_1+a_1q+a_1q^2)$,

由于 $a_1 \neq 0$, 故 $2q^2+q=0$.

又 $q \neq 0$, 从而 $q=-\frac{1}{2}$.

(2) 由已知可得 $a_1-a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^2=3$,

故 $a_1=4$.

从而 $S_n=\frac{4 \times \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{3} \times \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

素养提升

1. A 解析: 设公比为 q , 则 $\begin{cases} a_1+a_1q=9, \\ a_1^2q=18. \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a_1=3, \\ q=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=6, \\ q=\frac{1}{2} \end{cases}$ (舍去). 所以 $a_n=3 \times 2^{n-1}, S_n=\frac{3(1-2^n)}{1-2}=3 \times 2^n-3$.

2. D 解析: 设公比为 q , 若 $q=1$, 则 $a_n=a_1$, 所以 $S_n=na_1$, 所以 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1}{5a_1}=2$, 不合题意, 所以 $q \neq 1, S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 所以 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=1+q^5=\frac{1}{2}$, 即

$q^5=-\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{S_{15}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{15})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\frac{1-(q^5)^3}{1-q^5}=\frac{3}{4}$.

3. B 解析: 由题意设 $\{a_n\}$ 的公比为 q . $\because a_1+a_n=34, a_3a_{n-2}=a_1a_n=64 (n>2, n \in \mathbf{N}^*)$, $\therefore a_1=2, a_n=32$, $\therefore S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{2-32q}{1-q}=42$, 解得 $q=4$. 故选 B.

4. $\frac{8}{3}$ 解析: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$. 因为 $a_3a_{11}=2a_5^2$, 所以 $a_7^2=2a_5^2$, 所以 $q^4=2$, 所以 $q \neq 1$.

因为 $S_4 + S_{12} = \lambda S_8$, 所以 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = \frac{\lambda a_1(1-q^8)}{1-q}$, 所以 $1 - q^4 + 1 - q^{12} = \lambda(1 - q^8)$, 将 $q^4 = 2$ 代入可得 $\lambda = \frac{8}{3}$.

5. 解: (1) 设公比为 q ,

$$\text{则 } \frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 q^2 + a_2 q^2}{a_1 + a_2} = q^2,$$

$$\text{所以 } q^2 = \frac{54}{6} = 9,$$

解得 $q = 3$ (负值已舍去),

$$\text{则 } a_1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以 } a_5 = a_1 q^4 = \frac{243}{2}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } a_1 = \frac{3}{2}, q = 3,$$

$$\text{则数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3^n}{2} \times 3}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 3}{4}.$$

6. 解: (1) 设公比为 q , 依题意 $\begin{cases} a_2 + 1 - a_1 = -3, \\ a_3 - a_2 - 1 = -3, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 q - a_1 = -4, \\ a_1 q^2 - a_1 q = -2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} q = \frac{1}{2}, \\ a_1 = 8, \end{cases}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{4-n}$.

$$(2) \text{ 结合 (1) 可知 } b_n = a_{2n} = 2^{4-2n},$$

$$\text{所以 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{4},$$

$$b_1 = 2^{4-2 \times 1} = 2^2 = 4,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 4, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列.

$$\text{所以 } S_n = \frac{4 \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3} - \frac{4^{2-n}}{3}.$$

易错辨析

B 解析: 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = \frac{3}{2}$, $S_3 = \frac{9}{2}$. 当

$q = 1$ 时, $a_1 = \frac{3}{2}$, 满足题意; 当 $q \neq 1$ 时,

$$\begin{cases} a_3 = a_1 q^2 = \frac{3}{2}, \\ S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{9}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 6, \\ q = -\frac{1}{2}. \end{cases} \text{ 综上, } q = 1$$

或 $q = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

小测试(十) 等比数列前 n 项和的性质及应用

预习自评

1. B 2. B 3. A

基础过关

1. B 解析: 由等比数列的性质可知, 数列 S_3 , $S_6 - S_3$, $S_9 - S_6$, $S_{12} - S_9$ 成等比数列, 即数列 4, 8, $S_9 - S_6$, $S_{12} - S_9$ 成等比数列, 因此 $S_9 - S_6 = 16$, $S_6 = 12$, $S_{12} - S_9 = 32$, $S_{12} = 32 + 16 + 12 = 60$.

2. B 解析: 设 $S_2 = k$, $S_4 = 3k$, 由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列 (易知数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq -1$), 得 S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 为等比数列. 又 $S_2 = k$, $S_4 - S_2 = 2k$, $\therefore S_6 - S_4 = 4k$, $\therefore S_6 = 7k$, $\therefore \frac{S_6}{S_4} = \frac{7k}{3k} = \frac{7}{3}$.

3. A 解析: $\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n+1$ 项, $\therefore$ 等比数列中偶数项有 n 项, 奇数项有 $n+1$ 项. 由题意得 $q \neq \pm 1$, $\therefore$ 偶数项之和为 $\frac{a_1 q(1-q^{2n})}{1-q^2} = 84$, $\therefore \frac{q^2 - q^{2n+2}}{1-q^2} = 42q$, 奇数项之和为 $\frac{a_1(1-q^{2n+2})}{1-q^2} = 170$, $\therefore \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2} = 85$, 两式相减得 $-1 = 42q - 85$, 解得 $q = 2$, $\therefore \frac{2 \times 2(1-4^n)}{1-4} = 84$, 即 $4^n = 64$, 解得 $n = 3$. 故选 A.

4. B 解析: 设 $S_{15} = x$, $\therefore S_5$, $S_{10} - S_5$, $S_{15} - S_{10}$ 为等比数列, $S_5 = 10$, $S_{10} = 50$, $\therefore 10, 40, x - 50$ 为等比数列, $\therefore 40^2 = 10(x - 50)$, 解得 $x = 210$. 故选 B.

5. B 解析: $\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2^n - 1$, ① $\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = 2^{n-1} - 1 (n \geq 2)$, ② ① - ② 得 $a_n = 2^{n-1} (n \geq 2)$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ 满足 $a_n = 2^{n-1}$, $\therefore a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$. $\therefore a_n^2 = 4^{n-1}$, $\therefore$ 数列 $\{a_n^2\}$ 是以 1 为首项, 4 为公比的等比数列, $\therefore a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{1}{3} (4^n - 1)$. 故选 B.

6. 6 解析: 每天植树的棵数构成以 2 为首项, 2 为公

比的等比数列,其前 n 项和 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} =$

$$\frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2. \text{ 由 } 2^{n+1} - 2 \geq 100, \text{ 得 } 2^{n+1} \geq$$

102. 由于 $2^6 = 64, 2^7 = 128$, 则 $n+1 \geq 7$, 即 $n \geq 6$.

7. $\frac{1}{2}$ 解析: 由 $2^{10}S_{30} - (2^{10}+1)S_{20} + S_{10} = 0$, 得 $2^{10} \cdot$

$(S_{30} - S_{20}) = S_{20} - S_{10}$. 又 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等比数列, $\therefore \frac{S_{30} - S_{20}}{S_{20} - S_{10}} = q^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. 又 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, $\therefore q = \frac{1}{2}$.

8. 解: (1) 由题意知 $S_6 \neq 2S_3, q \neq 1$,

由等比数列的前 n 项和等距分段的性质知,

$$q^3 = \frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{63-7}{7} = 8,$$

故 $q = 2$,

$$\therefore S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 7,$$

代入 q 可得 $a_1 = 1$,

$$\therefore a_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由 (1) 知 $b_n = 2^{n-1} + n - 1$,

$$\therefore T_n = (1+2+\cdots+2^{n-1}) + [1+2+\cdots+(n-1)] = 2^n + \frac{n^2-n}{2} - 1.$$

素养提升

1. A 解析: 由 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $S_4 = 10, S_{12} = 70$, 知 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq -1$, 所以 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8$ 构成等比数列, 所以 $(S_8 - S_4)^2 = S_4(S_{12} - S_8)$, 即 $(S_8 - 10)^2 = 10(70 - S_8)$, 化简并整理得 $S_8^2 - 10S_8 - 600 = 0$, 又 $S_8 = S_4 + q^4 S_4 > 0$, 解得 $S_8 = 30$ 或 $S_8 = -20$ (舍去).

2. D 解析: 因为 $S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 90$, 令 $S = a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}$, 则 $2S = a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}$, 所以 $S + 2S = S_{100} = 90$, 所以 $S = 30$, 故 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2S = 60$. 故选 D.

3. A 解析: 由 $a_1 = 1, a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k+1} = 85$, 得 $a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1} = 85 - 1 = 84$, 则 $(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k})q = 84$, 又 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} = 42$, 所以 $84 = 42q$, 解得 $q = 2$. 故选 A.

4. 32 解析: 由等比数列的性质, 知 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 成等比数列. 又 $S_6 - 3S_3 = 4, \therefore S_9 - S_6 = \frac{(S_6 - S_3)^2}{S_3} = \frac{(4+2S_3)^2}{S_3} = 4S_3 + \frac{16}{S_3} + 16 \geq 2\sqrt{64} +$

$16 = 32$, 当且仅当 $S_3 = 2$ 时, 等号成立, $\therefore S_9 - S_6$ 的最小值为 32.

5. (1) 证明: 由 $a_{n+1} = 4a_n - 3$ 得 $a_{n+1} - 1 = 4(a_n - 1)$,

因为 $a_1 - 1 = 1$,

所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 1, 公比为 4 的等比数列.

(2) 解: 由 (1) 可得 $a_n - 1 = 4^{n-1}$,

所以 $a_n = 4^{n-1} + 1$,

$$\text{故 } S_n = 4^0 + 4^1 + \cdots + 4^{n-1} + n = \frac{4^n - 1}{3} + n.$$

6. (1) 解: 由 $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1$, 得 $a_1 = q^{-4}$,

从而 $a_2 = a_1 q = q^{-3}$,

$$a_3 = a_1 q^2 = q^{-2},$$

$$a_4 = a_1 q^3 = q^{-1},$$

又 $a_2, a_3 + 1, a_4$ 成等差数列,

所以 $2(a_3 + 1) = a_2 + a_4$,

$$\text{即 } 2(q^{-2} + 1) = q^{-3} + q^{-1} = q^{-1}(q^{-2} + 1),$$

$$\text{解得 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a_1 = q^{-4} = 16,$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}.$$

(2) 证明: 由 (1) 得

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \\ &= \frac{16 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 32 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] < 32. \end{aligned}$$

易错辨析

1. $\begin{cases} n+1, a=1, \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, a \neq 1 \end{cases}$ 解析: 当 $a = 0$ 时, $1 + a + a^2 +$

$a^3 + \cdots + a^n = 1$; 当 $a = 1$ 时, $1 + a + \cdots + a^n = n+1$;

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, 当

$a = 0$ 时, 也满足此式. 综上, $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots +$

$$a^n = \begin{cases} n+1, a=1, \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, a \neq 1. \end{cases}$$

2. $\frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$ 解析: $\therefore$ 数列 $2, 2^4, \dots, 2^{3n+10}$ 是首项

为 2, 公比为 $2^3 = 8$, 项数为 $n+4$ 的等比数列,

$$\therefore f(n) = \frac{2(1-8^{n+4})}{1-8} = \frac{2}{7} \cdot (8^{n+4} - 1).$$

小测试(十一) 数列求和

预习自评

1. B 2. C 3. B

基础过关

1. C 解析: 因为 $\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = 1$, 所以

$$\log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \text{ 则 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 是以 } 1 \text{ 为首}$$

项, 2 为公比的等比数列, 所以 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.

2. C 解析: 因为 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 1$ 且 $a_1^2 = 1$, 所以数列 $\{a_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $a_n^2 = 1 + n - 1 = n$, 因为数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 则 $a_n = \sqrt{n}$,

$$\text{则 } \frac{1}{a_{n+1} + a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = -\sqrt{n} + \sqrt{n+1}, \text{ 所}$$

以数列 $\left\{\frac{1}{a_{n+1} + a_n}\right\}$ 的前 99 项之和为 $-1 + \sqrt{2} -$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \dots - \sqrt{99} + \sqrt{100} = 10 - 1 = 9.$$

3. C 解析: 由 $a_1 + a_5 = 17, a_2 a_4 = 16$, 即 $a_1 + a_1 q^4 = 17, a_1 q \cdot a_1 q^3 = 16$, 又 $q \in (0, 1)$, 两式联立可得,

$$a_1 = 16, q = \frac{1}{2} (q = 2 \text{ 已舍去}), \text{ 所以 } a_n = a_1 q^{n-1} =$$

2^{5-n} . 所以 $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{5-n} = 5 - n$, 当 $n \leq 4$ 时, $b_n > 0$; 当 $n = 5$ 时, $b_n = 0$; 当 $n > 5$ 时, $b_n < 0$, 所以要使 S_n 最大, 只需 $n = 4$ 或 $n = 5$.

4. AB 解析: $\because a_{n+1} = 2a_n + 3, \therefore a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$,

又 $a_1 + 3 = 4, \therefore$ 数列 $\{a_n + 3\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n + 3 = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}, \therefore a_n =$

$$2^{n+1} - 3, \therefore a_3 = 13, \therefore S_n = \frac{4 \times (1-2^n)}{1-2} - 3n =$$

$$2^{n+2} - 3n - 4. \text{ 故选 AB.}$$

5. B 解析: 因为 $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_3 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}a_n = n$,

$$\text{则当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_3 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}a_{n-1} =$$

$$n-1, \text{ 两式相减得 } \frac{1}{2^{n-1}}a_n = 1, \text{ 所以 } a_n = 2^{n-1} (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$, 满足 $a_n = 2^{n-1}$, 所以 $a_n = 2^{n-1}$, 所以 $na_n = n \cdot 2^{n-1}$. 设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

$$S_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-2} +$$

$$n \cdot 2^{n-1} \text{ ①, } 2S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \text{ ②, ① - ② 得, } -S_n = 1 + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - n \cdot 2^n = 1 - n \cdot 2^n + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = (1-n) \cdot 2^n - 1, \text{ 所以 } S_n = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$

6. 44.5 解析: 设 $S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$, ①

将①式右边反序得, $S = \sin^2 89^\circ + \sin^2 88^\circ + \dots + \sin^2 3^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 1^\circ$, ②

① + ② 得, $2S = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 89^\circ + \sin^2 1^\circ) = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ) = 89, \therefore S = 44.5.$

7. $\sqrt{n+3} - \sqrt{3}$ 解析: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}} =$

$$\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3})(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})} =$$

$$\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{(n+3) - (n+2)} = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}, \therefore S_n = a_1 +$$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) = \sqrt{n+3} - \sqrt{3}.$$

8. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 6d = 10, \\ (a_1 + d)(a_1 + 6d) = (a_1 + 2d)^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{5}{2}, \\ d = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = -2, \\ d = 3. \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{5}{2} \text{ 或 } a_n = -2 + 3(n-1) = 3n-5.$$

$$(2) \text{ 当 } a_n = \frac{5}{2} \text{ 时, } b_n = \frac{5}{2} + 2^n,$$

$$\text{此时 } S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$= \frac{5}{2}n + \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2}$$

$$= 2^{n+1} + \frac{5}{2}n - 2;$$

$$\text{当 } a_n = 3n-5 \text{ 时, } b_n = (3n-5) + 2^n,$$

$$\text{此时 } S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$= \frac{-2+3n-5}{2} \cdot n + \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2}$$

$$= 2^{n+1} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n - 2.$$

素养提升

1. C 解析:由题意得 $S_{30} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{29}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{30}) = (1 + 2 + \cdots + 15) + (1 + 2 + \cdots + 15) = \frac{15 \times 16}{2} \times 2 = 240$.

2. D 解析:由题意,当 $n \geq 2$ 时,可得 $S_{n-1} = S_n - a_n$, 因为 $a_n + 2S_{n-1} = n$, 所以 $a_n + 2(S_n - a_n) = n$, 即 $2S_n = a_n + n$, 当 $n \geq 3$ 时, $2S_{n-1} = a_{n-1} + n - 1$, 两式相减, 可得 $2a_n = a_n - a_{n-1} + 1$, 即 $a_n + a_{n-1} = 1$, 所以 $a_2 + a_3 = 1, a_4 + a_5 = 1, a_6 + a_7 = 1, \cdots$, 所以 $S_{2023} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2022} + a_{2023}) = 1 + \frac{2023-1}{2} \times 1 = 1012$.

3. C 解析: $\because$ 正项数列 $\{a_n\}$ 是公比不等于 1 的等比数列, 且 $\lg a_1 + \lg a_{2023} = 0, \therefore \lg(a_1 \cdot a_{2023}) = 0$, 即 $a_1 \cdot a_{2023} = 1$. $\because$ 函数 $f(x) = \frac{2}{1+x^2}, \therefore f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+2x^2}{1+x^2} = 2$. 令 $T = f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{2023})$, 则 $T = f(a_{2023}) + f(a_{2022}) + \cdots + f(a_1), \therefore 2T = f(a_1) + f(a_{2023}) + f(a_2) + f(a_{2022}) + \cdots + f(a_{2023}) + f(a_1) = 2 \times 2023, \therefore T = 2023$.

4. 9 216 解析:设公比为 q , 由 $a_2 = 2, a_5 = 16$, 可得 $\begin{cases} a_1 q = 2, \\ a_1 q^4 = 16, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2, \end{cases}$ 则 $a_n = 2^{n-1}$, 令 $2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 10 \cdot 2^9 = m$ ①, ① $\times 2$ 得 $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 10 \cdot 2^{10} = 2m$ ②, ① - ② 得 $2 \cdot 2^1 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^9) - 10 \cdot 2^{10} = -m$, 则 $-m = 2 \cdot 2^1 + \frac{2^2(1-2^8)}{1-2} - 10 \cdot 2^{10} = -9 \cdot 2^{10} = -9 \cdot 216$, 则 $m = 9 \cdot 216$, 即 $2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} = 9 \cdot 216$.

5. 解:(1)由已知,得

$$\begin{cases} 2a_2 + a_3 + a_5 = 4a_1 + 8d = 20, \\ 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10a_1 + 45d = 100, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$.

$$(2)b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$.

6. (1)证明:由 $2S_n = n(a_1 + a_n)$,

当 $n \geq 2$ 时,有 $2S_{n-1} = (n-1)(a_1 + a_{n-1})$,

两式相减得 $(n-2)a_n - (n-1)a_{n-1} + a_1 = 0$,

同理可得 $(n-1)a_{n+1} - na_n + a_1 = 0$,

于是得 $(2n-2)a_n - (n-1)a_{n-1} - (n-1)a_{n+1} = 0$,

即 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$,

而当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(2)解:由(1)知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 = 5$,

设公差为 d ,

由 a_1, a_2, a_5 成等比数列可得 $a_2^2 = a_1 a_5$,

$$\text{两式联立} \begin{cases} a_1 + 2d = 5, \\ (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 4d), \end{cases}$$

解得 $a_1 = 5, d = 0$ 或 $a_1 = 1, d = 2$,

当 $a_1 = 5, d = 0$ 时,

$$S_{4n} = 20n;$$

当 $a_1 = 1, d = 2$ 时,

$$S_{4n} = 4n + \frac{4n(4n-1)}{2} \times 2 = 16n^2.$$

易错辨析

解:(1) $\because S_1 = a_1 = 1$, 且数列 $\{S_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列,

$$\therefore S_n = 2^{n-1}.$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2}$;

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 不满足上式.

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2^{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

(2) $\because$ 数列 $a_3, a_5, \cdots, a_{2n+1}$ 是以 2 为首项, 4 为公比的等比数列,

$$\therefore a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1} = \frac{2(1-4^n)}{1-4} = \frac{2(4^n-1)}{3},$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = 1 + \frac{2(4^n-1)}{3} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

小测试(十二) 数列的综合应用

预习自评

1. B 2. B 3. A

基础过关

1. D 解析:根据题意,设数列 $\{c_n\}$ 为: 9, 99, 999,

9 999, ..., 其通项公式是 $10^n - 1$, 数列 2, 22, 222, 2 222, ... 的每一项均是数列 $\{c_n\}$ 对应项的 $\frac{2}{9}$, 则数列 2, 22, 222, 2 222, ... 的一个通项公式是 $a_n = \frac{2(10^n - 1)}{9}$. 故选 D.

2. A 解析: 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$, 且 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2(a_2 + a_7) = 8$, 所以 $a_2 + a_7 = 4$. 又因为 $a_2 + a_7 \geq 2\sqrt{a_2 a_7}$, 所以 $a_2 a_7 \leq 4$, 当且仅当 $a_2 = a_7 = 2$ 时, 等号成立. 故选 A.

3. C 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 由题意知

$$q \neq 1, \text{ 则 } \begin{cases} a_1(1+q^3) = \frac{9}{4}, \\ \frac{a_1}{1-q}(1-q^6) = \frac{9a_1}{1-q}(1-q^3), \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4}, \\ q = 2, \end{cases} \text{ 所以 } a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1} = 2^{n-3}, \text{ 所以 } b_n = n-3, \text{ 所以数列 } \{b_n\} \text{ 的前 10 项和 } T_{10} = \frac{10(b_1 + b_{10})}{2} = 5 \times (-2 + 7) = 25. \text{ 故选 C.}$$

4. B 解析: $\because$ 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_6 + a_7 < 0$, 且 $S_{11} > 0$, $\therefore S_{11} = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11}) = 11a_6 > 0$, $\therefore a_6 > 0$, $a_7 < 0$, $\therefore \{S_n\}$ 中最大的是 S_6 . 故选 B.

5. C 解析: 由等差数列性质知 $a_1 + a_{15} = a_4 + a_{12}$, $\therefore a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = -a_8 = \frac{\pi}{4}$, 解得 $a_8 = -\frac{\pi}{4}$. 又 $a_3 + a_{13} = 2a_8$, $\therefore \sin(a_3 + a_{13}) = \sin(2a_8) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. 故选 C.

6. 150 解析: 由数列 $\{a_n\}$ 的通项公式得 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = -4, a_6 = 1, a_7 = 8, a_8 = 1, \dots$, 四项为一组, 每组的和都是 6, 故 $S_{100} = 25 \times 6 = 150$.

7. $\frac{1023}{1024}$ 解析: $\because a_1 = 2$, 且 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, $\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 2 = \frac{2-2^n}{1-2} + 2 = 2^n$, 当 $n=1$ 时上式也成立, $\therefore a_n = 2^n$, $\therefore \frac{1}{a_n} = (\frac{1}{2})^n$. $\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 10 项和为 $\frac{\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2^{10}})}{1 - \frac{1}{2}} =$

$$\frac{1023}{1024}.$$

8. 解: (1) 由题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } 3a_1 + 3d = 18,$$

$$3a_1 + 12d = 54,$$

$$\text{解得 } a_1 = 2, d = 4,$$

$$\therefore a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\begin{aligned} (2) \because b_n &= \frac{4}{a_n \cdot a_{n+1}} \\ &= \frac{4}{(4n-2)(4n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

素养提升

1. C 解析: 令 $a_n = (n+3) \left(\frac{8}{9} \right)^n$, 则 $a_{n+1} - a_n = (n+4) \left(\frac{8}{9} \right)^{n+1} - (n+3) \left(\frac{8}{9} \right)^n = \left(\frac{8}{9} \right)^n \cdot \frac{5-n}{9}$, 则 $a_5 = a_6$. 故当 $n \leq 5$ 时, 数列 $\left\{ (n+3) \left(\frac{8}{9} \right)^n \right\}$ 单调递增; 当 $n \geq 6$ 时, 数列 $\left\{ (n+3) \left(\frac{8}{9} \right)^n \right\}$ 单调递减, 所以第 5 项或第 6 项是数列的最大项. 故选 C.

2. C 解析: 因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^n (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $a_n = a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \dots + a_n - a_{n-1} = 2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 + \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^n < \frac{5}{2}$. 因为 $a_n < M$ 恒成立, 所以 $M \geq \frac{5}{2}$, 即 M 的最小值是 $\frac{5}{2}$. 故选 C.

3. A 解析: 由 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 得, $a_2 + a_3 + a_5 + a_7 +$

$a_9 + a_{11} = a_4 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = a_6 + a_7 + a_9 + a_{11} = a_8 + a_9 + a_{11} = a_{10} + a_{11} = a_{12}$, $\therefore a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = a_{12} - a_2$, 即 $k=12$. 故选 A.

$$4. \begin{cases} 130-10n, n \leq 6, \\ 70 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}, n \geq 7 \end{cases} \quad \text{解析: 当 } n \leq 6 \text{ 时, 数列 } \{a_n\}$$

是首项为 120, 公差为 -10 的等差数列, 故 $a_n = 120 - 10(n-1) = 130 - 10n$; 当 $n \geq 7$ 时, $a_6, a_7, \dots$,

a_n 是首项为 $a_6 = 70$, 公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列, 故 $a_n =$

$$70 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}. \text{ 综上可得 } a_n = \begin{cases} 130-10n, n \leq 6, \\ 70 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}, n \geq 7. \end{cases}$$

5. 解: (1) $\because a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$,

$$\therefore a_n \neq 0,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{则 } b_n = 2 - \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 2n + 2.$$

$$(2) \text{ 由 } b_n = 2n + 2, \text{ 得 } T_n = n^2 + 3n,$$

$$\therefore m \geq -2n^2 + 6n \text{ 对任意正整数 } n \text{ 都成立.}$$

$$\therefore -2n^2 + 6n = -2\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{当 } n=1 \text{ 或 } n=2 \text{ 时, } -2n^2 + 6n \text{ 取得最大值 } 4.$$

$$\therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围是 } [4, +\infty).$$

6. (1) 证明: 由题设得 $4(a_{n+1} + b_{n+1}) = 2(a_n + b_n)$,

$$\text{即 } a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

$$\text{又因为 } a_1 + b_1 = 1,$$

所以 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$\text{由题设得 } 4(a_{n+1} - b_{n+1}) = 4(a_n - b_n) + 8,$$

$$\text{即 } a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n + 2.$$

$$\text{又因为 } a_1 - b_1 = 1,$$

所以 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列.

$$(2) \text{ 解: 由 (1) 知, } a_n + b_n = \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$a_n - b_n = 2n - 1.$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} + n - \frac{1}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{2}.$$

易错辨析

② 解析: 当 $a_2 < 0$ 时, 由 $a_2 < a_3$ 知 $q = \frac{a_3}{a_2} < 1$,

故①错误; 当 $a_2 > 0$ 时, 由 $a_2 < a_3$ 知 $q = \frac{a_3}{a_2} > 1$,

$$\therefore a_n > 0, \therefore a_{n+1} = qa_n > a_n, \therefore \{a_n\} \text{ 是递增数列,}$$

故②正确; 当 $a_1 > 0$ 时, 若 $q < 0$, 则 $a_2 < 0 < a_3$, 故③

错误; 当 $a_1 < 0, 0 < q < 1$ 时, $a_{n+1} = qa_n > a_n$, 满足

$$a_2 < a_3 \text{ 且数列 } \{a_n\} \text{ 是递增数列, 故④错误.}$$

滚动卷(二) 小测试(七)至(十二)

综合拔高

1. C 解析: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由等比数列的性质可

$$\text{得, } a_5 a_6 = a_4 a_7 = -8, \therefore \begin{cases} a_4 + a_7 = 2, \\ a_4 a_7 = -8, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a_4 = 4, \\ a_7 = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_4 = -2, \\ a_7 = 4. \end{cases} \text{ 当 } a_4 = 4, a_7 = -2 \text{ 时, } q^3 =$$

$$\frac{a_7}{a_4} = -\frac{1}{2}, \therefore a_{10} = a_7 q^3 = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1; \text{ 当}$$

$$a_4 = -2, a_7 = 4 \text{ 时, } q^3 = \frac{a_7}{a_4} = -2, \therefore a_{10} = a_7 q^3 = 4 \times$$

$$(-2) = -8. \text{ 故选 C.}$$

2. C 解析: 由题意可设这 5 个数分别为 $a, -2a,$

$$4a, -8a, 16a, \text{ 其中 } a \neq 0, \text{ 故奇数项和与偶数项和的}$$

$$\text{比值为 } \frac{a+4a+16a}{-2a-8a} = -\frac{21}{10}, \text{ 故选 C.}$$

3. A 解析: $x, x+10, x-5$ 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前三

$$\text{项, } \therefore x(x-5) = (x+10)^2, \text{ 解得 } x = -4, \therefore x +$$

$$10 = 6, \text{ 公比 } q = -\frac{3}{2}, \therefore a_n = -4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}. \text{ 故}$$

$$\text{选 A.}$$

4. C 解析: 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $0 <$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1. \therefore a_3 + a_5 = 20, a_2 a_6 = 64 = a_3 a_5, \therefore a_3 =$$

$$16, a_5 = 4, q^2 = \frac{1}{4}. \text{ 又 } 0 < q < 1, \text{ 解得 } q = \frac{1}{2}, \therefore a_3 =$$

$$a_1 \times \frac{1}{4} = 16, \text{ 解得 } a_1 = 64. \therefore S_4 =$$

$$\frac{64 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 120. \text{ 故选 C.}$$

5. D 解析: 由 $S_n = 2a_{n+1}, a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$,

$$\text{得 } S_n = 2(S_{n+1} - S_n), \text{ 即 } 2S_{n+1} = 3S_n, \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{3}{2},$$

$$\text{又 } S_1 = a_1 = 1, \text{ 所以 } \{S_n\} \text{ 是以 } 1 \text{ 为首项, } \frac{3}{2} \text{ 为公比的}$$

等比数列,则有 $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. 故选 D.

6. 是 解析: 等比数列的前 n 项和 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

($q \neq 1$), 所以 $S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n$, $S_n = -Aq^n + A$
($A \neq 0, q \neq 0, q \neq 1, n \in \mathbf{N}^*$), 符合上式形式, 此时
 $A = \frac{a_1}{1-q}$, 故数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

7. $2^n - 1$ 解析: 由题意可得 $\log_2 a_2 = 2 - 1 = 1$,
 $\log_2 a_5 = 5 - 1 = 4$, 则 $a_2 = 2, a_5 = 16$, 数列 $\{a_n\}$ 的公
比 $q = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}} = \sqrt[3]{8} = 2$, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{a_2}{q} =$
 $\frac{2}{2} = 1$, 前 n 项和 $S_n = \frac{1 \times (1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$.

8. $a_n = 3^n - 1$ 解析: 令 $n=1$, 得 $2a_1 = 3a_1 - 2$,
解得 $a_1 = 2$; 当 $n \geq 2$ 时, 由 $2S_n = 3a_n - 2n (n \in \mathbf{N}^*)$,
得 $2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 2(n-1)$, 两式相减得 $2a_n =$
 $3a_n - 3a_{n-1} - 2$, 即 $a_n = 3a_{n-1} + 2$, 整理得 $\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1} =$
 3 , $\therefore$ 数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + 1 = 3$, 公比为 3 的
等比数列, $\therefore a_n + 1 = 3^n$, $\therefore a_n = 3^n - 1$.

9. 解: 设每月平均下降的百分比为 x ,
则每月的销售收入构成了等比数列 $\{a_n\}$,
 $a_1 = 128$, 则 $a_2 = a_1(1-x)$,
 $a_3 = a_1(1-x)^2 = 128(1-x)^2 = 32$,
解得 $x = 50\%$.
设 $a_n = 8$,
则 $a_n = 128(1-50\%)^{n-1} = 8$,
解得 $n = 5$,
即从 2022 年 7 月算起第 5 个月, 也就是在 2022 年
的 11 月该公司的月销售收入会跌至 8 万元.

10. 解: (1) 由已知得 $a_2 = 3a_1 - 4 + 2 = 3 \times \frac{7}{3} - 4 + 2 = 5$,

$$a_3 = 3a_2 - 4 \times 2 + 2 = 3 \times 5 - 8 + 2 = 9.$$

$$(2) \because a_{n+1} = 3a_n - 4n + 2,$$

$$\therefore a_{n+1} - 2n - 2 = 3a_n - 6n,$$

$$\text{即 } a_{n+1} - 2(n+1) = 3(a_n - 2n).$$

$$\text{由(1)知 } a_1 - 2 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore a_n - 2n \neq 0, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} - 2(n+1)}{a_n - 2n} = 3,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2n\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 3 的等比

数列.

$$\therefore a_n - 2n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{n-2},$$

$$\therefore a_n = 3^{n-2} + 2n.$$

素养提升

1. A 解析: 设 $b_n = a_n + n$, 则 $\{b_n\}$ 为等比数列, 设公比
为 q , 则 $b_2 = a_2 + 2 = 3, b_3 = a_3 + 3 = 9, \therefore q = 3, b_4 =$
 $b_3 \cdot 3 = 9 \times 3 = 27$, 即 $a_4 + 4 = 27, \therefore a_4 = 23$.

2. A 解析: 由 $a_{n+1}^2 - 3a_{n+1}a_n - 4a_n^2 = 0$, 得 $(a_{n+1} -$
 $4a_n) \cdot (a_{n+1} + a_n) = 0$. 又 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以
 $a_{n+1} - 4a_n = 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. 由等比数列的定义知数列
 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 4 为公比的等比数列, 由等比数
列的通项公式, 得 $a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$.

3. C 解析: 第一列构成首项为 $\frac{1}{4}$, 公差为 $\frac{1}{4}$ 的等差
数列, 所以 $a_{51} = \frac{1}{4} + (5-1) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. 又因为从
第三行起每一行数成等比数列, 而且每一行的公比
都相等, 所以第 5 行构成首项为 $\frac{5}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等
比数列, 所以 $a_{53} = \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$.

4. 4 解析: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, $\therefore a_2 \cdot$
 $a_4 = 4 = a_3^2$, 且 $a_3 > 0$, $\therefore a_3 = 2$, 又 $a_1 + a_2 + a_3 =$
 $\frac{2}{q^2} + \frac{2}{q} + 2 = 14$, $\therefore \frac{1}{q} = -3$ (舍去) 或 $\frac{1}{q} = 2$, 即 $q =$
 $\frac{1}{2}, a_1 = 8$. 又 $a_n = a_1 q^{n-1} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$, $\therefore a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-9} > \frac{1}{9}$, 即
 $2^{3n-9} < 9, \therefore n \in \mathbf{N}^*, \therefore n$ 的最大值为 4.

5. 解: (1) 设这 4 个数构成的等比数列为 $\{a_n\}$, 公比
为 q ,

$$\text{则 } a_1 = 9, a_4 = 243,$$

$$\therefore q^3 = 27,$$

$$\therefore q = 3,$$

$$\therefore a_2 = 27, a_3 = 81,$$

故在 9 与 243 中间插入 27, 81, 可使这 4 个数成等
比数列.

(2) 设这 6 个数构成的等比数列为 $\{b_n\}$, 公比为 q ,

$$\text{则 } b_1 = 160, b_6 = -5,$$

$$\therefore q^5 = -\frac{1}{32},$$

$$\therefore q = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore b_2 = b_1 q = -80, b_3 = b_2 q = 40,$$

$$b_4 = b_3 q = -20, b_5 = b_4 q = 10.$$

$\therefore$ 在 160 与 -5 中间插入 -80, 40, -20, 10, 可使这 6 个数成等比数列.

6. 解: (1) 依题意, 得 $2S_n = a_{n+1} - a_1$.

$$\text{于是, 当 } n \geq 2 \text{ 时, 有 } \begin{cases} 2S_n = a_{n+1} - a_1, \\ 2S_{n-1} = a_n - a_1. \end{cases}$$

两式相减, 得 $a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$.

又因为 $a_2 = 2S_1 + a_1 = 3a_1, a_n \neq 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 3 的等比数列.

因此, $a_n = a_1 \cdot 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \text{ 因为 } S_n = \frac{a_1(1-3^n)}{1-3} = \frac{1}{2}a_1 \cdot 3^n - \frac{1}{2}a_1,$$

$$\text{所以 } b_n = 1 - S_n = 1 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_1 \cdot 3^n.$$

要使 $\{b_n\}$ 为等比数列, 则 $1 + \frac{1}{2}a_1 = 0$,

即 $a_1 = -2$.

小测试(十三) 变化率问题

预习自评

1. B 2. B 3. C

基础过关

1. D 解析: Δy 看作是相对于 $f(x_0)$ 的“增量”, 可用 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 代替.

2. B 解析: $f(x) = \sqrt{x}$ 从 1 到 a 的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{a} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{a}} = \frac{1}{4}$, 解得 $a = 9$. 故选 B.

3. A 解析: 该质点从 $x = 2$ 到 $x = 3$ 的平均速度为 $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{-6 + 1}{1} = -5$.

4. C 解析: 由瞬时速度的概念知, 9.8 m/s 是物体在 $t = 1$ s 这一时刻的速度, C 正确, A, B, D 错误.

5. A 解析: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x - 1)e^{1 + \Delta x} + e - (0 + e)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{1 + \Delta x} = e$.

6. $4 + 2\Delta x$ 解析: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2(1 + \Delta x)^2 - 1 - 2 \times 1^2 + 1 = 4\Delta x + 2(\Delta x)^2$, $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + 2\Delta x$.

7. $-\frac{72}{25}$ 解析: 割线 AB 的斜率 $k =$

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{(1 + \Delta x)^2} - 2}{\Delta x} = \frac{-2(\Delta x + 2)}{(1 + \Delta x)^2},$$

$$\text{所以当 } \Delta x = \frac{1}{4} \text{ 时, } k = -\frac{72}{25}.$$

8. 解: 在 t 到 $t + \Delta t$ 这段时间内, 物体的平均速度为 $\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = 24 - 6t - 3\Delta t$,

所以该物体在时间段 $[0, 6]$ 内的平均速度为 $24 - 6 \times 0 - 3 \times 6 = 6$,

当 Δt 无限趋近于 0 时,

即可得到 t 时刻的瞬时速度为 $24 - 6t$,

因为该物体在时间段 $[0, 6]$ 内的平均速度与 t 时刻的瞬时速度相等,

$$\text{即 } 24 - 6t = 6,$$

解得 $t = 3$.

素养提升

1. D 解析: 由题得该质点从 $x = 1$ 到 $x = 2$ 的平均速度为 $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{-8 + 1 - (-2 + 1)}{1} = -6$. 故选 D.

2. B 解析: 由题意, 该质点在 $t = 3$ 时的瞬时速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(3 + \Delta t) - s(3)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \times (3 + \Delta t)^2 + 3 - (2 \times 3^2 + 3)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (12 + 2\Delta t) = 12.$$

故选 B.

3. B 解析: $\because f(1) = 5, f(1.3) = 5.69, \therefore$ 直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{f(1.3) - f(1)}{1.3 - 1} = \frac{5.69 - 5}{0.3} = 2.3$. 故选 B.

4. $\bar{v}_1 < \bar{v}_2 < \bar{v}_3$ 解析: $\because \bar{v}_1 = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = k_{OA}, \bar{v}_2 = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = k_{AB}, \bar{v}_3 = \frac{s(t_3) - s(t_2)}{t_3 - t_2} = k_{BC}$, 由图得 $k_{OA} < k_{AB} < k_{BC}, \therefore \bar{v}_1 < \bar{v}_2 < \bar{v}_3$.

5. 解: (1) 物体在这段时间内的平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0} \\ &= \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}g \cdot \frac{\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}g(2t_0 + \Delta t). \end{aligned}$$

(2)物体在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} g(2t_0 + \Delta t) = gt_0.$$

6. 解: (1) 如图所示, 设人从 C 点运动到 B 处的路程为 x m, AB 为身影长度, AB 的长度为 y m.

因为 $CD \parallel BE$,

$$\text{所以 } \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}, \text{ 即 } \frac{y}{y+x} = \frac{1.6}{8}.$$

$$\text{所以 } y = \frac{1}{4}x (x \geq 0).$$

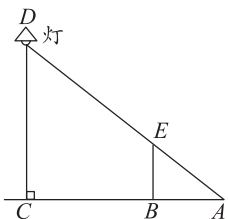
(2) $84 \text{ m/min} = 1.4 \text{ m/s}$.

在 $[0, 10]$ 内 x 的增量为 $\Delta x = 1.4 \times 10 - 1.4 \times 0 = 14$;

在 $[0, 10]$ 内 y 的增量为 $\Delta y = \frac{1}{4} \times 14 - \frac{1}{4} \times 0 = \frac{7}{2}$.

$$\text{所以 } \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{7}{2}}{10} = \frac{7}{20}.$$

即人离开路灯的第一个 10 s 内身影的平均变化率为 $\frac{7}{20} \text{ m/s}$.



易错辨析

A 解析: 物体在 $t = 3 \text{ s}$ 时的瞬时速度 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} =$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(3 + \Delta t) - s(3)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t + 5) = 5 (\text{m/s}).$$

小测试(十四) 导数的概念及其几何意义

预习自评

1. B 2. C 3. B

基础过关

1. C 解析: $f'(\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi + \Delta x) - f(\pi)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi + \Delta x} - \sqrt{\pi}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi + \Delta x} + \sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

2. A 解析: 因为 $\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 3(2 + \Delta x) - 2^3 + 6 = (\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 9\Delta x$, 所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\Delta x)^2 +$

$$6\Delta x + 9, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 + 6\Delta x + 9] = 9. \text{ 由导}$$

数的几何意义可知, 曲线 $y = x^3 - 3x$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线斜率是 9.

3. A 解析: 依次作出 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 在 $x = x_0$ 处的切线, 根据导数的几何意义及图形中切线的斜率可知 $f'_1(x_0) > f'_2(x_0) > f'_3(x_0) > f'_4(x_0)$.

4. C 解析: 因为直线 l 经过 $(-1, 0), (0, 1)$ 两点, 所以直线 l 的方程为 $y = x + 1$. 又直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 切于点 $A(2, 3)$, 可得曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处的导数为 $f'(2) = 1$. 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'(2) = 1$.

5. AD 解析: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = 2$, A 正确;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2h} = \frac{1}{2} f'(x_0) = 1, \text{ B 错误};$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 2f'(x_0) = 4, \text{ C 错误};$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} = f'(x_0) = 2, \text{ D 正确}.$$

6. 3 解析: 由导数的几何意义得 $f'(1) = \frac{1}{2}$, 由点 M 在切线上得 $f(1) = \frac{1}{2} \times 1 + 2 = \frac{5}{2}$, 所以 $f(1) + f'(1) = 3$.

7. 2 解析: 因为 $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = a(1 + \Delta x) + 4 - a - 4 = a\Delta x$, 所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, 所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, 所以 $f'(1) = a = 2$.

8. 解: $\because \Delta y = 2(3 + \Delta x)^2 + 4(3 + \Delta x) - (2 \times 3^2 + 4 \times 3) = 12\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 4\Delta x = 2(\Delta x)^2 + 16\Delta x$,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(\Delta x)^2 + 16\Delta x}{\Delta x} = 2\Delta x + 16.$$

$$\therefore y'|_{x=3} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x + 16) = 16.$$

素养提升

1. C 解析: 因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2 - \Delta x)}{\Delta x} =$

$2f'(2) = -2$, 所以 $f'(2) = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率为 -1 , 故切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$. 故选 C.

2. B 解析: 由 $2x + y + 1 = 0$, 得 $y = -2x - 1$, 由导数的几何意义知, $h'(a) = -2 < 0$.

3. A 解析: 由题意知切线过点 $(1, 3), (0, 2)$, 所以切

线的斜率 $k=f'(1)=\frac{3-2}{1-0}=1>0$.

4. 10 π 解析: 因为水波的半径以 $v=1$ m/s 的速度向外扩张, 水波面的圆面积 $S=\pi r^2=\pi(vt)^2=\pi t^2$. 所以利用瞬时变化率, 可求水波面的圆面积在时刻 t_0 的瞬时膨胀率 $S'|_{t=t_0}=2\pi t_0$. 当半径为 5 m 时, $t=5$ s, 所以 $S'|_{t=5}=2\pi\times 5=10\pi$, 即半径为 5 m 时, 该水波面的圆面积的瞬时膨胀率是 10π m²/s.

5. 解: 当 $0\leq t<3$ 时, $s(t)=3t^2$,

$$\begin{aligned}\text{则 } \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t} \\ &= \frac{3(1+\Delta t)^2-3}{\Delta t} \\ &= 6+3\Delta t,\end{aligned}$$

$$\therefore s'(1)=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}(6+3\Delta t)=6.$$

当 $t\geq 3$ 时, $s(t)=15+3(t-1)^2$,

$$\begin{aligned}\text{则 } \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{s(4+\Delta t)-s(4)}{\Delta t} \\ &= \frac{15+3(4+\Delta t-1)^2-[15+3\times(4-1)^2]}{\Delta t} \\ &= 18+3\Delta t,\end{aligned}$$

$$\therefore s'(4)=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}(18+3\Delta t)=18.$$

$s'(1)=6$ 说明在第 1 min 时, 该昆虫的爬行速度为 6 m/min,

$s'(4)=18$ 说明在第 4 min 时, 该昆虫的爬行速度为 18 m/min.

6. 解: 令 $f(x)=x^2$,

$$\begin{aligned}\text{则 } f'(x) &= \lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= 2x,\end{aligned}$$

设 $P(x_0, y_0)$ 是满足条件的点.

(1) $\because$ 切线与直线 $y=4x-5$ 平行,

$$\therefore 2x_0=4, x_0=2, y_0=4,$$

即 $P(2, 4)$ 是满足条件的点.

(2) $\because$ 切线与直线 $2x-6y+5=0$ 垂直,

$$\therefore 2x_0\cdot\frac{1}{3}=-1,$$

$$\text{得 } x_0=-\frac{3}{2}, y_0=\frac{9}{4},$$

即 $P(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ 是满足条件的点.

(3) $\because$ 切线的倾斜角为 135° ,

$\therefore$ 其斜率为 -1 ,

$$\text{即 } 2x_0=-1,$$

$$\text{解得 } x_0=-\frac{1}{2}, y_0=\frac{1}{4},$$

即 $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 是满足条件的点.

易错辨析

D 解析: 曲线的切线和曲线除有切点这个公共点外, 还可能其他的公共点, 故 A, B 错误; $f'(x_0)$ 不存在, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率不存在, 但切线可能存在, 故 C 错误, D 正确.

小测试(十五) 基本初等函数的导数

预习自评

1. A 2. B 3. C

基础过关

1. A 解析: 求导得 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 则 $f'(4)=\frac{1}{4}$.

2. D 解析: 常数的导数为 0.

3. D 解析: $\because f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, $\therefore f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$, 因此 $f'(\frac{1}{2})=-\frac{2}{(\frac{1}{2})^3}=-16$.

4. BC 解析: $y'=3x^2$, 因为 $k=3$, 所以 $3x^2=3$, 所以 $x=\pm 1$, 则 P 点坐标为 $(-1, -1)$ 或 $(1, 1)$.

5. A 解析: $\because (\sin x)'=\cos x$, $\therefore k_l=\cos x$, $\therefore -1\leq \tan \alpha\leq 1$, 又 $\because \alpha\in[0, \pi)$, $\therefore \alpha\in[0, \frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4}, \pi)$.

6. 0 解析: 由题意得 $f'(x)=e^x$, 又 $f'(x_0)=1$, 故 $x_0=0$.

7. 1 解析: $f'(x)=2x$, $g'(x)=\frac{1}{x}$ 且 $x>0$, 则 $2x-\frac{1}{x}=1$, 解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{2}$, 又 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 故 $x=1$.

8. 解: (1) 由题意得 $f'(x)=3x^2$.

(2) 由(1)得 $f'(1)=3$,

又 $f(1)=1$,

所以曲线 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线的方程为 $y-1=3(x-1)$,

即 $y=3x-2$.

素养提升

1. D 解析: 因为 $f(x)=x^\alpha (\alpha\in\mathbf{Q}^*)$, 所以 $f'(x)=$

$\alpha x^{\alpha-1}$, 所以 $f'(1) = \alpha = \frac{1}{4}$. 故选 D.

2. B 解析: $\because s = \cos t, \therefore s' = -\sin t. \therefore s'|_{t=1} = -\sin 1$.

3. C 解析: 设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$,

所以切线的斜率为 $\frac{1}{x_0}$, 所以切线方程为 $y - \ln x_0 =$

$\frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 即 $y = \frac{x}{x_0} + \ln x_0 - 1$, 故

$$\begin{cases} \frac{1}{x_0} = a, \\ \ln x_0 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_0 = e, \\ a = \frac{1}{e}, \end{cases} \quad \text{故选 C.}$$

4. 4 解析: 因为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 所以切线方程为 $y - \sqrt{a} =$

$\frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$, 令 $x = 0$, 得 $y = \frac{\sqrt{a}}{2}$, 令 $y = 0$, 得 $x =$

$-a$, 由题意知 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot a = 2$, 所以 $a = 4$.

5. 解: 设直线的斜率为 k , 直线与抛物线相切的切点坐标为 (x_0, y_0) ,

则直线方程为 $y + 2 = k(x + \frac{1}{2})$,

因为 $y' = 2x$,

所以 $k = 2x_0$,

又点 (x_0, y_0) 在切线上,

所以 $x_0^2 + 2 = 2x_0(x_0 + \frac{1}{2})$,

解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = -2$,

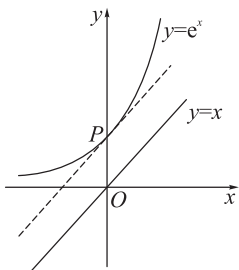
则 $k = 2$ 或 $k = -4$,

所以直线方程为 $y + 2 = 2(x + \frac{1}{2})$ 或 $y + 2 =$

$-4(x + \frac{1}{2})$,

即 $2x - y - 1 = 0$ 或 $4x + y + 4 = 0$.

6. 解: 如图, 当曲线 $y = e^x$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线与直线 $y = x$ 平行时, 点 P 到直线 $y = x$ 的距离最小.



则曲线 $y = e^x$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线斜率为 1,

又 $y' = (e^x)' = e^x$,

所以 $e^{x_0} = 1$, 得 $x_0 = 0$,

代入 $y = e^x$, 得 $y_0 = 1$,

即 $P(0, 1)$.

利用点到直线的距离公式得最小距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

易错辨析

C 解析: $\ln 2$ 为常数, 导数为 0, A 错误; $(3^x)' =$

$3^x \ln 3$, B 错误; 因为 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 所以 $f'(x) =$

$-2x^{-3}$, 所以 $f'(3) = -2 \times 3^{-3} = -\frac{2}{27}$, C 正确;

$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$, D 错误.

小测试(十六) 导数的四则运算法则

预习自评

1. AD 2. B 3. B

基础过关

1. D 解析: 由题意得 $f'(x) = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$.

2. B 解析: $(x^3 - 1)' = (x^3)' - (1)' = 3x^2$, A 错误;

$(\frac{x}{e^x})' = \frac{x'e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$, B 正确;

$(x^{\frac{1}{2}} \ln x)' = (x^{\frac{1}{2}})' \ln x + x^{\frac{1}{2}} (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x +$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$, C 错误; $(3 \sin x - \cos x)' = (3 \sin x)' - (\cos x)' =$

$3 \cos x + \sin x$, D 错误.

3. C 解析: 令 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(x) = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + 1$, $f'(1) = 1$, 所以曲线 $y = x \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线的方程为 $y - 0 = x - 1$, 即 $x - y - 1 = 0$.

4. B 解析: 设 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x < 0)$, 点 $P(x_0, y_0)$,

则 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$, 由在点 P 处的切线与直线

$x - 3y + 1 = 0$ 垂直可得 $f'(x_0) = 1 - \frac{4}{x_0^2} = -3$,

解得 $x_0 = -1$.

5. C 解析: 由 $y = \frac{x}{x-2}$ 可得 $y' = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} =$

$\frac{-2}{(x-2)^2}$, 所以当 $x = 4$ 时, $y' = -\frac{1}{2}$. 因为曲线 $y =$

$\frac{x}{x-2}$ 在点 $(4, 2)$ 处的切线与直线 $ax - y = 0$ 平行,

所以 $a = -\frac{1}{2}$. 故选 C.

6. $y = x$ 解析: $\because f(x) = e^x \cdot \sin x, \therefore f'(x) = e^x(\sin x + \cos x), f'(0) = 1, f(0) = 0, \therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y - 0 = 1 \times (x - 0)$, 即 $y = x$.

7. $\frac{2}{e}$ 解析: 求导得 $y' = e^x$, 则 $y = \frac{1}{e}x + n$ 为过点 $(-1, \frac{1}{e} - m)$ 的切线, 所以 $-\frac{1}{e} + n = \frac{1}{e} - m$, 得 $m + n = \frac{2}{e}$.

8. 解: (1) 因为函数 $f(x) = e^x \ln x + 3x (x > 0)$, 所以 $f'(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' + (3x)' = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + 3 = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) + 3$.

(2) 由(1)知, $f'(1) = e + 3$,

又 $f(1) = 3$,

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y - 3 = (e + 3)(x - 1)$,

即 $y = (e + 3)x - e$.

素养提升

1. C 解析: $\because f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+a)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}$, 又 $f'(1) = \tan \frac{3\pi}{4} = -1, \therefore a = 7$.

2. C 解析: 因为 $f(x) = (x+a) \cdot \ln x, x > 0$, 所以 $f'(x) = \ln x + (x+a) \cdot \frac{1}{x}$, 所以 $f'(1) = 1+a$. 又因为 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x - y = 0$ 垂直, 所以 $f'(1) = -\frac{1}{2}$, 所以 $a = -\frac{3}{2}$.

3. A 解析: $\because f(x) = 3xf'(1) + \ln x, \therefore f'(x) = 3f'(1) + \frac{1}{x}$, 则 $f'(1) = 3f'(1) + 1$, 解得 $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

4. $\frac{1}{4}$ 或 -4 解析: $f'(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 0, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \end{cases}$

若 $f'(a) = 12$, 则 $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = 12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0, \\ a^2 - 4 = 12, \end{cases}$

解得 $a = \frac{1}{4}$ 或 $a = -4$.

5. 解: 易得 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$,

$\therefore f'(2) = 1$,

又 $f(2) = -2$,

$\therefore$ 曲线 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y - (-2) = x - 2$,

即 $x - y - 4 = 0$.

6. 解: (1) 因为 $f(x) = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$,

所以 $f'(x) = 2ax + b$,

又 $f'(x) = 2x - 8$,

所以 $a = 1, b = -8$.

(2) 由(1)可知 $g(x) = e^x \sin x + x^2 - 8x + 3$,

所以 $g'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + 2x - 8$,

所以 $g'(0) = e^0 \sin 0 + e^0 \cos 0 + 2 \times 0 - 8 = -7$,

又 $g(0) = 3$,

所以曲线 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y - 3 = -7(x - 0)$,

即 $7x + y - 3 = 0$.

易错辨析

D 解析: 注意到函数 $f(a)$ 的自变量是 a , 所以

$f'(a) = (a^x)' + (\ln x)' + \left(\frac{\cos x}{a}\right)' + (e^2)' = xa^{x-1} + 0 + \frac{(\cos x)'a - \cos x \cdot a'}{a^2} + 0 = xa^{x-1} + \frac{-\cos x}{a^2}$, 从而 $f'(x) = xx^{x-1} + \left(\frac{-\cos x}{x^2}\right) = x^x - \frac{\cos x}{x^2}$. 故选 D.

小测试(十七) 简单复合函数的导数

预习自评

1. BCD 2. C 3. B

基础过关

1. C 解析: 函数 $y = (2022 - 8x)^3$ 可以看作函数 $y = u^3$ 和 $u = 2022 - 8x$ 的复合函数. 根据复合函数的求导法则, 有 $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^3)' \cdot (2022 - 8x)' = 3u^2 \cdot (-8) = -24u^2 = -24(2022 - 8x)^2$.

2. B 解析: 函数 $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$ 可以看作函数 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 2x+1$ 的复合函数. 根据复合函数的求导法则, 有 $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sqrt{u})' \cdot (2x+1)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. 则 $f'(x_0) = 1$, 得 $\frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = 1$, 解得 $x_0 = 0$.

3. A 解析: 由 $y = e^{2x-4}$, 求导得 $y' = 2e^{2x-4}$, 则当 $x =$

2 时, $y' = 2e^0 = 2$, 所以切线的斜率为 2. 又当 $x = 2$ 时, $y = e^{2-4} = e^0 = 1$, 所以切点坐标为 $(2, 1)$. 所以切线方程为 $2x - y - 3 = 0$.

4. D 解析: 函数 $y = f(x) = e^{2x}$ 可以看作函数 $y = e^u$ 和 $u = 2x$ 的复合函数. 根据复合函数的求导法则, 有 $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (e^u)' \cdot (2x)' = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}$. 设切点为 (x_0, e^{2x_0}) , 则 $f'(x_0) = 2e^{2x_0}$, 故切线方程为 $y - e^{2x_0} = 2e^{2x_0}(x - x_0)$, 又因为切线过原点, 所以 $-e^{2x_0} = -2x_0 e^{2x_0}$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$, 所以函数 $f(x)$ 图象过原点的切线方程为 $y - e = 2e(x - \frac{1}{2})$, 即 $2ex - y = 0$.

5. B 解析: 由题意得 $y' = (x+1)e^{x-a}$, 所以 $y'|_{x=a} = a+1 = 3$, 所以 $a = 2$, 所以 $f(x) = xe^{x-2}$, 所以 $f(2) = 2e^{2-2} = 2$, 所以切点坐标为 $(2, 2)$, 将点 $(2, 2)$ 代入切线方程得 $b = -4$, 所以 $a+b = -2$.

6. 20 解析: $\because s(t) = (2t+1)^2, \therefore s'(t) = 2(2t+1) \times 2 = 8t+4$, 则质点在 $t=2$ 时的瞬时速度为 $s'(2) = 8 \times 2 + 4 = 20(\text{m/s})$.

7. 2 解析: 设直线 $y = x+1$ 切曲线 $y = \ln(x+a)$ 于点 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = 1+x_0, y_0 = \ln(x_0+a)$, 又曲线的导数为 $y' = \frac{1}{x+a}, \therefore y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0+a} = 1$, 即 $x_0 + a = 1$. 又 $y_0 = \ln(x_0+a), \therefore y_0 = 0, \therefore x_0 = -1, \therefore a = 2$.

8. 解: $\because y = e^{\sin x}$,

$$\therefore y' = e^{\sin x} \cos x,$$

$$\therefore y'|_{x=0} = 1.$$

$\therefore$ 曲线 $y = e^{\sin x}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $x - y + 1 = 0$.

又直线 l 与 $x - y + 1 = 0$ 平行,

故直线 l 可设为 $x - y + m = 0 (m \neq 1)$.

由 $\frac{|m-1|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \sqrt{2}$ 得 $m = -1$ 或 $m = 3$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x - y + 3 = 0$.

素养提升

1. C 解析: $\because f(x) = \ln \sqrt{x^2+1}$, 令 $u(x) = \sqrt{x^2+1}, \therefore f(u) = \ln u, \therefore f'(u) = \frac{1}{u}, u'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 由复合函数的导数公式得

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}, \therefore f'(2) = \frac{2}{5}.$$

2. D 解析: 求导得 $y' = x - \frac{1}{x}$, 根据题意得 $y' = x -$

$$\frac{1}{x} = -\frac{3}{2}, \text{解得 } x = -2 (\text{舍去}) \text{ 或 } x = \frac{1}{2}, \text{可得切点}$$

的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, 所以该切线的方程为 $y -$

$$\frac{1}{8} = -\frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}), \text{整理得 } 12x + 8y - 7 = 0.$$

3. A 解析: 设曲线 $y = \ln(2x-1)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线与直线 $2x - y + 3 = 0$ 平行. $\because y' = \frac{2}{2x-1}$,

$$\therefore y'|_{x=x_0} = \frac{2}{2x_0-1} = 2, \text{解得 } x_0 = 1, \therefore y_0 = \ln(2-$$

$1) = 0$, 即切点坐标为 $(1, 0)$. $\therefore$ 切点 $(1, 0)$ 到直线

$$2x - y + 3 = 0 \text{ 的距离为 } d = \frac{|2-0+3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}, \text{即曲}$$

线 $y = \ln(2x-1)$ 上的点到直线 $2x - y + 3 = 0$ 的最短距离是 $\sqrt{5}$.

4. $\frac{\pi}{6}$ 解析: $\because f'(x) = -\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x + \varphi), \therefore f(x) +$

$$f'(x) = \cos(\sqrt{3}x + \varphi) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x + \varphi), \text{令 } g(x) =$$

$$\cos(\sqrt{3}x + \varphi) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x + \varphi), \therefore g(x) \text{ 为奇函数,}$$

$$\therefore g(0) = 0, \text{即 } \cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi = 0, \therefore \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{又}$$

$$0 < \varphi < \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

5. 解: 函数 $y = S(t) = 3\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{5\pi}{6})$ 可以看作函数

$$y = 3\sin u \text{ 和 } u = \frac{\pi}{12}t + \frac{5\pi}{6} \text{ 的复合函数.}$$

根据复合函数的求导法则, 有

$$y'_t = y'_u \cdot u'_t$$

$$= (3\sin u)' \cdot \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{5\pi}{6}\right)'$$

$$= 3\cos u \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

$$\text{所以 } S'(18) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{12} \times 18 + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{8},$$

即 18 点时潮水起落的速度为 $\frac{\pi}{8} \text{ m/h}$.

6. 解: (1) $\because f(x) = e^{\pi x} \sin \pi x$,

$$\therefore f'(x) = \pi e^{\pi x} \sin \pi x + \pi e^{\pi x} \cos \pi x = \pi e^{\pi x} (\sin \pi x + \cos \pi x).$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = \pi e^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) = \pi e^{\frac{\pi}{2}}.$$

(2) 设切点坐标为 $P(x_0, y_0)$,

由题意可知 $y'|_{x=x_0} = 0$.

$$\text{又 } y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\therefore y'|_{x=x_0} = \frac{-2x_0}{(1+x_0^2)^2} = 0.$$

解得 $x_0 = 0$, 此时 $y_0 = 1$.

即切点坐标为 $P(0, 1)$,

切线方程为 $y - 1 = 0$.

易错辨析

C 解析: $y' = (\cos(\ln(1-x)))' = [-\sin(\ln(1-x))] \cdot \left(-\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-x}$. 故选 C.

小测试(十八) 函数的单调性

预习自评

1. C 2. BC 3. D

基础过关

1. D 解析: 根据导函数的正负可判断原函数的单调性为先减后增再减再增, 故排除 A, B, C, 选 D.

2. A 解析: $y' = 3x^2 - 3$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增, A 正确; $y' = \frac{1}{x} - 1$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减, B 错误; $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, $(2, +\infty)$ 上单调递增, C 错误; $y' = 2x - 3$, 当 $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减; 当 $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增, D 错误.

3. A 解析: 求导得 $f'(x) = 2 - \cos x$, 又 $\cos x \in [-1, 1]$, 故 $f'(x) > 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

4. C 解析: 易得 $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$, 令 $f'(x) = 1 - 2\cos 2x < 0$, 且 $2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $0 < 2x < \frac{\pi}{3}$,
 $\therefore 0 < x < \frac{\pi}{6}$, 即单调递减区间为 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

5. B 解析: 由题意得函数的导数大于或等于 0, 可得

$$f'(x) = 3kx^2 - 2x + \frac{1}{3}k \geq 0 \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore \begin{cases} k > 0, \\ \Delta = 4 - 4 \times 3k \times \frac{k}{3} \leq 0, \end{cases} \text{ 解得 } k \geq 1.$$

6. $(-2, -1)$ 解析: $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x = e^x(x^2+3x+2) = e^x(x+1) \cdot (x+2)$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $-2 < x < -1$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2, -1)$.

7. $(-3, -1) \cup (0, 1)$ 解析: 由题图知, 当 $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-3, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故不等式 $\frac{f'(x)}{x} < 0$ 的解集为 $(-3, -1) \cup (0, 1)$.

8. 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f'(x) = 2(e^x - 1 + xe^x - x) = 2(e^x - 1)(x + 1).$$

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-1, 0)$ 上单调递减.

素养提升

1. A 解析: 因为 $f(x) = x \cos x$, 所以 $f'(x) = \cos x - x \sin x$. 因为 $f'(-x) = f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 为偶函数, 所以函数图象关于 y 轴对称. 由 $f'(0) = 1$ 可排除 C, D. 而 $f'(1) = \cos 1 - \sin 1 < 0$, 排除 B.

2. D 解析: 由 $f(x)$ 的导函数图象可知, $f(x)$ 在 $(a, b), (c, e)$ 上单调递增, 在 (b, c) 上单调递减, 所以 $f(a) < f(b)$, A 错误; $f(b) > f(0) > f(c)$, B, C 错误; $f(c) < f(d) < f(e)$, D 正确.

3. B 解析: 因为 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a-3)x$, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a - 3$, 因为 $f'(x)$ 是偶函数, 所以 $f'(-x) = f'(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 即 $3(-x)^2 + 2a(-x) + a - 3 = 3x^2 + 2ax + a - 3$, 即 $4ax = 0$, 所以 $a = 0$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -1$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$.

4. $(0, 1)$ 解析: 因为函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \ln x$, 所以 $f'(x) = -x - 3 + \frac{4}{x} = -\frac{(x+4)(x-1)}{x}$ ($x > 0$), 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 因为函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \ln x$ 在 $[t, t+1]$ 上不单调, 所以 $0 < t < 1 < t+1$, 解得 $0 < t < 1$, 所以实数 t 的取值范围是 $(0, 1)$.

5. 解: 函数 $f(x) = kx - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = k - \frac{1}{x} = \frac{kx-1}{x}.$$

①当 $k \leq 0$ 时, $kx-1 < 0$,

$$\therefore f'(x) < 0,$$

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

②当 $k > 0$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 即 $\frac{kx-1}{x} < 0$,

$$\text{解得 } 0 < x < \frac{1}{k};$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 即 } \frac{kx-1}{x} > 0,$$

$$\text{解得 } x > \frac{1}{k}.$$

$\therefore$ 当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \frac{1}{k})$,

单调递增区间为 $(\frac{1}{k}, +\infty)$.

综上所述, 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间;

当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \frac{1}{k})$, 单调递增区间为 $(\frac{1}{k}, +\infty)$.

6. 解: (1) 因为 $f(x)$ 的图象在点 $M(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $x+2y+5=0$.

$$\text{所以 } f'(-1) = -\frac{1}{2}, \text{ 且 } -1+2f(-1)+5=0,$$

$$\text{即 } f(-1) = -2,$$

$$\text{则 } \frac{-a-6}{1+b} = -2, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{又 } f'(x) = \frac{a(x^2+b)-2x(ax-6)}{(x^2+b)^2},$$

$$\text{所以 } \frac{a(1+b)+2(-a-6)}{(1+b)^2} = -\frac{1}{2}. \quad \textcircled{2}$$

由①②得 $a=2, b=3$. (因为 $b+1 \neq 0$, 所以 $b=-1$ 舍去).

$$\text{所以所求函数的解析式是 } f(x) = \frac{2x-6}{x^2+3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } f'(x) = \frac{-2x^2+12x+6}{(x^2+3)^2}.$$

$$\text{令 } -2x^2+12x+6=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 3-2\sqrt{3}, x_2 = 3+2\sqrt{3},$$

则当 $x < 3-2\sqrt{3}$ 或 $x > 3+2\sqrt{3}$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $3-2\sqrt{3} < x < 3+2\sqrt{3}$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x) = \frac{2x-6}{x^2+3}$ 的单调递增区间是 $(3-2\sqrt{3}, 3+$

$2\sqrt{3})$; 单调递减区间是 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ 和 $(3+$

$$2\sqrt{3}, +\infty).$$

易错辨析

$(-\infty, 2]$ 解析: $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$\therefore f'(x) = e^{2x} - ae^x + 1 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 设 $t = e^x$,

则 $t > 0$, $\therefore t^2 - at + 1 \geq 0$, 即 $a \leq \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}$ 在

$(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $g(t) = t + \frac{1}{t}$, 可知 $g(t)$ 在

$(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故

$$g(t)_{\min} = g(1) = 2, \therefore a \leq 2.$$

小测试(十九) 函数的极值

预习自评

1. B 2. D 3. B

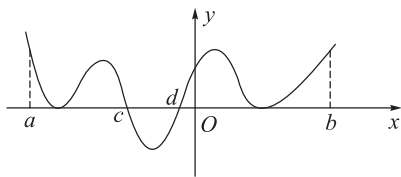
基础过关

1. C 解析: 由 $y = f'(x)$ 的图象得当 $f'(x) = 0$ 时, $x = x_3$ 或 $x = x_5$, 在 x_3 的左侧 $f'(x) > 0$, 在 x_3 的右侧 $f'(x) < 0$, 在 x_5 的左侧 $f'(x) < 0$, 在 x_5 的右侧 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(x_3)$, 极小值为 $f(x_5)$.

2. C 解析: 由题意得 $f'(x) = \frac{3(1-x)}{e^x}$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 所以 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值, $f(1) = \frac{3}{e}$, 函数无极小值.

3. B 解析: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 求得 $f'(x) = 2\sin x - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\pi}{6}$, 当 $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的极小值点是 $\frac{\pi}{6}$.

4. A 解析: 由图象, 设 $f'(x)$ 与 x 轴负半轴的交点中离原点较近的两个交点的横坐标分别为 c, d , 如图所示, 其中 $c < d$, 由图可知在 $(-\infty, c), (d, b)$ 上 $f'(x) \geq 0$, 所以此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, c), (d, b)$ 上单调递增, 在 (c, d) 上, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 (c, d) 上单调递减, 所以 $x = c$ 时, 函数取得极大值, $x = d$ 时, 函数取得极小值. 则函数 $y = f(x)$ 的极小值点的个数为 1.



5. AD 解析:由题意知 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + (a+6) = 0$ 有两个不相等的根,所以 $\Delta = 4a^2 - 12(a+6) > 0$, 解得 $a > 6$ 或 $a < -3$.

6. $-\frac{1}{2}$ 解析: $f'(x) = \frac{2(x^2+2)-2x(2x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$. 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < -2$ 或 $x > 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $-2 < x < 1$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-2, 1)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(-2) = -\frac{1}{2}$.

7. $-\frac{2}{3}$ 解析:因为 $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$, 由题意得 $\begin{cases} a+2b+1=0, \\ \frac{a}{2}+4b+1=0. \end{cases}$ 所以 $a = -\frac{2}{3}$. 经检验, 符合题意.

8. 解: (1) $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} (x > 0)$.

由题意知, 曲线在 $x=1$ 处的切线斜率为 0,

即 $f'(1) = 0$,

从而 $a - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$,

解得 $a = -1$.

(2) 由(1)知 $f(x) = -\ln x + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}x + 1 (x > 0)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f'(x) &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2} \\ &= \frac{(3x+1)(x-1)}{2x^2}. \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$ (舍去).

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 极小值为 $f(1) = 3$, 无极大值.

素养提升

1. B 解析:由 $f'(x)$ 的图象知当 $x=0$ 时, $f'(0) = 0$;

当 $-3 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$. 故 0 是极值点. 虽然有 $f'(7) = 0$, 但在 7 的两侧, $f'(x) < 0$, 7 不是极值点.

2. D 解析: $f'(x) = 3ax^2 + b$, 由 $f'(\frac{1}{a}) = 3a(\frac{1}{a})^2 + b = 0$, 可得 $ab = -3$.

3. A 解析:因为 $f(x) = \ln x - ax$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$, 又因为函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $x+y+b=0$, 所以 $f(1) = -a = -b-1$, $f'(1) = 1-a = -1$, 解得 $a=2, b=1$. 此时 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$. 则 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得极大值, $f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} - 1 = -\ln 2 - 1$.

4. -1 解析:函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $f'(x) = (ax+a-1) \cdot e^x$. 因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(-2) = (-2a-1+a)e^{-2} = 0$, 解得 $a = -1$.

5. 解: (1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$\because x = \pm 1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,

$\therefore x = \pm 1$ 是方程 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ 的两根,

$$\text{由根与系数的关系, 得 } \begin{cases} -\frac{2b}{3a} = 0, & \text{①} \\ \frac{c}{3a} = -1, & \text{②} \end{cases}$$

又 $f(1) = -1$,

$\therefore a+b+c = -1$. ③

联立①②③解得 $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{3}{2}$.

(2) 由(1)知, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$,

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(x-1)(x+1), \end{aligned}$$

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-1, 1)$ 上是减函数,

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, 函数取得极大值, 为 $f(-1) = 1$,

当 $x = 1$ 时, 函数取得极小值, 为 $f(1) = -1$.

6. 解: $f'(x) = x^2 - (m+3)x + m+6$.

因为函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有两个极值点,

所以 $f'(x) = x^2 - (m+3)x + m+6$ 在 $(1, +\infty)$ 内与 x 轴有两个不同的交点,

$$\text{所以} \begin{cases} \Delta = (m+3)^2 - 4(m+6) > 0, \\ f'(1) = 1 - (m+3) + m+6 > 0, \\ \frac{m+3}{2} > 1, \end{cases}$$

解得 $m > 3$.

故实数 m 的取值范围是 $(3, +\infty)$.

易错辨析

B 解析: 由题意可得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 则

$$\begin{cases} f(1) = 10, \\ f'(1) = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 1 + a + b + a^2 = 10, \\ 3 + 2a + b = 0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = 4, \\ b = -11 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = -3, \\ b = 3. \end{cases} \quad \text{当 } a = -3, b = 3 \text{ 时, } f'(x) =$$

$3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$, 此时 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 无极值, 舍去; 当 $a = 4, b = -11$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11, x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 符合题意. 故选 B.

小测试(二十) 函数的最大(小)值

预习自评

1. A 2. A 3. C

基础过关

1. A 解析: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, -\frac{1}{2}]$ 上单调递减, 所以 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-2 + 1 = -1$.

2. C 解析: $f'(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x, x \in [0, \pi]$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $\frac{\pi}{4} < x \leq \pi$; 令 $f'(x) < 0$, 则 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$. 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \pi]$ 上单调递增, 在 $[0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 所以当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有极小值 $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - 1$, 且为最小值. 又 $f(0) = 0, f(\pi) = \pi, f(\pi) > f(0)$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 π .

3. C 解析: 由 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得 $x = e$. 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $0 < x < e$ 时,

$f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增. 所以 $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值 $f(e) = \frac{1}{e}$, 因为 $f(x)$ 在定义域内只有一个极值, 所以 $f(x)_{\max} = \frac{1}{e}$.

4. C 解析: 因为 $x \leq a \cdot e^x$ 对任意 $x \in [0, 3]$ 恒成立,

$e^x > 0$, 所以 $a \geq \frac{x}{e^x}$ 对任意 $x \in [0, 3]$ 恒成立, 设

$f(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 当 $x \in [0, 1)$ 时,

$f'(x) > 0$, 当 $x \in (1, 3]$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3]$ 上单调递减, 所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上有极大值 $f(1)$, 且为最大值. 所以 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$, 所以 a 的

最小值为 $\frac{1}{e}$.

5. A 解析: 由 $y = 3x - x^3$ 得 $y' = 3 - 3x^2$, 令 $y' > 0$, 得 $-1 < x < 1$, 令 $y' < 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 1$, 所以 $y = 3x - x^3$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x = -1$ 时, $y = 3x - x^3$ 取得极小值 -2 , 因为 $f(x) =$

$$\begin{cases} 3x - x^3, x \leq a, \\ 2x, x > a \end{cases} \quad \text{无最小值, 所以} \begin{cases} -2 > 2a, \\ 3a - a^3 > 2a, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$a < -1$.

6. 16 解析: $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -1$ (舍去). 又 $f(1) = -2, f(0) = 0, f(3) = 18$, 所以 $m = 18, n = -2, m + n = 16$.

7. 20 解析: 设靠墙的边长为 $x (0 < x < 40)$, 则矩形的面积为 $S(x) = \frac{1}{2}x(40 - x)$, 则 $S'(x) = 20 - x$, 令 $S'(x) = 20 - x = 0$, 得 $x = 20$, 当 $x \in (0, 20)$ 时, $S'(x) > 0$, 即 $S(x)$ 在 $(0, 20)$ 上单调递增, 当 $x \in (20, 40)$ 时, $S'(x) < 0$, 即 $S(x)$ 在 $(20, 40)$ 上单调递减, 所以当 $x = 20$ 时, $S(x)$ 取得最大值, 所以靠墙的一边长为 20 m 时, 面积最大.

8. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f'(x) = 3x^2 - 3$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$,

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1)$, 单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 在 $(1, 3]$ 上单调递增,

所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上有极小值 $f(1)$, 且为最小值.

$$\text{则 } f(x)_{\min} = f(1) = -1,$$

$$f(x)_{\max} = \max \{f(0), f(3)\}.$$

$$\text{又 } f(0) = 1, f(3) = 3^3 - 3 \times 3 + 1 = 19,$$

$$\text{所以当 } x=3 \text{ 时, } f(x)_{\max} = 19,$$

故函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最小值为 -1 , 最大值为 19 .

素养提升

1. A 解析: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, $\because f'(x) < g'(x)$, $\therefore F'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$, $\therefore F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, $\therefore F(x)_{\max} = F(a) = f(a) - g(a)$.

2. B 解析: $f'(x) = e^x - x - 1$, 令 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$, 当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x)_{\min} = g(0) = 0$, $\therefore g(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在 $[-3, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = e^2 - 4$.

3. A 解析: 因为 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, $x \in [-3, 2]$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 2]$ 和 $[-3, -1]$ 上单调递增. $f(-3) = -19$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 1$, 所以在区间 $[-3, 2]$ 上, $f(x)_{\max} = 1$, $f(x)_{\min} = -19$, 又由题设知在 $[-3, 2]$ 上 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 20$, 所以 $t \geq 20$. 故选 A.

4. $\sqrt{3}$ 解析: $y' = \frac{\sin^2 x - (2 - \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2\cos x}{\sin^2 x}$. 因为 $0 < x < \pi$, 所以当 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ 时, $y' > 0$; 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时, $y' < 0$, 所以当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $y_{\min} = \sqrt{3}$.

5. 解: (1) $\because f(x) = x^3 + ax^2 - 2$,

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax,$$

$$\therefore f'(-2) = 12 - 4a = 0,$$

$$\text{解得 } a = 3.$$

经验证符合题意,

$$\therefore a = 3.$$

(2) 由(1)知, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, $x \in [-1, 2]$,

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2),$$

$\therefore$ 当 $x \in [-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (0, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值, 为 $f(0) = -2$.

$$\therefore f(-1) = 0, f(2) = 18,$$

$$\therefore f(x)_{\max} = f(2) = 18.$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 18 , 最小值为 -2 .

6. 解: (1) $f'(x) = \frac{a}{x} - 2bx (x > 0)$.

由曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切, 得

$$\begin{cases} f'(1) = 0, \\ f(1) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a - 2b = 0, \\ -b = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 由(1), 得 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}.$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$,

所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, e]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最大值为 $f(1) = -\frac{1}{2}$.

易错辨析

A 解析: $y' = 6x^2 - 6x - 12$, 由 $y' = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 2$ (舍去). 所以函数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 所以当 $x = -1$ 时, y 取极大值, 也是最大值, 最小值在 $x = -2$ 或 $x = 1$ 处取到. 当 $x = -2$ 时, $y = 1$; 当 $x = -1$ 时, $y = 12$; 当 $x = 1$ 时, $y = -8$. 所以 $y_{\max} = 12$, $y_{\min} = -8$. 故选 A.

小测试(二十一) 含参数函数的最大(小)值

预习自评

1. B 2. D 3. A

基础过关

1. A 解析: $\because f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$

处有最值, $\therefore x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 又 $f'(x) = a \cos x + \cos 3x$, $\therefore f'(\frac{\pi}{3}) = a \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi = 0$, 解得 $a = 2$.

2. C 解析: $y' = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$, 易知当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$, 当 $-2 < x < -1$ 和 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 所以函数 $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + m$ 在 $(-2, -1)$, $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 又当 $x = -1$ 时, $y = m + \frac{1}{2}$, 当 $x = 1$ 时, $y = m + \frac{5}{2}$, 所以最大值为 $m + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$, 解得 $m = 2$.

3. A 解析: $\because f(x) = 3x - x^3$, $\therefore f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1+x) \cdot (1-x)$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = -1$ (舍去), 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, m]$ 上的最大值为 2, 最小值为 0, 且 $f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$, $f(1) = 2$, $\therefore 1 \leq m \leq \sqrt{3}$.

4. D 解析: $\because f'(x) = \frac{1}{x} - a$, $x > 0$, $\therefore$ 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 故函数 $f(x)$ 单调递增, 不存在最大值; 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$, $\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{e}$.

5. BC 解析: $\because f'(x) = 3x^2 - 3a$, 且 $f'(x) = 0$ 有解, $\therefore a = x^2$ 有解. 又 $\because x \in (0, 1)$, $\therefore 0 < a < 1$.

6. -71 解析: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$. 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 3$ 或 $x = -1$. 又 $f(-4) = k - 76$, $f(3) = k - 27$, $f(-1) = k + 5$, $f(4) = k - 20$. 由 $f(x)_{\max} = k + 5 = 10$, 得 $k = 5$, $\therefore f(x)_{\min} = k - 76 = -71$.

7. -4 解析: $f'(x) = -3x^2 + 2ax$, 由 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值知 $f'(2) = 0$, 即 $-3 \times 4 + 2a \times 2 = 0$, 故 $a = 3$. 由此可得 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. $f'(x) = -3x^2 + 6x$, 由此可得 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $\therefore$ 当 $m \in [-1, 1]$ 时, $f(m)_{\min} = f(0) = -4$.

8. 解: (1) $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$.

因为 $x = 2$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点,

所以 $f'(2) = 0$,

即 $6(2a - 2) = 0$, 因此 $a = 1$.

经验证, 当 $a = 1$ 时, $x = 2$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点,

所以 $a = 1$.

(2) 由题意知 $g(x) = ax^3 - 3x^2 + 3ax^2 - 6x = ax^2(x+3) - 3x(x+2)$,

因为 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $g(0)$,

所以 $g(0) \geq g(2)$,

即 $0 \geq 20a - 24$,

解得 $a \leq \frac{6}{5}$.

反之, 当 $a \leq \frac{6}{5}$ 时,

对任意 $x \in [0, 2]$,

$g(x) \leq \frac{6}{5}x^2(x+3) - 3x(x+2) = \frac{3x}{5}(2x^2 + x - 10) = \frac{3x}{5}(2x+5)(x-2) \leq 0$,

而 $g(0) = 0$,

故 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $g(0)$.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{6}{5}]$.

素养提升

1. C 解析: 对函数 $f(x)$ 进行求导得 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$. 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $1 < x \leq 3$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 在 $(1, 3]$ 上单调递增. 由于 $f(0) = -a$, $f(1) = -2 - a$, $f(3) = 18 - a$, 所以最大值 $M = 18 - a$, 最小值 $N = -2 - a$, 故 $M - N = 20$. 故选 C.

2. D 解析: 当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) = 6x^2 + 6x$, 易知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上取最大值时 $x = -1$, 且 $f(-1) = 2$, 故只需在 $x \in (0, 2]$ 上, $e^{ax} \leq 2$ 恒成立, 即 $ax \leq \ln 2$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立, 即 $a \leq \frac{\ln 2}{x}$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立, 故 $a \leq \frac{1}{2} \ln 2$.

3. B 解析: $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x^2} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$, $x \in (0, 1]$,

① 当 $a \leq 1$ 时, $ax - 1 \leq x - 1 \leq 0$, $\therefore f'(x) \geq 0$ 且不

恒为0, $\therefore f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = a$, 即 $a = 3$ (舍去).

②当 $a > 1$, 即 $0 < \frac{1}{a} < 1$ 时, 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时,

$f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{a}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在

$(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = 2 - a - (a+1) \ln \frac{1}{a} = 3$, 即

$a - (a+1) \ln a + 1 = 0$. 令 $h(x) = x - (x+1) \ln x +$

$1 (x > 1)$, 则 $h'(x) = -\ln x - \frac{1}{x} < 0$, $\therefore h(x)$ 在

$(1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $h(e) = 0$, $\therefore a = e$. 故选 B.

4.1 解析: 由题意知, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x)$ 的最大值

为 -1. 令 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$, 当 $0 < x <$

$\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $\frac{1}{a} < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 = -1$. 解得 $a = 1$.

5. 解: (1) $f'(x) = 2e^x(x+2)$,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -2$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < -2$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(-2) = -2e^{-2}$, 无极大值.

(2) 由 (1), 知 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 在

$(-\infty, -2)$ 上单调递减.

$\therefore t > -3$,

$\therefore t+1 > -2$.

①当 $-3 < t < -2$ 时,

$f(x)$ 在 $[t, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, t+1]$ 上单调

递增,

$\therefore g(t) = f(-2) = -2e^{-2}$.

②当 $t \geq -2$ 时,

$f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上单调递增,

$\therefore g(t) = f(t) = 2e^t(t+1)$.

$\therefore g(t) = \begin{cases} -2e^{-2}, & -3 < t < -2, \\ 2e^t(t+1), & t \geq -2. \end{cases}$

6. 解: 函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$,

(1) $\therefore a < 0$,

$\therefore f'(x) > 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

(2) 当 $x \in [1, e]$ 时, 分如下情况讨论:

①当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

其最小值为 $f(1) = a \leq 1$, 这与函数在 $[1, e]$ 上的最

小值是 $\frac{3}{2}$ 相矛盾;

②当 $1 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, a)$ 上有 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

在 $(a, e]$ 上有 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(a) = \ln a + 1$,

由 $\ln a + 1 = \frac{3}{2}$, 得 $a = \sqrt{e}$;

③当 $a \geq e$ 时, 显然函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

其最小值为 $f(e) = 1 + \frac{a}{e} \geq 2$, 与最小值是 $\frac{3}{2}$ 相矛盾.

综上所述, a 的值为 $\sqrt{e}$.

易错辨析

B 解析: 依题意得, 当 $x > 1$ 时, $a > \frac{1}{x^2} - 2x$ 恒成

立, 令 $g(x) = \frac{1}{x^2} - 2x, x > 1$, 则 $a > g(x)_{\max}$ 或 $a \geq$

$g(x)$ 的上限, $\therefore g'(x) = \frac{-2}{x^3} - 2 = -2(\frac{1}{x^3} + 1) < 0$

在 $x > 1$ 时恒成立, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(x) < g(1) = -1$ 恒成立, $\therefore a \geq -1$. 故选 B.

小测试(二十二) 利用导数研究

函数的综合问题

预习自评

1. C 2. A 3. A

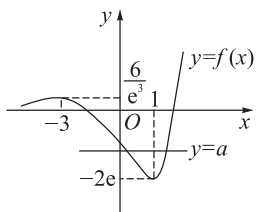
基础过关

1. C 解析: 根据导函数的图象只能得到原函数的单调性和单调区间, 得不到函数值, 故 A 是错的; 在 $x=3$ 处, $f'(x)$ 左右两边都是负的, 所以不是极值点, 故 B 是错的; 在 $(2, 4)$ 上是单调递减的, 故 C 正确; 在 $x=1$ 处的导数值大于 0, 故得到切线的斜率大于 0, 故 D 是错的.

2. C 解析: $\therefore$ 函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 的导数 $F'(x) =$

$\frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$, $\therefore$ 函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数, $\therefore F(2) < F(0)$, 即 $\frac{f(2)}{e^2} < \frac{f(0)}{e^0}$, 故有 $f(2) < e^2 f(0)$. 同理可得 $f(2020) < e^{2020} f(0)$. 故选 C.

3. BD 解析: 由题意得 $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x-1)(x+3)e^x$, $\therefore$ 当 $x < -3$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-3 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-3, 1)$ 上单调递减, $\therefore f(x)$ 有极大值, 为 $f(-3) = \frac{6}{e^3}$, $f(x)$ 有极小值, 为 $f(1) = -2e$. 又当 $x < -\sqrt{3}$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, $\therefore f(1)$ 也是最小值. 作出直线 $y=a$ 和 $y=f(x)$ 的图象的简图, 如图所示,



当 $a = -2e$ 或 $a > \frac{6}{e^3}$ 时, $f(x) = a$ 有一个实根, 当 $0 < a < \frac{6}{e^3}$ 时, $f(x) = a$ 有三个实根.

4. D 解析: 因为 $f(x)$ 的图象始终在 $g(x)$ 的上方, 所以 $|MN| = f(t) - g(t) = t^2 - \ln t$, 设 $h(x) = x^2 - \ln x$, 则 $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$, 令 $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} = 0$, 得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时有最小值, 故 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. A 解析: 已知点 $P(1, a)$ 不在 $f(x) = x^3 - ax$ 的图象上, 则 $f(1) = 1 - a \neq a$, 所以 $a \neq \frac{1}{2}$, 而 $f'(x) = 3x^2 - a$, 设过点 $P(1, a)$ 的直线与 $f(x) = x^3 - ax$ 的图象切于点 $Q(t, t^3 - at)$, 则切线的斜率 $k = f'(t) = k_{PQ}$, 则 $3t^2 - a = \frac{t^3 - at - a}{t - 1}$, 整理得 $2t^3 - 3t^2 + 2a = 0$, 设 $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2a$, 由于过点 P 仅能作一条直线与 $f(x)$ 的图象相切, 则问题可转化为 $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2a$ 仅有 1 个零点, $\therefore g'(t) = 6t^2 - 6t$, 令

$g'(t) = 0$, 解得 $t = 0$ 或 $t = 1$, 令 $g'(t) > 0$, 即 $6t^2 - 6t > 0$, 解得 $t < 0$ 或 $t > 1$, 令 $g'(t) < 0$, 即 $6t^2 - 6t < 0$, 解得 $0 < t < 1$, 所以函数 $g(t)$ 在区间 $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 可知 $g(t)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 或区间 $(1, +\infty)$ 上必有一个零点, 所以可知 $g(0)$ 与 $g(1)$ 同号, 则 $g(0) \cdot g(1) > 0$, 即 $(2a) \cdot (-1 + 2a) > 0$, 解得 $a < 0$ 或 $a > \frac{1}{2}$, 所以 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

6. $(-\infty, -1]$ 解析: 欲使函数的值域为 $\mathbf{R}$, 只需 $e^x - x + a$ 能取遍所有正数, 即最小值小于等于 0. 令 $f(x) = e^x - x + a$, $\therefore e^x \geq x + 1$, $\therefore e^x - x + a \geq 1 + a$, $\therefore f(x)_{\min} = 1 + a \leq 0$, $\therefore a \leq -1$.

7. $c < a < b$ 解析: 设 $f(x) = \ln x - x + 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $\therefore f(x) \leq f(1) = 0$, 即 $\ln x \leq x - 1$, $\therefore \ln(a+b) \leq a+b-1$, $\therefore a+b+c \leq a+b-1$, 即 $c \leq -1$, 又 $ac = b^2 > 0$, $\therefore a < 0$, 由 $a+b > 0$, $\therefore b > -a > 0$, $\therefore b^2 > a^2$, 即 $ac > a^2$, $\therefore c < a$, $\therefore c < a < b$.

8. 证明: 令 $g(x) = e^x - x - 1$,

则 $g'(x) = e^x - 1$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

$\therefore g(x) \geq g(0) = 0$,

即 $e^x - x - 1 \geq 0$,

$\therefore e^x \geq x + 1$ (当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立). ①

令 $h(x) = x + 1 - \ln(x+2)$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2} (x > -2)$,

易知 $h(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递减,

在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(x) \geq h(-1) = 0$,

即 $x + 1 - \ln(x+2) \geq 0$,

即 $x + 1 \geq \ln(x+2)$ (当且仅当 $x = -1$ 时, 等号成立). ②

$\therefore$ ①和②中的等号不能同时成立,

$\therefore$ 由①和②得 $e^x > \ln(x+2)$, 即 $f(x) > 0$.

素养提升

1. B 解析: 设 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $F'(x) =$

$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, 由 $f'(x)g(x)-f(x) \cdot g'(x) < 0$, 得 $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 因为 $a < x < b$, 所以 $\frac{f(b)}{g(b)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(a)}{g(a)}$, 又 $f(x), g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的恒大于 0 的可导函数, 故 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.

2. A 解析: 令 $g(x) = e^{3x} f(x)$, 则 $g'(x) = 3e^{3x} f(x) + e^{3x} f'(x)$, 因为 $3f(x) + f'(x) > 0$, 所以 $3e^{3x} f(x) + e^{3x} f'(x) > 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x) = e^{3x} f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 又 $f(x) > e^{-3x}$ 可化为 $e^{3x} f(x) > 1$, 且 $g(0) = e^{3 \times 0} f(0) = 1$, 所以 $g(x) > g(0)$, 解得 $x > 0$, 所以不等式 $f(x) > e^{-3x}$ 的解集是 $(0, +\infty)$.

3. A 解析: 由 $2f(x) > xf'(x)$, 得 $xf'(x) - 2f(x) < 0$, 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$, 因为 x 是正数, 所以 $x^3 > 0$, 又 $xf'(x) - 2f(x) < 0$, 所以 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(2) > g(3)$, 即 $\frac{f(2)}{2^2} > \frac{f(3)}{3^2}$, 即 $9f(2) > 4f(3)$.

4. $\{a | a < -27 \text{ 或 } a > 5\}$ 解析: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$. 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 3$. 当 $f'(x) > 0$ 时, $-1 < x < 3$; 当 $f'(x) < 0$ 时, $x < -1$ 或 $x > 3$, 所以当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极小值为 $f(-1) = a - 5$; 当 $x = 3$ 时, $f(x)$ 取得极大值为 $f(3) = a + 27$. 画出大致图象, 如图所示, 要使 $f(x)$ 的图象与 x 轴只有一个交点, 只需极大值小于 0 (如图 1) 或极小值大于 0 (如图 2),

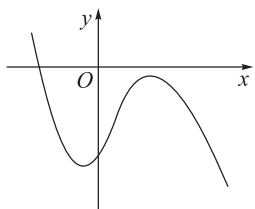


图 1

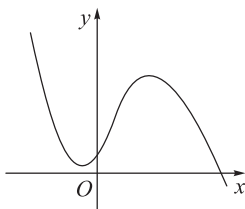


图 2

所以 $a + 27 < 0$ 或 $a - 5 > 0$, 解得 $a < -27$ 或 $a > 5$, 故实数 a 的取值范围为 $\{a | a < -27 \text{ 或 } a > 5\}$.

5. 解: $f(x) > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

即为 $a > \frac{2x-1}{e^x}$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

设 $g(x) = \frac{2x-1}{e^x}$,

则 $a > g(x)_{\max}$,

$g'(x) = \frac{2e^x - (2x-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{3-2x}{e^x}$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{3}{2}$,

当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $g'(x) > 0$,

故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递增, 在

$(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(x)_{\max} = g(\frac{3}{2}) = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = 2e^{-\frac{3}{2}}$,

故实数 a 的取值范围为 $(2e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$.

6. 解: (1) 由题意, 知每生产 1 千瓶正品盈利 4 000 元, 每生产 1 千瓶次品亏损 2 000 元,

所以 $y = 4\,000 \times \frac{4\,200 - x^2}{4\,500} x - 2\,000 \times (1 - \frac{4\,200 - x^2}{4\,500}) x = 3\,600x - \frac{4}{3}x^3$,

所以日利润 $y = -\frac{4}{3}x^3 + 3\,600x (x \in \mathbf{N}^*, 1 \leq x \leq 40)$.

(2) 令 $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 3\,600x, x \in [1, 40]$,

则 $f'(x) = 3\,600 - 4x^2$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 30$ 或 $x = -30$ (舍去).

当 $1 \leq x < 30$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $30 < x \leq 40$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, 30]$ 上单调递增, 在 $(30, 40]$ 上单调递减,

所以当 $x = 30$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 也是最大值,

为 $f(30) = -\frac{4}{3} \times 30^3 + 3\,600 \times 30 = 72\,000$,

即 y 的最大值为 72 000,

所以该种饮品的最大日利润为 72 000 元.

滚动卷(三) 小测试(十三)至(二十二)

综合拔高

1. B 解析: 由题可得 $f'(x) = \cos x + 4$, $\therefore f'(\pi) = 3$,

$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi+2\Delta x) - f(\pi)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi+2\Delta x) - f(\pi)}{2\Delta x} = 2f'(\pi) = 6$. 故选 B.

2. C 解析: 因为 $f(x) = \ln x + mx$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} + m$, 又 $f'(2) = 1$, 所以 $f'(2) = \frac{1}{2} + m = 1$, 解得 $m = \frac{1}{2}$. 故选 C.

3. D 解析: 函数 $y = a + \ln x$ 的导数为 $y' = \frac{1}{x}$. 由直线 $y = x$ 是曲线 $y = a + \ln x$ 的一条切线, 可令 $\frac{1}{x} = 1$, 解得 $x = 1$, 所以切点坐标为 $(1, 1)$. 因为切点在曲线 $y = a + \ln x$ 上, 所以 $a = 1$.

4. A 解析: 由 $f(x) = kx + \ln 2x$, 得 $f'(x) = k + \frac{1}{x}$. 因为函数 $f(x) = kx + \ln 2x$ 在区间 $(1, 3)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) = k + \frac{1}{x} \geq 0$ 在区间 $(1, 3)$ 上恒成立, 即 $k \geq -\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 3)$ 上恒成立. 因为 $x \in (1, 3)$, 所以 $-1 < -\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$, 所以 $k \geq -\frac{1}{3}$, 即实数 k 的取值范围为 $[-\frac{1}{3}, +\infty)$. 故选 A.

5. C 解析: $f(x) = \frac{e^{|x|}}{3x}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-x) = -\frac{e^{|x|}}{3x}$, 则 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 故排除 B; $f(1) = \frac{e}{3} < 1$, 故排除 A; $\because f(x) = \frac{e^{|x|}}{3x}$, $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{3x}$, 可得 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{3x^2}$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故排除 D. 故选 C.

6. $5x - y + 3 = 0$ 解析: 令 $y = f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$, 则 $f'(x) = \frac{(2x+3) - 2(x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{5}{(2x+3)^2}$, 所以曲线 $y = \frac{x-1}{2x+3}$ 在点 $(-1, -2)$ 处的切线的斜率为 $k = \frac{5}{(-2+3)^2} = 5$, 所以切线方程为 $y - (-2) = 5[x - (-1)]$, 即 $5x - y + 3 = 0$.

7. 0 解析: $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)}$, 因为 $f'(x) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} \leq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 单

调递减, $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = 0$.

8. $(-\frac{39}{5}, -5)$ 解析: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$, 因为 $f(x)$ 在 $(3, 5)$ 上存在极小值点, 所以

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 36 > 0, \\ f'(3) = 6a + 30 < 0, \\ f'(5) = 10a + 78 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3 < -\frac{a}{3} < 5, \\ f'(3) = 6a + 30 \geq 0, \\ f'(5) = 10a + 78 > 0, \end{cases}$$

解得 $-\frac{39}{5} < a < -5$ 或无解, 故实数 a 的取值范围为 $(-\frac{39}{5}, -5)$.

9. 解: (1) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$,

所以 $f'(1) = 2 - 2 = 0$,

又 $f(1) = 1$,

所以 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 1$.

(2) 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 (1) 知, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$;

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$; 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

10. 解: (1) 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = e^x - a$,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} f'(1) = 0, \\ f(1) = 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} e - a = 0, \\ e - a + b = 1. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = e, \\ b = 1, \end{cases}$$

经验证符合题意,

$\therefore$ 所求的实数 $a = e, b = 1$.

(2) 由 (1) 得 $f'(x) = e^x - a$,

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\therefore f'(x) = e^x - a \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

即 $a \leq e^x, x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

$\because$ 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \in (0, +\infty)$,

$\therefore a \leq 0$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

素养提升

1. A 解析: 根据 $f'(x) > 0$ 时, $y = f(x)$ 单调递增, $f'(x) < 0$ 时, $y = f(x)$ 单调递减可得, ①②中函数的图象的增减趋势与导函数的正负区间是吻合的, 可能正确; ③④中导函数为负的区间内相应的函数不为递减, 故错误.

2. C 解析: $f'(x) = \sqrt{3} \cos x$, 设直线 l 的倾斜角为 α , 斜率为 k , 则 $k = \tan \alpha$, 因为 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 所以 $-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$, 即 $-\sqrt{3} \leq \tan \alpha \leq \sqrt{3}$, 因为 $0 \leq \alpha < \pi$, 所以 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha < \pi$, 所以直线 l 的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$.

3. A 解析: 因为 $1 < a < b < e$, 所以 $a^b > a^a > a^0 = 1$, $b^a > b^0 = 1$, $0 < \log_a a < \log_a b = 1$, 对 $a^b, b^a, e^{\frac{ab}{e}}$ 这三个数先取自然对数再除以 ab , 则 $\frac{\ln a^b}{ab} = \frac{b \ln a}{ab} = \frac{\ln a}{a}$, $\frac{\ln b^a}{ab} = \frac{a \ln b}{ab} = \frac{\ln b}{b}$, $\frac{\ln e^{\frac{ab}{e}}}{ab} = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$ 解得 $x = e$, 当 $0 < x < e$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $f(a) < f(b) < f(e)$, 即 $\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b} < \frac{\ln e}{e}$, 则 $a^b < b^a < e^{\frac{ab}{e}}$, 故 $a^a < a^b < b^a < e^{\frac{ab}{e}}$.

4. 2 解析: 由定义得 $f(x) = \begin{vmatrix} e^x & t \\ x & 2 \end{vmatrix} = 2e^x - tx$, 所以 $f'(x) = 2e^x - t$, 因为函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) = 2e^x - t \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $t \leq 2e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 因为 $y = 2e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x = 0$ 时, $y_{\min} = 2$, 所以 $t \leq 2$, 故实数 t 的最大值为 2.

5. 解: (1) 因为 $f(x) = x^2 - x - 3 \ln x$, 所以 $f'(x) = 2x - 1 - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - x - 3}{x} (x > 0)$, 所以函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率 $k = f'(1) = -2$. 因为 $f(1) = 0$, 所以函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 2 = 0$. (2) 因为 $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x} = \frac{(x+1)(2x-3)}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$, 所以当 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in \left(\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{3}{2}, 3\right]$ 上单

调递增,

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - 3 \ln \frac{3}{2}$.

因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 3 \ln 2$, $f(3) = 6 - 3 \ln 3$,

所以 $f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{1}{4} - 3 \ln 6 > 6 + \frac{1}{4} - 3 \ln e^2 > 0$,

所以 $f(3) > f\left(\frac{1}{2}\right)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上的最大值为 $6 - 3 \ln 3$.

6. (1) 解: $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$,

因为切线 $ax - y = 0$ 过原点 $(0, 0)$,

所以 $k = \frac{e^{x_0} x_0 - e^{x_0}}{x_0^2} = \frac{x_0}{x_0^2}$,

解得 $x_0 = 2$.

(2) 证明: 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} (x > 0)$,

则 $g'(x) = \frac{e^x (x^2 - 2x)}{x^4}$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 2$,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

则 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}$,

所以当 $x > 0$ 时, $g(x) \geq \frac{e^2}{4} > 1$,

即 $f(x) > x$.

小测试(二十三) 分类计数原理 与分步计数原理

预习自评

1. B 2. D 3. C

基础过关

1. B 解析: 某同学从 4 本不同的科普杂志中任选 1 本, 有 4 种不同选法; 从 3 本不同的文摘杂志中任选 1 本, 有 3 种不同的选法; 从 2 本不同的娱乐新闻杂志中任选一本, 有 2 种不同的选法. 根据分类加法计数原理可得, 该同学不同的选法有 $4 + 3 + 2 = 9$ (种).

2. B 解析: 根据题意, 分 2 步进行分析: ① 先从 4 个

蔬菜品种中选出 3 个,有 4 种选法,②将选出的 3 种蔬菜分别种在 3 块不同土质的土地上,有 6 种情况,则不同的种植方法有 $4 \times 6 = 24$ (种). 故选 B.

3. D 解析:从 0,1,2,3,4,5 这六个数字中,任取两个不同的数字相加,和为偶数可分为两类:①取出的两数都是偶数,共有 3 种取法;②取出的两数都是奇数,共有 3 种取法. 故由分类加法计数原理得,共有 $3 + 3 = 6$ (种)不同取法.

4. B 解析:由题意可知分三步完成:第一步,从 2 种主食中任选一种,有 2 种选法;第二步,从 3 种素菜中任选一种,有 3 种选法;第三步,从 6 种荤菜中任选一种,有 6 种选法. 根据分步乘法计数原理,得不同的选取方法数为 $2 \times 3 \times 6 = 36$. 故选 B.

5. A 解析:根据题意,教学楼共有 6 层,共 5 层楼梯,每层均有两个楼梯,即每层有 2 种走法,则一共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ (种)走法. 故选 A.

6. 7 解析:分两种情况:当集合 C 中的元素属于集合 A 时,有 3 种情况;当集合 C 中的元素属于集合 B 时,有 4 种情况. $\because$ 集合 A 与集合 B 无公共元素, $\therefore$ 集合 C 的情况共有 $3 + 4 = 7$ (种).

7. 29 解析:由题意知本题是一个分步乘法计数问题,首先从集合 S 中选出一个数字共有 3 种结果,再从集合 P 中选出一个数字共有 5 种结果. $\because$ 取出的两个数字可以作为横坐标,也可以作为纵坐标, $\therefore$ 共有 $3 \times 5 \times 2 = 30$ (个)点,其中(1,1)重复了 1 次,去掉重复的共有 $30 - 1 = 29$ (个)不同的点.

8. 解:(1)分三类:

第一类,从高一年级选 1 个班,有 6 种不同的选法;第二类,从高二年级选 1 个班,有 7 种不同的选法;第三类,从高三年级选 1 个班,有 8 种不同的选法. 由分类加法计数原理,知共有 $6 + 7 + 8 = 21$ (种)不同的选法.

(2)分三步:

第一步,从高一年级选 1 个班,有 6 种不同的选法;第二步,从高二年级选 1 个班,有 7 种不同的选法;第三步,从高三年级选 1 个班,有 8 种不同的选法. 由分步乘法计数原理,知共有 $6 \times 7 \times 8 = 336$ (种)不同的选法.

(3)分三类:

第一类,从高一、高二两个年级中各选 1 个班,有 $6 \times 7 = 42$ (种)不同的选法;

第二类,从高一、高三两个年级中各选 1 个班,有 $6 \times 8 = 48$ (种)不同的选法;

第三类,从高二、高三两个年级中各选 1 个班,有 $7 \times 8 = 56$ (种)不同的选法.

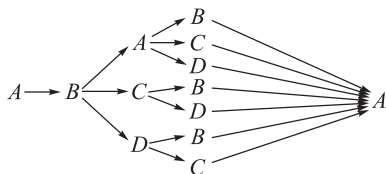
故共有 $42 + 48 + 56 = 146$ (种)不同的选法.

素养提升

1. A 解析:由于 1 号球不放入 1 号盒子,则 1 号球可放入 2,3,4 号盒子,有 3 种选择,则 2 号球有 3 种选择,3 号球有 2 种选择,4 号球只有 1 种选择. 根据分步乘法计数原理可得 1 号球不放入 1 号盒子的方法有 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ (种). 故选 A.

2. B 解析:由题意可得,若取出的是数学和语文学科,则有 $6 \times 4 = 24$ (种)不同的取法;若取出的是数学和英语学科,则有 $6 \times 10 = 60$ (种)不同的取法;若取出的是语文和英语学科,则有 $4 \times 10 = 40$ (种)不同的取法. 故根据分类加法计数原理可得共有 $24 + 60 + 40 = 124$ (种)不同的取法. 故选 B.

3. B 解析:根据已知,可作出如图所示的图,由图知,不同的爬行路线有 7 条.



4. 63 解析:由已知可得焊接点脱落的可能情况有 $2^6 - 1 = 63$ (种).

5. 解:(1)涂 A 区域有 3 种涂法, B, C, D 区域各有 2 种不同的涂法, 由分步乘法计数原理知共有 $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ (种)不同的涂色方案.

(2)因为恰好用 3 种不同颜色涂四个区域, 则 A, C 区域或 A, D 区域或 B, D 区域必同色, 由分类加法计数原理可得共有 $3 \times 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 = 18$ (种)不同的涂色方案.

6. 解:(1)得到一个三位数,分三步进行: 先填百位,再填十位,最后填个位. 百位上的数字填法有 6 种,十位上的数字填法有 5 种,个位上的数字填法有 4 种. 根据分步乘法计数原理,得各位数字互不相同的三位数有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ (个).

(2)分三步进行:

先填百位,再填十位,最后填个位,每位都有 6 种

填法,

根据分步乘法计数原理,可以排出 $6 \times 6 \times 6 = 216$ (个)不同的数.

(3)两个数字相同有三种可能性,即百位、十位相同,十位、个位相同,百位、个位相同,

而每种情况有 6×5 种填法,

故有 $3 \times 6 \times 5 = 90$ (个).

易错辨析

39 解析:每次升 1 面旗可组成 3 种不同的信号;每次升 2 面旗可组成 $3 \times 3 = 9$ (种)不同的信号;每次升 3 面旗可组成 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (种)不同的信号.根据分类加法计数原理可知,共可组成 $3 + 9 + 27 = 39$ (种)不同的信号.

小测试(二十四) 排列

预习自评

1. D 2. A 3. AD

基础过关

1. B 解析: $\because A_n^2 = 132, \therefore n(n-1) = 132$. 整理,得 $n^2 - n - 132 = 0$, 解得 $n = 12$ 或 $n = -11$ (不符合题意,舍去). $\therefore n$ 的值为 12. 故选 B.
2. BD 解析:从 17 名同学中选 7 名全部排序站在前排有 A_{17}^7 种排法,剩下 10 名同学全排在后排有 A_{10}^{10} 种排法. 根据分步乘法计数原理,共有 $A_{17}^7 \cdot A_{10}^{10}$ 种方法. 将前、后排视为一排,共有 A_{17}^{17} 种方法. 故选 BD.
3. C 解析:由题意,先排个位数字,共有 3 种,再从剩余的四个数字中选出两个排在百位和十位,共有 $A_4^2 = 12$ 种. 由分步乘法计数原理可得,共有 $3 \times 12 = 36$ 种不同的排法.
4. C 解析:因为节目甲必须排在前两位,节目乙必须排在最后一位,所以该晚会节目演出顺序的编排方案共有 $1 \times 2 \times A_4^4 = 48$ (种).
5. C 解析:由题意知正方形 $ABCD$ (边长为 3 个单位长度)的周长是 12. 抛掷三次骰子后棋子恰好又回到点 A 处,表示三次骰子的点数之和是 12. 列举出三个点数之和为 12 的组合: $(1, 5, 6); (2, 4, 6); (3, 4, 5); (3, 3, 6); (5, 5, 2); (4, 4, 4)$ 共有 6 种. 前三种组合 $(1, 5, 6); (2, 4, 6); (3, 4, 5)$ 每种可以排列出 $A_3^3 = 6$ (种)结果,共有 $3A_3^3 = 3 \times 6 = 18$ (种)结果. $(3, 3, 6); (5, 5, 2)$ 这 2 种组合各有 3 种结果,共有

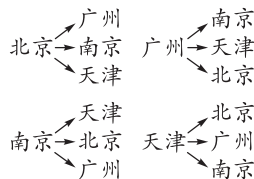
$2 \times 3 = 6$ (种)结果. $(4, 4, 4)$ 有 1 种结果. 根据分类加法计数原理知共有 $18 + 6 + 1 = 25$ (种)结果.

6. 9 解析: (x, y) 对应的点不在坐标轴上,即从数集 A 中的 $(n-1)$ 个元素中任取两个,即 $A_{n-1}^2 = 56$, 即 $(n-1)(n-2) = 56$, 解得 $n = 9$ 或 $n = -6$ (舍去), 故 $n = 9$.

7. 260 解析:要使 $ab+c$ 为奇数,则数组 (a, b, c) 的奇偶性为(偶、偶、奇),(奇、偶、奇),(偶、奇、奇),(奇、奇、偶),所有情况的种数为 $A_3^2 \cdot A_1^1 + 3 \cdot A_1^2 \cdot A_1^1 = 80 + 180 = 260$.

8. 解:(1)是排列问题.

列出每一个起点和终点的情况,如图所示.



故应该有 12 种机票.

(2)不是排列问题.

焦点在 x 轴上的椭圆,其方程中的 a, b 必有 $a > b$, 即取出的两个数哪个是 a , 哪个是 b 是确定的.

素养提升

1. D 解析: $27-a, 28-a, \dots, 34-a$ 中最大的数为 $34-a$, 一共有 $34-a-(27-a)+1=8$ (个)因式, 所以 $(27-a)(28-a) \cdot \dots \cdot (34-a) = A_{34-a}^8$.
2. ABC 解析:因为同一类型的画挂在一起,所以 4 幅油画全排列,有 A_4^4 种,5 幅国画全排列,有 A_5^5 种,水彩画不在两端,所以将油画和国画排在水彩画两边,有 A_2^2 种. 则不同的排列方式共有 $A_2^2 A_4^4 A_5^5$ 种,故 D 正确, A, B, C 都是错误的.
3. B 解析:因为数学和物理都不排在第一节,所以可先从其他 3 门课中任选 1 门排在第一节,有 3 种排法;然后将剩余的 4 门课排在第二至第五节且数学与物理不相邻,先排数学和物理之外的两门,有 A_2^2 种排法,再把数学和物理插入到这两门课形成的 3 个空位中,有 A_3^3 种排法. 根据分步乘法计数原理, 可知有 $3A_2^2 A_3^3 = 36$ (种)不同的课表排法.
4. 210 解析:若 1, 3, 5, 7 的顺序不定,排法有 $A_4^4 = 24$ (种),故 1, 3, 5, 7 的顺序一定的排法数只占总排法数的 $\frac{1}{24}$. 故符合条件的七位数有 $\frac{1}{24} A_7^7 = 210$ (个).
5. 解:(1)百位选 5, 7, 9 中的一张,有 A_3^1 种排法;

十位和个位从剩余 4 张中选 2 张排列,有 A_4^2 种排法.

所以大于 500 的三位数的个数为 $A_3^1 A_4^2 = 3 \times 4 \times 3 = 36$.

(2)百位不能选 0,有 A_4^1 种排法;

十位和个位从剩余 4 张中选 2 张排列,有 A_4^2 种排法.

所以可组成的三位数的个数为 $A_4^1 A_4^2 = 4 \times 4 \times 3 = 48$.

(3)分两类:

第一类,没抽中印有 9 的卡片,则有 $A_3^1 A_3^2$ 个三位数;

第二类,抽中印有 9 的卡片,若没抽中印有 0 的卡片,

则有 $2 \times 3 A_3^2$ 个三位数;

若抽中印有 0 的卡片,

则有 $2 \times 3 A_2^1 A_2^2$ 个三位数.

所以共有 $A_3^1 A_3^2 + 2 \times 3 A_3^2 + 2 \times 3 A_2^1 A_2^2 = 78$ (个).

6. 解: (1)根据题意,分两步进行分析:

①先将 3 名男生排成一排,有 A_3^3 种情况;

②男生排好后有 4 个空位,在 4 个空位中任选 3 个,安排 3 名女生,有 A_4^3 种情况.

故有 $A_3^3 \times A_4^3 = 144$ (种)不同的出场顺序.

(2)根据题意,将 6 人排成一排,有 A_6^6 种情况,

其中女生甲在女生乙的前面和女生甲在女生乙的后面的排法数是一样的,

则女生甲在女生乙的前面的排法有 $\frac{A_6^6}{2} = 360$ (种).

(3)根据题意,分三步进行分析:

①先将 3 名男生看成一个整体,考虑 3 人内部的顺序,有 A_3^3 种情况;

②将除女生甲之外的 2 名女生和 3 名男生的整体全排列,有 A_5^5 种情况;

③女生甲不在第一个出场,则女生甲的安排方法有 A_4^1 种.

故有 $A_3^3 A_5^5 A_4^1 = 108$ (种)符合题意的安排方法.

易错辨析

解: 由 $A_8^x < 6 A_8^{x-2}$, 得

$$\frac{8!}{(8-x)!} < 6 \times \frac{8!}{(10-x)!}, 2 < x \leq 8,$$

化简得 $x^2 - 19x + 84 < 0$,

解得 $7 < x < 12$.

所以 $7 < x \leq 8$.

由 $x \in \mathbb{N}^*$, 得 $x = 8$.

小测试(二十五) 组 合

预习自评

1. C 2. B 3. B

基础过关

1. A **解析:** 根据题意,数字 5 是取出的五个不同数的中位数,则取出的数字中必须有 5, 6, 7, 在 1, 2, 3, 4 中有 2 个数字,则不同的取法种数为 $C_4^2 = 6$.

2. B **解析:** 由 $C_{25}^x = C_{25}^{x+4}$ 知 $2x = x + 4$ 或 $25 - 2x = x + 4$, $\therefore x = 4$ 或 $x = 7$.

3. B **解析:** 利用间接法,先从 8 个点中任取 3 个点,再减去三点共线的情况,因此,符合条件的三角形的个数为 $C_8^3 - C_4^3 - C_3^3 = 42$.

4. D **解析:** 由题意知,要使正方体的顶点为构成的三棱锥的顶点,则 4 个顶点不共面,从 8 个顶点中任选 4 个,有 C_8^4 种,其中共面的有 12 种,则以正方体的顶点为顶点的三棱锥有 $C_8^4 - 12 = 58$ (个).

5. C **解析:** 此题可理解为从 6 个盒子中选择 4 个盒子放入小球(小球无差别),因此有 $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ (种)不同的放法,故选 C.

6. 7 315 **解析:** 原式 $= C_5^0 + C_4^1 + C_5^2 + \cdots + C_{21}^{18} = C_5^1 + C_5^2 + \cdots + C_{21}^{18} = C_{21}^{17} + C_{21}^{18} = C_{22}^{18} = C_{22}^{4} = 7 315$.

7. 15 **解析:** 根据题意,平面内有 6 条直线,其中没有两条平行,也没有三条交于一点,则任意两条直线确定一个交点,则共有 $C_6^2 = 15$ 个交点.

8. **解:** (1)从 10 名教师中选 2 名去参加会议的选法有 $C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ (种).

(2)从 6 名男教师中选 2 名的选法有 C_6^2 种,

从 4 名女教师中选 2 名的选法有 C_4^2 种.

根据分步乘法计数原理,得不同的选法数为

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 90 \text{ (种)}.$$

素养提升

1. C **解析:** 在同一个平面内的 4 个点共有 12 组(6 组为对角面,6 组为正方体的底面和侧面),故不在同一个平面的 4 个点有 $C_8^4 - 12 = 70 - 12 = 58$ (组),每一组不共面的 4 个点形成 3 对异面直线,故共有 $58 \times 3 = 174$ (对)异面直线.

2. B 解析:从物理、历史 2 科中选择 1 科,有 $C_2^2=2$ (种)选法,从政治、地理、化学、生物 4 科中选择 2 科,有 $C_4^2=6$ (种)选法,所以学生不同的选科方案共有 $2 \times 6=12$ (种). 故选 B.

3. BC 解析:(1)分三类:3 男 1 女,2 男 2 女,1 男 3 女,所以男、女生至少各有 1 人参加的选法种数为 $C_7^3 C_5^1 + C_7^2 C_5^2 + C_7^1 C_5^3$. (2)从 12 人中任选 4 人的方法种数为 C_{12}^4 ,其中全部为男生或全部为女生的方法种数为 $C_7^4 + C_5^4$,故不同的选法种数应为 $C_{12}^4 - C_7^4 - C_5^4$. 故选 BC.

4. 472 解析:本题的解题关键是抓住有无红色卡片来讨论. 若没有红色卡片,则需从黄、蓝、绿三色卡片中选 3 张,若都不同色,则有 $C_4^1 C_4^1 C_4^1=64$ (种);若 2 张同色,则有 $C_3^2 C_2^1 C_4^1=144$ (种). 若红色卡片有 1 张,剩余 2 张不同色,则有 $C_4^1 C_3^2 C_4^1=192$ (种);剩余 2 张同色,则有 $C_4^1 C_3^2 C_4^1=72$ (种). 故共有 $64+144+192+72=472$ (种).

5. 解:(1)从 1,3,5,7,9 中任取两个数,从 2,4,6,8 中任取两个数,

组成 $C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot A_4^4=10 \times 6 \times 24=1\,440$ 个没有重复数字的四位数.

(2)当 0 在末位时,共有 $C_5^2 C_4^1 A_3^3=10 \times 4 \times 6=240$ (个)四位偶数,

当末位为 2,4,6,8 (且 0 不在首位),共有 $4C_5^2 C_4^1 A_3^3 - 4A_5^2=880$ (个)四位偶数,

则可以组成 $240+880=1\,120$ (个)四位偶数.

6. 解:(1)先把 6 个相同的小球排成一行,在首尾两球外侧各放置一块隔板,

然后在小球之间 5 个空隙中任选 3 个空隙各插一块隔板,有 $C_5^3=10$ (种)不同插法.

(2)恰有一个空盒子,插板分两步进行:

先在首尾两球外侧各放置一块隔板,

然后在小球之间 5 个空隙中任选 2 个空隙各插一块隔板,

如 $| \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc |$,

有 C_5^2 种插法,

然后将剩下的一块隔板与前面任意一块并放形成空盒,

如 $| \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc || \bigcirc \bigcirc |$,

有 C_4^1 种插法,故共有 $C_5^2 C_4^1=40$ (种).

(3)恰有两个空盒子,插板分两步进行:

先在首尾两球外侧各放置一块隔板,

然后在小球之间 5 个空隙中任选 1 个空隙插一块隔板,

有 C_5^1 种插法,

如 $| \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc |$,

然后将剩下的两块隔板插入形成空盒.

①这两块隔板与前面三块隔板形成不相邻的两个空盒子,

如 $|| \bigcirc \bigcirc || \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc |$,

有 C_3^2 种插法.

②将两块隔板与前面三块隔板之一并放,

如 $| \bigcirc \bigcirc ||| \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc |$,

有 C_3^1 种插法.

故共有 $C_5^1 \cdot (C_3^2 + C_3^1)=30$ (种).

易错辨析

解:依题意知, $0 \leq m \leq 5, m \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{因为} & \frac{m! \cdot (5-m)!}{5!} - \frac{m! \cdot (6-m)!}{6!} \\ &= \frac{7 \times m! \cdot (7-m)!}{10 \times 7!}, \end{aligned}$$

化简得 $m^2 - 23m + 42 = 0$,

解得 $m=21$ (舍去)或 $m=2$.

所以 $m=2$.

小测试(二十六) 排列组合的综合运用

预习自评

1. C 2. C 3. A

基础过关

1. B 解析:乡镇 A 派 2 名男生有 $C_3^2=3$ 种方法,然后剩下 3 人派给乡镇 B, C, 有 $C_3^3 A_2^2=6$ 种方法,故共有 $3 \times 6=18$ 种方法.

2. A 解析:6 个人分成 3 组,有 $(2,2,2), (3,2,1), (4,1,1)$ 三种情况.

按 $(2,2,2)$ 分组,有 $\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{A_3^3} \times A_3^3=90$ (种);

按 $(3,2,1)$ 分组,有 $C_6^3 \times C_3^2 \times C_1^1 \times A_3^3=360$ (种);

按 $(4,1,1)$ 分组,有 $\frac{C_6^4 \times C_2^1 \times C_1^1}{A_2^2} \times A_3^3=90$ (种).

故一共有 $90+360+90=540$ (种)方法. 故选 A.

3. A 解析:根据题意,先给班级序号为 $(2), (3), (4)$ 的 3 个班级分别分配 1, 2, 3 个名额,班级序号为 (1) 的班级不分配;再将剩下的 6 个名额分配给 4

个班级,每个班级至少一个,分析可得,共 $C_5^3=10$ 种分法,即符合题目要求的分法共 10 种.

4. AB 解析:对于 A,取 4 个元素组成无重复数字的四位数,若取 0:有 $C_3^3 C_3^1 A_3^3=180$ (个);若不取 0:有 $C_4^4 A_4^4=120$ (个),共 $180+120=300$ (个),故选项 A 正确. 对于 B, M 中有 3 个偶数,若末位为 0,有 $A_3^2=20$ (个);若末位为 2 或 4,有 $C_2^2 C_4^1 C_3^1=32$ (个),共有 $20+32=52$ (个),故选项 B 正确. 对于 C,从集合 M 中任取 3 个元素能够组成 $A_3^3=120$ 个三位密码,故选项 C 不正确. 对于 D,三个数的和为 3 的有 $(0,1,2)$,有 1 种,三个数的和为 6 的有 $(0,1,5)$; $(1,2,3)$; $(0,2,4)$,有 3 种,三个数的和为 9 的有 $(0,4,5)$; $(1,3,5)$; $(2,3,4)$,有 3 种,三个数的和为 12 的有 $(3,4,5)$,有 1 种,共有 $1+3+3+1=8$ (种),故选项 D 不正确.

5. C 解析:分三步,先从 3 名老师中选 1 人,4 名学生中选 2 人组成一组去甲地,有 $C_3^1 C_4^2=18$ 种方法,再把剩下的 2 名老师分到乙、丙两地各 1 人,有 $A_2^2=2$ (种)方法,最后把剩下的 2 名学生分到乙、丙两地各 1 人,有 $A_2^2=2$ (种)方法,由分步乘法计数原理可得共有 $18 \times 2 \times 2=72$ (种)不同的安排方案.

6. 2 解析: $\because 5C_{n+5}^5=(n+7)C_{n+3}^{n-1}+3A_{n+3}^2$,
 $\therefore 5 \times \frac{(n+5)!}{5! \times (n+5-5)!} = (n+7) \times \frac{(n+3)!}{(n-1)! \times (n+3-n+1)!} + 3(n+3)(n+2)$,
 $\therefore 5 \times \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = (n+7) \times \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + 3 \times (n+3)(n+2)$,
 $\therefore \frac{(n+5)(n+4)(n+1)}{24} = \frac{(n+7)(n+1)n}{24} + 3$, 由 $n \in \mathbf{N}^*$, 解得 $n=2$.

7. 12 解析:根据题意,要求高一年级安排 2 位教师,则高一有 $C_4^2=6$ 种安排方法;高二、高三年级各安排 1 位教师,则高二、高三年级有 $A_2^2=2$ (种)安排方法,故共有 $6 \times 2=12$ 种不同的安排方法.

8. 解:(1)先将 6 本不同的书分成 1 本,2 本,3 本三堆,有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ 种分法,再将分好堆的书分配给甲、乙、丙 3 人,有 A_3^3 种分法,故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3=360$ (种)不同的分法.
 (2)只需从 6 本中选 4 本为一组,其余 2 本为两组,

共有 $C_6^4=15$ (种)不同的分法.

- (3)分步处理,先从 6 本中选 4 本给丙,其余 2 本分给甲、乙各 1 本,共有 $C_6^4 A_2^2=30$ (种)不同的分法.

素养提升

1. C 解析:根据题意,由于每种课外活动兴趣班安排一天,每天至少一种,所以必有两种在同一天,先从四种课外活动兴趣班中任选 2 种看成一个整体,然后与其他 2 种兴趣班全排列,共 $C_4^2 \cdot A_3^3=36$ 种情况,再从中排除播音主持、足球安排在同一天的情形,将播音主持、足球看成一个整体,然后与其他 2 种兴趣班全排列,共 $A_3^3=6$ 种情况,故总的方法种数为 $36-6=30$.

2. C 解析:根据题意,分 2 种情况讨论,若甲、乙其中一人参加,有 $C_2^1 C_3^2 A_4^4=480$ (种)情况;若甲、乙两人都参加,则丙不能参加,有 $C_2^2 C_4^2 A_4^4=144$ (种)情况,其中甲、乙相邻的有 $C_2^2 C_4^2 A_3^3 A_2^2=72$ (种)情况,则甲、乙两人都发言且顺序不相邻的概率为 $P = \frac{144-72}{480+144} = \frac{3}{26}$.

3. BD 解析:对于 A,若 1 班不再分配名额,则 20 个名额分配到 5 个班级,每个班级至少 1 个,根据挡板法,有 C_{19}^4 种分配方法,故 A 错误;对于 B,若 1 班有除劳动模范之外的学生参加,则 20 个名额分配到 6 个班级,每个班级至少 1 个,根据挡板法,有 C_{19}^5 种分配方法,故 B 正确;对于 C, D,若每个班至少 3 人参加,相当于 16 个名额被占用,还有 4 个名额需要分到 6 个班级,分 5 类:①4 个名额分到一个班,有 6 种;②一个班 3 个名额,一个班 1 个名额,有 $A_6^2=30$ 种;③两个班都是 2 个名额,有 $C_6^2=15$ 种;④两个班各 1 个名额,一个班 2 个名额,有 $C_6^1 C_5^2=60$ 种;⑤四个班都是 1 个名额,有 $C_6^4=15$ 种,则共有 126 种,故 C 错误, D 正确.

4. 5 040 解析:若只有 1 人参加“演讲团”,则从 6 人中选 1 人参加该社团,其余 5 人去剩下的 4 个社团,人数安排有 2 种情况:1,1,1,2 和 1,2,2,故 1 人参加“演讲团”的不同参加方法数为 $C_6^1 \left(\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} A_4^4 + \frac{C_5^1 C_4^1 C_3^1}{A_3^3} A_4^4 \right) = 3\,600$;若无人参加“演讲团”,则 6 人参加剩下的 4 个社团,人数安排有 2 种情况:1,1,2,2 和 2,2,2,故无人参加“演讲团”的不同参加方法数为 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_2^2 A_2^2} A_4^4 + C_4^1 C_3^2 C_2^1 = 1\,440$. 故满足条件的

方法数为 $3\ 600 + 1\ 440 = 5\ 040$.

5. 解: (1) 甲、乙两个日游景点选 1 个, 有 $C_2^1 C_3^3 A_4^4$ 种, 甲、乙两个日游景点都选, 有 $C_6^2 A_4^4$ 种,

夜游景点的选法有 C_2^1 种,

所以共有 $C_2^1 \times (C_6^2 A_4^4 + C_2^2 C_3^3 A_4^4) = 2\ 640$ (种) 不同的排法.

(2) 甲、乙两个日游景点在同一天游玩, 排在第一天或第二天, 有 C_2^2 种排法,

安排在上午、下午, 有 A_2^2 种,

剩下的两个日游景点从除去甲、乙之外的 6 个里选, 有 A_6^2 种,

夜游景点的选法有 C_2^1 种,

故共有 $C_2^1 \times C_2^2 \times A_2^2 \times A_6^2 = 240$ (种) 不同的排法.

(3) 不受限制的排法为 $C_2^1 A_8^8$ 种,

甲、乙两个日游景点都选有 $C_2^2 C_6^2 A_4^4$ 种,

所以甲、乙两个日游景点不同时被选, 共有 $C_2^1 \times (A_8^8 - C_2^2 A_6^2) = 2\ 640$ (种) 不同的排法.

6. 解: (1) $C_3^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$,

共有 56 种不同的选法.

(2) 5 个人按 3, 1, 1 分成 3 组共有 $C_5^3 = 10$ 种分法, 再分到科室有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法,

5 个人按 2, 2, 1 分成 3 组共有 $\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} = 15$ 种分法,

再分到科室有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法.

综上, 共有 $(C_5^3 + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2}) A_3^3 = 150$ (种) 安排方法.

(3) 将 A, B 两人看成一个整体,

则 A, B 两人内部有 A_2^2 种排法,

剩下 6 人有 A_6^6 种安排方法,

把 A, B 这个整体插到中间 5 个空中的 1 个空, 有 A_5^1 种排法,

根据分步乘法计数原理, 得共有 $A_2^2 A_5^1 A_6^6 = 7\ 200$ 种站位方法.

易错辨析

1. 56 解析: 8 个小球排好后对应着 8 个位置, 题中的排法相当于在 8 个位置中选出 3 个位置给红球, 剩下的位置给白球, 由于这 3 个红球完全相同, 所以没有顺序, 是组合问题, 这样共有 $C_8^3 = 56$ (种) 排法.

2. 120 解析: 因为选 4 人参加男女混合双打比赛, 所以男、女运动员各 2 名. 第一步, 从 4 名男运动员中选 2 人, 有 C_4^2 种方法; 第二步, 从 5 名女运动员中

选 2 人, 有 C_5^2 种方法; 第三步, 将选出的 2 男 2 女进行 1 男 1 女的配对, 有 A_2^2 种方法. 所以配对情况共有 $C_4^2 \cdot C_5^2 \cdot A_2^2 = 120$ (种).

小测试(二十七) 二项式定理

预习自评

1. D 2. A 3. C

基础过关

1. C 解析: 由题可得 $T_{k+1} = C_5^k \cdot (x^2)^{5-k} \cdot (-\frac{2}{x})^k = (-1)^k C_5^k \cdot 2^k \cdot x^{10-3k}$, 令 $10-3k=4$,

得 $k=2$, 所以 x^4 的系数为 $(-1)^2 C_5^2 \cdot 2^2 = 40$. 故选 C.

2. B 解析: $1+3x+3x^2+x^3 = C_3^0 \cdot 1^3 + C_3^1 \cdot x \cdot 1^2 + C_3^2 \cdot x^2 \cdot 1 + C_3^3 \cdot x^3 \cdot 1^0 = (x+1)^3$.

3. A 解析: 由题意得展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (2x)^{6-k} \cdot (-\frac{1}{x})^k = (-1)^k 2^{6-k} C_6^k x^{6-2k}$, 令 $6-2k=0$, 得 $k=3$, 所以常数项为 $T_4 = (-1)^3 \times 2^3 \times C_6^3 = -160$.

4. B 解析: $(x + \frac{a}{x})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot x^{6-k} \cdot (\frac{a}{x})^k = C_6^k \cdot x^{6-2k} \cdot a^k$, 取 $k=3$ 得到常数项为 $C_6^3 \cdot a^3 = 20a^3 = -160$, 解得 $a = -2$.

5. A 解析: 因为 $(x - \frac{1}{x} - 1)^4 = [(x - \frac{1}{x}) - 1]^4$, 所以展开式中的常数项为 $C_4^1 (x - \frac{1}{x})^0 (-1)^4 + C_4^2 C_2^1 (-\frac{1}{x}) x (-1)^2 + C_4^0 C_4^2 x^2 (-\frac{1}{x})^2 (-1)^0 = C_4^1 - C_4^2 C_2^1 + C_4^0 C_4^2 = -5$.

6. -1 080 解析: 由题意可知, $(2-3x)^5$ 中 x^3 的系数即为所求, 因为 $(2-3x)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k \cdot 2^{5-k} \cdot (-3)^k \cdot x^k$, 所以令 $k=3$, 此时 $C_5^3 \cdot 2^{5-3} \cdot (-3)^3 = C_5^3 \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 = -1\ 080$.

7. $(0, 1]$ 解析: 由二项式定理得 $(x^2 + \frac{a}{x})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (x^2)^{6-k} (\frac{a}{x})^k = C_6^k a^k x^{12-3k}$. 令 $12-3k=0$, 得 $k=4$, 所以常数项为 $C_6^4 a^4$. 又 $(x^2 + \frac{a}{x})^6$ 的展开式中的常数项的值不大于 15, 则 $15a^4 \leq 15$. 又 $a \in [0, 3]$, 所以 $0 \leq a \leq 1$, 又当 $a=0$

时, $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^6 = x^{12}$, 无常数项, 所以 a 的取值范围为 $(0, 1]$.

8. 解: $(\sqrt{2} + x)^7$ 的展开式的通项公式为

$$T_{k+1} = C_7^k (\sqrt{2})^{7-k} \cdot x^k, k=0, 1, 2, \dots, 7.$$

要使系数为有理数, 则 $(\sqrt{2})^{7-k}$ 为有理数.

则 k 可以取 1, 3, 5, 7.

所以系数为有理数的项的个数为 4.

素养提升

1. D 解析: 由二项展开式的通项公式可得 $\left(3x^3 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_n^k (3x^3)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = 3^{n-k} C_n^k x^{3n-\frac{7}{2}k}$, 因为展开式中含有常数项, 则 $3n - \frac{7}{2}k = 0$ 有正整数解, 满足题意的最小的正整数为 $k=6, n=7$. 故选 D.

2. D 解析: $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r (x^3)^{4-r} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_4^r x^{12-4r} (r=0, 1, 2, 3, 4)$, 令 $12-4r=0$, 则 $r=3$, 所以展开式中的常数项为 $(-2)^3 \times C_4^3 = -32$. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k x^{8-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_8^k x^{8-2k} (k=0, 1, \dots, 8)$, 令 $8-2k=0$, 得 $k=4$, 所以展开式中的常数项为 $C_8^4 = 70$. 所以 $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^4 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中的常数项为 $-32 + 70 = 38$. 故选 D.

3. C 解析: 因为 $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^6$ 中只有 $(1+x)^5$ 和 $(1+x)^6$ 中含有 x^5 的项, $(1+x)^5$ 中含 x^5 的项为 x^5 , $(1+x)^6$ 中含 x^5 的项为 $C_6^5 x^5$, 所以 $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^6$ 的展开式中含 x^5 的项的系数是 $1 + C_6^5 = 7$. 故选 C.

4. 17 解析: 令 $x=1$ 可得 $(a+1)(1+1)^6 = 64(a+1) = 192$, 解得 $a=2$, 所以二项式为 $\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)(x+1)^6$, 其展开式中的常数项为 $2 \times C_6^6 + \frac{1}{x^2} \cdot C_6^4 x^2 = 2 + C_6^4 = 2 + 15 = 17$.

5. 解: 因为 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中前三项的二项式系数满足 $C_n^1 = C_n^0 + \frac{1}{4} C_n^2$,

$$\text{所以 } n = 1 + \frac{n(n-1)}{8},$$

$$\text{即 } n^2 - 9n + 8 = 0,$$

解得 $n=8$ 或 $n=1$ (舍去).

则二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$$C_8^k \cdot x^{\frac{8-k}{2}} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot x^{-\frac{k}{4}} = \frac{1}{2^k} \cdot C_8^k \cdot x^{4-\frac{3}{4}k}.$$

$$(1) \text{ 令 } 4 - \frac{3}{4}k = 1, \text{ 得 } k = 4,$$

$$\text{所以含有 } x \text{ 项的系数为 } \frac{1}{2^4} \times C_8^4 = \frac{35}{8}.$$

(2) 设展开式中, 第 $k+1$ 项为有理项,

则当 $k=0, 4, 8$ 时对应的项为有理项,

$$\text{有理项分别为 } T_1 = x^4, T_5 = \frac{35}{8}x, T_9 = \frac{1}{256x^2}.$$

6. 解: (1) $3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 9^{2n+1} + 5^{2n+1} = [(9+5) - 5]^{2n+1} + 5^{2n+1} = (14-5)^{2n+1} + 5^{2n+1} = 14^{2n+1} - C_{2n+1}^1 \times 14^{2n} \times 5 + C_{2n+1}^2 \times 14^{2n-1} \times 5^2 - \dots + C_{2n+1}^{2n} \times 14 \times 5^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1} \times 5^{2n+1} + 5^{2n+1} = 14(14^{2n} - C_{2n+1}^1 \times 14^{2n-1} \times 5 + C_{2n+1}^2 \times 14^{2n-2} \times 5^2 - \dots + C_{2n+1}^{2n} \times 5^{2n})$.

因为上式是 14 的倍数, 能被 14 整除,

所以 $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ 能被 14 整除.

$$(2) 91^{92} = (100-9)^{92} = 100^{92} - C_{92}^1 \times 100^{91} \times 9 + C_{92}^2 \times 100^{90} \times 9^2 - \dots - C_{92}^{91} \times 100 \times 9^{91} + 9^{92},$$

前面各项均能被 100 整除,

只有末项 9^{92} 不能被 100 整除,

于是问题转化为求 9^{92} 除以 100 的余数.

$$\text{因为 } 9^{92} = (10-1)^{92} = 10^{92} - C_{92}^1 \times 10^{91} + C_{92}^2 \times 10^{90} - \dots + C_{92}^{90} \times 10^2 - C_{92}^{91} \times 10 + (-1)^{92} = 10^{92} - C_{92}^1 \times 10^{91} + C_{92}^2 \times 10^{90} - \dots + C_{92}^{90} \times 10^2 - 920 + 1 = (10^{92} - C_{92}^1 \times 10^{91} + C_{92}^2 \times 10^{90} - \dots + C_{92}^{90} \times 10^2 - 1\,000) + 81,$$

所以 91^{92} 除以 100 的余数为 81.

易错辨析

C 解析: 由二项式定理可得 $\left(x^6 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k (x^6)^{5-k} \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^k = C_5^k (-1)^k \cdot x^{30-\frac{15}{2}k} (k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$. 令 $30 - \frac{15}{2}k = 0$, 得 $k=4$, 所以二项式 $\left(x^6 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的第 $4+1=5$ 项为常数项. 故选 C.

小测试(二十八) 二项式系数的性质

预习自评

1. A 2. B 3. A

基础过关

1. C 解析:令 $x=1$, 得各项系数和为 4^n , 因为二项式系数和为 2^n , 所以 $\frac{4^n}{2^n}=64$, 解得 $n=6$.

2. D 解析:由题意知 $(a-1)^{2020}=1$, 所以 $a-1=\pm 1$. 因为 a 为正实数, 所以 $a=2$. 所以展开式的第 2020 项为 $T_{2020} = C_{2020}^{2019} \cdot (2x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{2019} = -2C_{2020}^1 \cdot x^{-2018} = -4040 \cdot x^{-2018} = -\frac{4040}{x^{2018}}$.

3. ABC 解析:对于选项 A, 由组合数的性质直接可得 $C_n^m = C_n^{n-m}$, 故选项 A 正确; 对于选项 B, 由杨辉三角的性质直接可得 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$, 故选项 B 正确; 对于选项 C, 二项展开式中, 令 $a=b=1$, 不论 n 为奇数还是偶数, 都可得 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$, 故选项 D 不正确.

4. C 解析:令二项式中的 x 为 1 得到各项系数之和 $M=4^n$, 又各项二项式系数之和 $N=2^n$, $M+N=72$, 所以 $4^n+2^n=72$. 解得 $n=3$.

5. D 解析:在 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ 中, 令 $x=1$, 得 $3^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}$. 令 $x=-1$, 得 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n}$. 所以 $3^n + 1 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n})$, 所以 $3^n + 1 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$, 所以 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{3^n + 1}{2}$.

6. -48 解析:令 $x=1$, 得 $(1+1)(2-a)^5=2$, 解得 $a=1$. 又 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = (-1)^k 2^{5-k} C_5^k \cdot x^{5-2k}$. 分别令 $5-2k=3, 5-2k=5$, 解得 $k=1, k=0$. $\therefore$ 该展开式中 x^4 的系数为 $(-1)^1 2^4 C_5^1 + (-1)^0 2^5 C_5^0 = -80 + 32 = -48$.

7. 252 解析: $x^{10} = [1+(x-1)]^{10} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{10}(x-1)^{10}$, $[1+(x-1)]^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k 1^{10-k} (x-1)^k = C_{10}^k (x-1)^k$, 则 $a_5 = C_{10}^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$.

8. 解:(1)由题意知 $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 128 = 2^7$,

故 $n=7$,

通项为 $T_{k+1} = C_n^k (2x^2)^{n-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k 2^{n-k} C_n^k x^{2n-3k}$,

$\therefore$ 展开式中二项式系数最大的项为

$$T_4 = (-1)^3 2^4 C_7^3 x^5 = -560x^5,$$

$$T_5 = (-1)^4 2^3 C_7^4 x^2 = 280x^2.$$

(2) 由 (1) 知 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的通项为 $T_{k+1} = (-1)^k 2^{7-k} C_7^k x^{14-3k}$,

$\therefore$ 在 $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中, 当 $2x \cdot T_{k+1} = (-1)^k 2^{8-k} C_7^k x^{15-3k}$ 为常数项时, $k=5$;

当 $\frac{1}{x^2} \cdot T_{k+1} = (-1)^k 2^{7-k} C_7^k x^{12-3k}$ 为常数项时, $k=4$.

综上, 展开式中的常数项为 $(-1)^5 2^3 C_7^5 + (-1)^4 2^3 C_7^4 = 112$.

素养提升

1. A 解析: $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}\right)^n$ 的展开式中, 所有奇数项的二项式系数之和等于 $2^{n-1} = 1024$, 得 $n=11$, 则中间项的二项式系数是 $C_{11}^5 = C_{11}^6 = 462$. 故选 A.

2. D 解析: $(x+y)^n$ 的展开式的第七项系数为 C_n^6 , 且最大, 由此可知当展开式的项数为奇数时, $\frac{n}{2}=6$, $n=12$; 当展开式的项数为偶数时, $\frac{n+1}{2}=6$, $n=11$, 或 $\frac{n+1}{2}=7$, $n=13$, 故 $n=11, 12, 13$.

3. B 解析: $\because$ 二项式 $\left(a\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n (a>0)$ 的展开式的第五、六项的二项式系数相等且最大, $\therefore n=9$. 又 $\because \left(a\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_9^r a^{9-r} \cdot x^{\frac{9-r}{2}} x^{-\frac{r}{3}} = a^{9-r} C_9^r x^{\frac{27-5r}{6}}$. 令 $\frac{27-5r}{6}=2$, 解得 $r=3$. 又展开式中含 x^2 项的系数为 84, 即 $a^6 C_9^3 = 84$, 解得 $a=1$ 或 $a=-1$ (舍去).

4. 20 解析:由题意可知 $a_1 = C_n^1, a_2 = C_n^2$, 所以 $C_n^1 + C_n^2 = 21$, 即 $n + \frac{n(n-1)}{2} = 21 \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0$, 即 $(n-6)(n+7) = 0$, 解得 $n=6$ 或 $n=-7$ (舍去). 故展开式各项系数中, 最大值为 $C_6^3 = 20$.

5. 解:(1)由展开式中所有偶数项的二项式系数和

为 64,

得 $2^{n-1}=64$, 所以 $n=7$,

所以展开式中二项式系数最大的项为第四项和第五项.

因为 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$$C_7^k (2x^2)^{7-k} (-1)^k \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_7^k 2^{7-k} (-1)^k x^{14-3k},$$

所以展开式中二项式系数最大的项为

$$T_4 = -560x^5,$$

$$T_5 = 280x^2.$$

(2) 由 (1) 知 $n=7$, 且 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中含 x^{-1} 的项为 $T_6 = -\frac{84}{x}$,

含 x^2 的项为 $T_5 = 280x^2$,

所以 $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中常数项为 $2 \times (-84) + 1 \times 280 = 112$.

6. 解: (1) 因为 $A_n^5 = 56C_n^7$,

所以 $(n-5)(n-6) = 90$,

解得 $n=15$.

(2) 由 (1) 可得 $(1-2x)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{15}x^{15}$.

令 $x=1$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} = -1$.

(3) 对于 $(1-2x)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{15}x^{15}$,

令 $x=0$, 可得 $a_0=1$.

令 $x=\frac{1}{2}$, 可得 $1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{15}}{2^{15}} = 0$,

所以 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{15}}{2^{15}} = -1$.

易错辨析

解: 由二项式定理可得 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k (\sqrt{x})^{8-k} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = (-1)^k C_8^k 2^k x^{4-\frac{5k}{2}}$.

(1) 设第 $k+1$ 项系数的绝对值最大.

$$\text{则} \begin{cases} C_8^k \cdot 2^k \geq C_8^{k+1} \cdot 2^{k+1}, \\ C_8^k \cdot 2^k \geq C_8^{k-1} \cdot 2^{k-1}, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{8-k} \geq \frac{2}{k+1}, \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{9-k}, \end{cases}$$

解得 $5 \leq k \leq 6$.

故系数绝对值最大的项是第 6 项和第 7 项,

$$\text{即 } T_6 = (-1)^5 C_8^5 \cdot 2^5 \cdot x^{-\frac{17}{2}} = -1792x^{-\frac{17}{2}},$$

$$T_7 = (-1)^6 C_8^6 \cdot 2^6 \cdot x^{-11} = 1792x^{-11}.$$

(2) 二项式系数最大的项为中间项, 即为第 5 项,

$$\text{所以 } T_5 = (-1)^4 C_8^4 \cdot 2^4 \cdot x^{4-\frac{20}{2}} = 1120x^{-6}.$$

(3) 由 (1) 知, 展开式中的第 6 项和第 7 项系数的绝对值最大, 而第 6 项的系数为负数, 第 7 项的系数为正数,

则系数最大的项为 $T_7 = 1792x^{-11}$.

(4) 系数最小的项为 $T_6 = -1792x^{-\frac{17}{2}}$.

滚动卷(四) 小测试(二十三)至(二十八)

综合拔高

1. B 解析: 将所有的安排方法分成两类, 第一类: 歌舞类节目中间不穿插相声节目, 有 $A_3^3 A_2^2 A_1^1 = 6 \times 2 \times 2 = 24$ (种); 第二类: 歌舞类节目中间穿插相声节目, 有 $A_3^3 A_2^2 A_2^2 A_1^1 = 6 \times 2 \times 2 \times 4 = 96$ (种). 根据分类加法计数原理, 得共有 $96 + 24 = 120$ (种) 不同的排法.

2. A 解析: 由题意, 先分组, 可得 $\frac{C_{50}^{10} \cdot C_{10}^5}{2}$, 再一组打扫教室, 一组打扫操场, 可得不同的选派方法有 $\frac{C_{50}^{10} \cdot C_{10}^5}{2} \cdot A_2^2 = C_{50}^{10} \cdot C_{10}^5$ (种).

3. A 解析: 将 6 个字母排成一排, 可分三步进行: 第一步: 排 n, w , 共有 $A_6^2 = 30$ 种排法; 第二步: 排两个 a , 共有 $C_4^2 = 6$ 种排法; 第三步: 排两个 y , 共有 1 种排法, 所以将 6 个字母排成一排共有 $30 \times 6 \times 1 = 180$ 种排法. 可能出现的错误写法有 $180 - 1 = 179$ (种).

4. A 解析: 含 x^5 的项是由 $(x-1)(x-2)(x-3) \cdot (x-4)(x-5)(x-6)$ 的 6 个括号中的 5 个括号取 x , 1 个括号取常数, 所以展开式中含 x^5 的项的系数为 $-1-2-3-4-5-6 = -21$.

5. A 解析: 由题意可知, 第 10 行的数就是二项式 $(a+b)^{10}$ 的展开式中各项的二项式系数, 因此, 第 10 行中从左至右第 5 与第 6 个数的比值为 $\frac{C_{10}^4}{C_{10}^5} = \frac{10!}{4! \times 6!} \times \frac{5! \times 5!}{10!} = \frac{5}{6}$.

6. 28 解析: 由题可知 $(x+1)^3 + (x-2)^8 = a_0 +$

$a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_8(x-1)^8$, 令 $x-1=t$, 则 $(t+2)^3 + (t-1)^8 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_6t^6 + a_7t^7 + a_8t^8$, $(t-1)^8$ 的展开式中含有 t^6 项, $(t-1)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k t^{8-k} (-1)^k$, 令 $8-k=6$, 则 $k=2$, $T_3 = C_8^2 t^6 = 28t^6$, 故 $a_6 = 28$.

7.5 解析: 设 $f(x) = (x+a)(x-1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$, 令 $x=1$, 则 $f(1) = (1+a)(1-1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$ ①, 令 $x=-1$, 则 $f(-1) = (-1+a) \cdot (-1-1)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 32(1-a)$ ②, ①②两式相减可得 $2(a_1 + a_3 + a_5) = 32(a-1)$, 所以 $a_1 + a_3 + a_5 = 16(a-1) = 64$, 解得 $a=5$.

8.15 解析: 先给乙 1 个球, 给丙 2 个球, 则题目转化为: 有 7 个相同的小球, 现全部分给甲、乙、丙 3 人, 每人至少 1 个球, 可将 7 个球排成一行, 在排除两端的 6 个空位中选取 2 个, 插入隔板即可, 共有 $C_6^2 = 15$ (种) 情况.

9. 解: (1) 分甲、乙中有一人参加, 甲、乙都参加两类, 共有 $C_2^1 C_{18}^1 + C_2^2 C_{18}^3 = 6\,936$ (种).

(2) 方法一 (直接法): 至少有一名内科医生和一名外科医生的选法可分四类: 一内四外; 二内三外; 三内二外; 四内一外.

所以共有 $C_{12}^1 C_8^4 + C_{12}^2 C_8^3 + C_{12}^3 C_8^2 + C_{12}^4 C_8^1 = 14\,656$ (种).

方法二 (间接法): 从总数中减去五名都是内科医生和五名都是外科医生的选法种数,

得 $C_{20}^5 - C_{12}^5 - C_8^5 = 14\,656$ (种).

10. 解: (1) 若恰在第 2 次测试时, 找到第一件次品, 第 6 次测试时, 才找到最后一件次品,

则第 2 次, 第 6 次, 与第 3 至第 5 次选出 1 次, 在这三个位置进行次品全排列, 剩下的三个位置再对正品进行全排列,

所以共有 $C_3^1 \cdot A_3^3 \cdot A_3^3 = 1\,080$ (种).

(2) 检测 3 次可找出 3 件次品, 不同的测试方法有 $A_3^3 = 6$ (种);

检测 4 次可找出 3 件次品, 不同的测试方法有 $C_3^2 A_3^3 A_1^1 = 90$ (种);

检测 5 次找出 3 件次品, 分为两类: 一类是恰好第 5 次找出全部次品, 另一类是前 5 次测到都是正品, 不同的测试方法共有 $C_4^2 A_3^3 A_5^2 + A_5^5 = 840$ (种),

$\therefore$ 满足条件的不同测试方法的种数为 $6 + 90 + 840 = 936$.

素养提升

1. D 解析: 分两步完成, 第一步: 在除去甲、乙两种种子的 8 种不同的作物种子中选出 1 种放入第一号瓶子内, 有 C_8^1 种放法, 不妨设取的为丙; 第二步: 在除去丙种子的剩余 9 种不同的作物种子中选出 5 种放入二号至六号瓶子内, 有 A_9^5 种放法. 由排列组合中的分步乘法计数原理可得不同的放法共有 $C_8^1 A_9^5$ 种.

2. B 解析: 因为 $1 - 90C_{10}^1 + 90^2 C_{10}^2 - 90^3 C_{10}^3 + \cdots + (-1)^k 90^k C_{10}^k + \cdots + 90^{10} C_{10}^{10} = (1-90)^{10} = 89^{10} = (1+88)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 88 + C_{10}^2 88^2 + \cdots + C_{10}^{10} 88^{10} = 1 + C_{10}^1 88 + C_{10}^2 88^2 + \cdots + C_{10}^{10} 88^{10}$, 所以除以 88 的余数为 1. 故选 B.

3. D 解析: 分以下两种情况讨论: ① 选择 2 种颜色涂色, 则第一个和第三个格子的颜色相同, 第二个和第四个格子的颜色相同, 此时, 不同的涂色方法种数为 $C_2^2 C_2^2 = 20$; ② 选择 3 种颜色涂色, 有 C_3^3 种选择, 则第一个格子有 C_3^1 种选择, 第二个格子有 C_2^1 种选择. 当第三个格子与第一个格子颜色相同时, 第四个格子只有 1 种选择; 当第三个格子与第一个格子颜色不同时, 第三个格子只有 1 种选择, 第四个格子有 C_2^1 种选择. 综上所述, 不同的涂色方法种数为 $20 + C_3^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot (1 + C_2^1) = 200$ (种).

4. 600 解析: 当购买的 3 种水果中没有西梅时, 则从剩余 5 种水果中选择 3 种, 共有 C_5^3 种, 从四个人中选两个人买相同水果, 有 C_4^2 种, 再将 3 组人全排列, 有 A_3^3 种, 所以有 $C_5^3 C_4^2 A_3^3 = 10 \times 6 \times 6 = 360$ (种); 当购买的 3 种水果中有西梅时, 从剩余 5 种水果中选择 2 种, 有 C_5^2 种, 再从 4 人中选择 1 个人购买西梅有 C_4^1 种, 剩余三人安排购买剩下 2 种水果, 有 $C_3^2 A_2^2$ 种, 所以有 $C_5^2 C_4^1 C_3^2 A_2^2 = 10 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$ (种). 综上所述, 购买水果的可能情况共有 $360 + 240 = 600$ (种).

5. 解: (1) 由题意, 得 $2^n = 64$,

$\therefore n = 6$.

(2) 方法一: 二项式 $(1 + \sqrt{2}x)^6$ 的展开式的通项为

$T_{k+1} = C_6^k \cdot (\sqrt{2}x)^k = C_6^k 2^{\frac{k}{2}} x^k (k=0, 1, 2, \dots, 6)$,

则 $a = C_6^0 + 2C_6^2 + 4C_6^4 + 8C_6^6 = 99$,

$b = C_6^1 + 2C_6^3 + 4C_6^5 = 70$.

$$\text{则 } P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{16}{125}.$$

$$(2) \text{不放回摸球时, } P(A) = \frac{8}{10},$$

$$P(B|A) = \frac{7}{9},$$

$$P(C|AB) = \frac{2}{8},$$

$$\text{则 } P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{45}.$$

素养提升

1. B 解析:由事件 A 为“四个人去的小区不相同”,事件 B 为“甲独自去一个小区”,可得 $P(B) = \frac{C_4^1 \times 3^3}{4^4}$,

$$P(AB) = \frac{C_4^1 \times A_3^3}{4^4}, \text{ 所以 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} =$$

$$\frac{\frac{C_4^1 \times A_3^3}{4^4}}{\frac{C_4^1 \times 3^3}{4^4}} = \frac{2}{9}.$$

2. A 解析:设甲获得冠军为事件 A,比赛进行了三局为事件 B,则 $P(AB) = C_2^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{18}{64}$,

$$P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_2^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{54}{64}, \text{ 所以}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}.$$

3. ABC 解析:由题意及 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$,可知

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{2}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{10}. \text{ 对于 A,}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}} = \frac{3}{8}, \text{ 故 A 正确; 对于 B,}$$

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{15}} =$$

$$\frac{1}{4}, \text{ 故 B 正确; 对于 C, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) -$$

$$P(AB) = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}, \text{ 故 C 正确; 对于 D,}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}, \text{ 故 D 错误. 故}$$

选 ABC.

4. $\frac{21}{44}$ 解析:根据题意,记“甲击中目标”为事件 A,

“乙击中目标”为事件 B,“目标被击中”为事件 C,则 $P(C) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0.6) \times (1 - 0.7) = 0.88$. 所以在目标被击中的情况下,甲、乙同

时击中目标的概率为 $P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} =$

$$\frac{0.6 \times 0.7}{0.88} = \frac{21}{44}.$$

5. 解:(1) $P(A) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1} = \frac{3}{10}$,

$$P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{C_2^1}{C_9^1} + \frac{7}{10} \times \frac{C_3^1}{C_9^1} = \frac{3}{10},$$

$$P(AB) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{15},$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{15} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$(2) \text{方法一:} \because P(A|B) = \frac{2}{9} \neq P(A),$$

$\therefore$ 事件 A 与 B 不相互独立.

$$\text{方法二:} \because P(AB) = \frac{1}{15} \neq P(A)P(B),$$

$\therefore$ 事件 A 与 B 不相互独立

6. 解:设 A 表示“第一次取到白球”,B 表示“第二次取到白球”,则 AB 表示“第一、第二次都取到白球”, $\bar{A}B$ 表示“第一次取到黑球,第二次取到白球”,

$$\text{且 } P(B|A) = \frac{5}{9}, P(B|\bar{A}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$(1) P(A) = \frac{6}{10} = 0.6.$$

$$(2) P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}.$$

易错辨析

$\frac{4}{15}$ 解析:记“第一次取到白球”为事件 A,“第二次取到黄球”为事件 B,“第二次才取到黄球”为事件

C,所以 $P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{10} \times$

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{15}.$$

小测试(三十) 全概率公式

预习自评

1. D 2. C 3. A

基础过关

1. A 解析:电商平台在第 2 次推送时小李不购买此

商品的概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{37}{60}$, 故选 A.

2. C 解析: 现从所有作品中任取一件, 则取到获奖作品的概率为 $P = \frac{3}{5} \times 0.6 + \frac{1}{5} \times 0.2 + \frac{1}{5} \times 0.1 = 0.42$, 故选 C.

3. C 解析: 设 A_1 = “第 1 天去智能餐厅用餐”, B_1 = “第 1 天去人工餐厅用餐”, A_2 = “第 2 天去智能餐厅用餐”, 且 A_1 与 B_1 互斥. 根据题意得 $P(A_1) = P(B_1) = 0.5$, $P(A_2 | A_1) = 0.7$, $P(A_2 | B_1) = 0.8$, 由全概率公式得 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(B_1)P(A_2 | B_1) = 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.8 = 0.75$, 故选 C.

4. A 解析: 记 A_1, A_2, A_3 分别表示“取得的这盒 X 光片是由甲厂、乙厂、丙厂生产的”, B 表示“取得的 X 光片为次品”, 则 $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{3}{10}$, $P(A_3) = \frac{1}{5}$, $P(B | A_1) = \frac{1}{10}$, $P(B | A_2) = \frac{1}{15}$, $P(B | A_3) = \frac{1}{20}$. 由全概率公式可得 $P(B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + P(A_3)P(B | A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{20} = \frac{2}{25}$. 故选 A.

5. A 解析: 设 A_1, A_2, A_3 分别表示甲、乙、丙工厂的产品, B 表示次品, 则 $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = P(A_3) = 0.25$, $P(B | A_1) = 0.02$, $P(B | A_2) = 0.02$, $P(B | A_3) = 0.04$, $\therefore P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + P(A_3)P(B | A_3) = 0.5 \times 0.02 + 0.25 \times 0.02 + 0.25 \times 0.04 = 0.025$.

6. $\frac{21}{32}$ 解析: 设事件 A 表示“考生答对”, 设事件 B 表示“考生选到有思路的题”, 则小明从这 8 道题目中随机抽取 1 道做对的概率为: $P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B})P(A | \bar{B}) = \frac{5}{8} \times 0.9 + \frac{3}{8} \times 0.25 = \frac{21}{32}$.

7. 0.8 解析: 设“中途停车修理”为事件 B , “经过的是货车”为事件 A_1 , “经过的是客车”为事件 A_2 , 则 $B = A_1B + A_2B$, $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$, $P(B | A_1) = 0.02$, $P(B | A_2) = 0.01$. 由贝叶斯公式有 $P(A_1 | B) =$

$$\frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} =$$

$$\frac{\frac{2}{3} \times 0.02}{\frac{2}{3} \times 0.02 + \frac{1}{3} \times 0.01} = 0.8.$$

8. 解: (1) 从甲箱中任取 2 个“青团”的样本点数为 $C_7^2 = 21$,

这 2 个“青团”馅不同包含的样本点数为 $C_3^1 C_4^1 = 12$,

所以这 2 个“青团”馅不同的概率 $P = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

(2) 设事件 A 为“从乙箱中任取 1 个‘青团’, 取出的这个‘青团’是肉松馅”,

事件 B_1 为“从甲箱中取出的 2 个‘青团’都是蛋黄馅”,

事件 B_2 为“从甲箱中取出的 2 个‘青团’都是肉松馅”,

事件 B_3 为“从甲箱中取出的 2 个‘青团’为 1 个蛋黄馅 1 个肉松馅”,

则 B_1, B_2, B_3 彼此互斥.

$$P(B_1) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7},$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7},$$

$$P(B_3) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7},$$

$$P(A | B_1) = \frac{2}{7}, P(A | B_2) = \frac{4}{7}, P(A | B_3) = \frac{3}{7},$$

所以 $P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) +$

$$P(B_3)P(A | B_3) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times$$

$$\frac{3}{7} = \frac{20}{49},$$

所以取出的这个“青团”是肉松馅的概率为 $\frac{20}{49}$.

素养提升

1. B 解析: 记事件 A 为“第 1 球投进”, 事件 B 为“第 2 球投进”, $P(B | A) = \frac{3}{4}$, $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$, $P(A) =$

$\frac{3}{4}$. 由全概率公式可得 $P(B) = P(A)P(B | A) +$

$$P(\bar{A})P(B | \bar{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

2. A 解析: 用 A 表示事件“考生答对了”, 用 B 表示“考生知道正确答案”, 用 $\bar{B}$ 表示“考生不知道正确答案”, 则 $P(B) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A | B) = 100\%$, $P(A | \bar{B}) = 0.25$, 则 $P(A) = P(B)P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B}) = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0.25 = 0.625$.

3. ABC 解析: $P(D_1) = 0.02, P(D_2) = 0.05, P(D_3) = 0.005, P(S|D_1) = 0.4, P(S|D_2) = 0.18, P(S|D_3) = 0.6$, 由全概率公式得 $P(S) = \sum_{i=1}^3 P(D_i) \cdot P(S|D_i) = 0.02 \times 0.4 + 0.05 \times 0.18 + 0.005 \times 0.6 = 0.02$, 故 A 正确; 由贝叶斯公式得 $P(D_1|S) = \frac{P(D_1)P(S|D_1)}{P(S)} = \frac{0.02 \times 0.4}{0.02} = 0.4, P(D_2|S) = \frac{P(D_2)P(S|D_2)}{P(S)} = \frac{0.05 \times 0.18}{0.02} = 0.45, P(D_3|S) = \frac{P(D_3)P(S|D_3)}{P(S)} = \frac{0.005 \times 0.6}{0.02} = 0.15$, 故 B, C 正确, D 错误. 故选 ABC.

4. $\frac{1}{12}$ 解析: 因为 $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.9$, 所以 $P(A|\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{C}) = 1 - 0.9 = 0.1$. 因为 $P(C) = 0.01$, 所以 $P(\bar{C}) = 0.99$. 所以由全概率公式可得 $P(A) = P(A|C) \cdot P(C) + P(A|\bar{C}) \cdot P(\bar{C})$. 因为 $P(AC) = P(C|A)P(A) = P(A|C)P(C)$, 所以 $P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})} = \frac{0.9 \times 0.01}{0.9 \times 0.01 + 0.1 \times 0.99} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12}$.

5. 解: 设 A_i 表示“第 i 台机床加工的零件”($i=1, 2$), B 表示“出现废品”, C 表示“出现合格品”.
(1) $P(C) = P(A_1C \cup A_2C) = P(A_1C) + P(A_2C) = P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) = \frac{2}{3} \times (1 - 0.03) + \frac{1}{3} \times (1 - 0.02) \approx 0.973$.

$$(2) P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0.02}{\frac{2}{3} \times 0.03 + \frac{1}{3} \times 0.02} = 0.25.$$

6. 解: (1) 由已知可得 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$,
 $P(B|A_1) = \frac{1}{4}$,
 $P(B|A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
 $P(B|A_3) = 1$,
 $\therefore P(BA_1) = P(A_1)P(B|A_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$,

$$P(BA_2) = P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$P(BA_3) = P(A_3)P(B|A_3) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$(2) P(A_1|B) = \frac{P(BA_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7},$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(BA_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7},$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(BA_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}.$$

易知 $P(A_3|B)$ 最大, 即若小明取出的球是黑球, 该黑球来自 3 号箱的概率最大.

易错辨析

B 解析: 用 A 表示“丢失 1 箱后任取 2 箱是英语书”, 用 B_k 表示“丢失的 1 箱为 $k, k=1, 2, 3$ 分别表示英语书、数学书、语文书”. 由全概率公式得

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k)P(A|B_k) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{1}{5} \times \frac{C_5^2}{C_9^2} + \frac{3}{10} \times \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{2}{9}. P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{C_4^2}{C_9^2}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{8}. \text{ 故选 B.}$$

小测试(三十一) 离散型随机变量及其分布

预习自评

1. A 2. D 3. ABD

基础过关

1. B 解析: 因为取到白球时停止, 所以最少取球次数为 1, 即第一次就取到了白球; 最多次数是 7, 即把所有的红球取完之后, 再取到白球. 所以取球次数可以是 $1, 2, 3, \dots, 7$.
2. D 解析: 因为甲、乙两人下象棋, 赢了得 3 分, 平局得 1 分, 输了得 0 分, 故 $\xi=3$ 有两种情况: 即甲赢一局输两局或甲、乙平局三次.
3. D 解析: 按球的编号将球分为三组, 8 个球中有 4

个球编号小于3,2个球编号等于3,2个球编号大于3.现从袋中任取3个球共有 C_8^3 种方法, $X=3$ 表示:3个球中最大编号为3,分两类情况:第一类1个球编号为3,另2个球编号小于3,得 $P_1 = \frac{C_1^3 \cdot C_4^2}{C_8^3} = \frac{3}{14}$;第二类2个球编号为3,另1个球编号小于3,得 $P_2 = \frac{C_2^3 \cdot C_4^1}{C_8^3} = \frac{1}{14}$,由互斥事件和事件概率加法公式得 $P(X=3) = P_1 + P_2 = \frac{3}{14} + \frac{1}{14} = \frac{2}{7}$.

4. C 解析:依题意得 $a+2a+3a=1$,解得 $a=\frac{1}{6}$,所以 $P(X=2)=2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

5. AC 解析:由概率分布列可得 $P(X=1.5)=0$,故A正确; $P(X>-1)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$,故B错误; $P(2<X<4)=P(X=3)=\frac{2}{5}$,故C正确; $P(X<0)=P(X=-1)=\frac{1}{10}$,故D错误.

6. -300 -100 100 300 解析:若答对0个问题,则得分为-300;若答对1个问题,则得分为-100;若答对2个问题,则得分为100;若问题全答对,则得分为300.

7. 0.15 解析: $\because$ 某篮球运动员罚球一次的得分 X 服从参数为0.85的两点分布, $\therefore P(X=0)=1-0.85=0.15$.

8. 解:由题意得 X 可能的取值为3,4,5,6,且

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}, P(X=4)=\frac{C_4^1 \cdot C_5^2}{C_9^3}=\frac{10}{21},$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2 \cdot C_5^1}{C_9^3}=\frac{5}{14}, P(X=6)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{1}{21}.$$

所以 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

素养提升

1. B 解析:由离散型随机变量分布列的性质以及已知条件得

$$\begin{cases} m+n+0.2=1, \\ m+2n=1.2, \end{cases} \text{解得 } m=n=0.4, \text{ 因此,}$$

$$m-\frac{n}{2}=0.2.$$

2. A 解析:由 $0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$,得 $m=0.3$.则 $P(Y=2)=P(X=4)=0.3$.

3. B 解析:由随机变量 X 的分布列知, X^2 的可能取值为0,1,4,9, $P(X^2=0)=P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X^2=1)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$, $P(X^2=4)=P(X=-2)+P(X=2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$, $P(X^2=9)=P(X=3)=\frac{1}{12}$,因为 $P(X^2<x)=\frac{11}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$,所以实数 x 的取值范围是 $4<x\leq 9$.

4. $\frac{5}{12}$ 解析:由所有概率之和为1,可得 $m=\frac{1}{4}$,所以 $P(|X-2|=1)=P(X=1)+P(X=3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.

5. 解:(1)从12人中任抽取2人的方法总数为 $C_{12}^2=\frac{12 \times 11}{2}=66$,

由题设知,甲、乙、丙、丁四个读书小组中抽取的人数分别为4人、3人、2人、3人,

则2人来自同一个读书小组的方法数为 $C_4^2+C_3^2+C_2^2+C_3^2=13$,

所以所求概率为 $P=\frac{13}{66}$.

(2)随机变量 X 的取值依次为0,1,2,

$$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}, P(X=1)=\frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

6. 解:(1)设“第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A)=\frac{A_2^1 A_3^1}{A_5^2}=\frac{3}{10}.$$

(2) X 的可能取值为200,300,400,

$$\text{则 } P(X=200)=\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{1}{10},$$

$$P(X=300) = \frac{A_3^3 + C_2^1 C_3^1 A_2^2}{A_3^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=400) = 1 - P(X=200) - P(X=300) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}.$$

故 X 的分布列为

X	200	300	400
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

易错辨析

1. ② 解析: ①③④中的随机变量 X 的所有取值, 我们都可以按照一定的次序一一列出, 因此它们是离散型随机变量; ②中随机变量 X 可以取某一区间内的一切值, 无法按一定次序一一列出, 故不是离散型随机变量.

2. A 解析: $\because$ 从盒子中任取 3 个球来用, 用完后装回盒中, 此时盒中旧球个数 $X=4$, 即旧球的个数增加了 2 个, $\therefore$ 取出的 3 个球中必有 2 个新球, 即取出的 3 个球必为 1 个旧球, 2 个新球, $\therefore P(X=4) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$, 故选 A.

小测试(三十二) 离散型随机变量的数字特征

预习自评

1. BC 2. D 3. D

基础过关

1. C 解析: $E(Y) = 4E(X) + 7 = 15$, 则 $E(X) = 2$.

2. C 解析: 由已知, 得 $E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2$, 所以 $D(X) = 0.1 \times (0-2)^2 + 0.2 \times (1-2)^2 + 0.4 \times (2-2)^2 + 0.2 \times (3-2)^2 + 0.1 \times (4-2)^2 = 1.2$.

3. B 解析: 设 $P(X=1) = p$, $P(X=2) = q$, 则 $E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + p + 2q = 1$ ①, 又 $\frac{1}{5} + p + q = 1$ ②, 由 ①② 得 $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{1}{5}$, 所以 $P(X=1) = \frac{3}{5}$.

4. AB 解析: 随机变量 X 服从两点分布, 其中 $P(X=0) = \frac{1}{3}$, $\therefore P(X=1) = \frac{2}{3}$, $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $D(X) = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. 在 A 中, $P(X=1) = E(X)$, 故 A 正确; 在

B 中, $E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \times \frac{2}{3} + 2 = 4$, 故 B

正确; 在 C 中, $D(3X+2) = 9D(X) = 9 \times \frac{2}{9} = 2$, 故

C 错误; 在 D 中, $D(X) = \frac{2}{9}$, 故 D 错误.

5. D 解析: 由分布列得 $E(X) = \frac{1+a}{3}$, 则 $D(X) = \left(\frac{1+a}{3} - 0\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1+a}{3} - a\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1+a}{3} - 1\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$, $\therefore$ 当 a 在 $(0, 1)$ 内增大时, $D(X)$ 先减小后增大.

6. $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ 解析: 由题可知 $m+n = \frac{2}{3}$, 则 $n = \frac{2}{3} - m$, $E(X) = \frac{1}{3} + 2m + 3n = \frac{1}{3} + 2m + 3\left(\frac{2}{3} - m\right) = -m + \frac{7}{3}$. 由 $m+n = \frac{2}{3}$, $mn > 0$, 得 $n = \frac{2}{3} - m > 0$, 则 m 的取值范围是 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, 所以 $E(X)$ 的取值范围是 $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

7. $\frac{1}{2} \quad \frac{9}{2}$ 解析: 由 $E(\xi) = a + 2b = 1$, $\frac{1}{4} + a + b = 1$, 可得 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, 所以 $D(\xi) = (0-1)^2 \times \frac{1}{4} + (1-1)^2 \times \frac{1}{2} + (2-1)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 所以 $D(\eta) = D(3\xi-1) = 9D(\xi) = \frac{9}{2}$.

8. 解: (1) 这 3 名学生中至少有 2 名学生参加培训次数相同的概率 $P = 1 - \frac{C_5^1 C_{15}^1 C_{20}^1}{C_{40}^3} = \frac{419}{494}$.

(2) 由题意知 $X=0, 1, 2$,

$$P(X=0) = \frac{C_5^2 + C_{15}^2 + C_{20}^2}{C_{40}^2} = \frac{61}{156},$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_{15}^1 + C_{15}^1 C_{20}^1}{C_{40}^2} = \frac{25}{52},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^1 C_{20}^1}{C_{40}^2} = \frac{5}{39},$$

则随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{61}{156}$	$\frac{25}{52}$	$\frac{5}{39}$

所以 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{61}{156} + 1 \times \frac{25}{52} + 2 \times$

$$\frac{5}{39} = \frac{115}{156}.$$

素养提升

1. A 解析:由分布列的性质,知 $\frac{a}{2} + \frac{1}{3} + \frac{a}{6} = \frac{2a+1}{3} = 1$, 得 $a=1$, $\therefore E(\xi) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$, $D(\xi) = \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{9}$.

2. D 解析:随机变量 ξ 满足 $E(1-\xi)=4$, $D(1-\xi)=4$, 则 $1-E(\xi)=4$, $(-1)^2 D(\xi)=4$, 据此可得 $E(\xi)=-3$, $D(\xi)=4$.

3. ABC 解析: $\because P(X=k) = \frac{a}{k+1} (k=1, 2, 5), a \in \mathbf{R}$, $\therefore P(X=1) = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$, $P(X=2) = \frac{a}{2+1} = \frac{a}{3}$, $P(X=5) = \frac{a}{5+1} = \frac{a}{6}$, 且 $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{6} = 1$, 解得 $a=1$. 对于选项 A, $P(0 < X < 3.5) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, 故 A 选项正确; 对于选项 B, $\because E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6} = 2$, $\therefore E(3X+1) = 3E(X) + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$, 故 B 选项正确; 对于选项 C, $D(X) = \frac{1}{2} \times (1-2)^2 + \frac{1}{3} \times (2-2)^2 + \frac{1}{6} \times (5-2)^2 = 2$, 故 C 选项正确; 对于选项 D, $D(3X+1) = 3^2 D(X) = 9 \times 2 = 18$, 故 D 选项错误. 故选 ABC.

4. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 解析:根据题意, 学生发球次数为 1, 即一次发球成功的概率为 $P(X=1)=p$, 发球次数为 2, 即第一次发球失败第二次发球成功的概率为 $P(X=2)=p(1-p)$, 发球次数为 3 的概率为 $P(X=3)=(1-p)^2$, 则 X 的数学期望 $E(X) = p + 2p(1-p) + 3(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3$. 依题意有 $E(X) > 1.75$, 即 $p^2 - 3p + 3 > 1.75$, 解得 $p > \frac{5}{2}$ 或 $p < \frac{1}{2}$. 由 $0 < p < 1$, 可得 $0 < p < \frac{1}{2}$.

5. 解:由分布列的性质知 $a+0.8+0.1=1$, 解得 $a=0.1$, $0.1+0.2+0.4+b+0.1=1$, 解得 $b=0.2$, 则 $E(X) = (-1) \times 0.1 + 0 \times 0.8 + 1 \times 0.1 = 0$,

$$E(Y) = (-2) \times 0.1 + (-1) \times 0.2 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 = 0,$$

故 $E(X) = E(Y)$,

即甲、乙两种品牌手表的日走时误差均值相同.

$$D(X) = (-1)^2 \times 0.1 + 0^2 \times 0.8 + 1^2 \times 0.1 = 0.2,$$

$$D(Y) = (-2)^2 \times 0.1 + (-1)^2 \times 0.2 + 0^2 \times 0.4 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.1 = 1.2,$$

则 $D(X) < D(Y)$,

即甲的方差较小, 走时更稳定,

所以甲、乙两种品牌手表走时误差均值相同, 甲的方差较小, 性能更稳定.

6. 解:(1)设“该同学摸球三次后停止摸球”为事件 A,

$$\text{则 } P(A) = \frac{A_3^2}{A_4^3} = \frac{1}{4},$$

故该同学摸球三次后停止摸球的概率为 $\frac{1}{4}$.

(2)随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = \frac{1}{4}; P(X=1) = \frac{2}{A_4^2} = \frac{1}{6};$$

$$P(X=2) = \frac{1}{A_4^1} + \frac{A_2^2}{A_4^3} = \frac{1}{6}; P(X=3) = \frac{C_2^1 A_2^2}{A_4^3} = \frac{1}{6};$$

$$P(X=4) = \frac{A_3^3}{A_4^4} = \frac{1}{4}.$$

所以随机变量 X 的分布列如下:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{则 } E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{4} = 2.$$

易错辨析

A 解析:因为 $E(2\xi+1)=5$, $D(2\xi+3)=9$, 所以 $2E(\xi)+1=5$, $4D(\xi)=9$, 即 $E(\xi)=2$, $D(\xi)=\frac{9}{4}$. 故选 A.

小测试(三十三) 二项分布

预习自评

1. A 2. B 3. A

基础过关

1. A 解析:由题意可知中靶的概率为 0.8, 故打 100 发子弹有 4 发中靶的概率为 $C_{100}^4 \times 0.8^4 \times 0.2^{96}$.

2. A 解析:根据 n 重伯努利试验发生 k 次的概率公

式,得 $C_4^1 p \cdot (1-p)^3 \leq C_4^2 p^2 (1-p)^2$, 结合 $0 < p < 1$, 解得 $0.4 \leq p < 1$, 故选 A.

3. C 解析: 由题意得每次抛掷正方体落地后出现向上数字大于 4 的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 设 X 表示抛掷 n 次, 落地后向上数字大于 4 的次数, 则 $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, 由题意得 $E(X) \geq 3$, 即 $\frac{1}{3}n \geq 3$, 即 $n \geq 9$.

4. C 解析: 由随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, $E(X) = 2, D(X) = \frac{4}{3}$, 可得 $\begin{cases} np = 2, \\ np(1-p) = \frac{4}{3}, \end{cases}$ 解得 $p = \frac{1}{3}$. 故选 C.

5. D 解析: 遇到红灯的次数 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$, $\therefore E(X) = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. $\therefore E(Y) = E(2X) = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

6. 0.98 解析: 根据题意, 可得这批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 50 次, 则 $X \sim B(50, 0.02)$, 所以 $D(X) = np(1-p) = 50 \times 0.02 \times (1-0.02) = 0.98$.

7. $\frac{40}{81}$ 解析: $P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{7}{2}\right) = P(X=2) + P(X=3) = C_5^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{81}$.

8. 解: (1) 通过两个项目测试的概率为 $C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$,

通过三个项目测试的概率为 $C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

则甲被录用的概率为 $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

(2) 因为甲、乙、丙三人通过每个项目测试的概率都是 $\frac{1}{2}$, 由 (1) 可知甲、乙、丙三人每个人被录用的概率都是 $\frac{1}{2}$,

所以 $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

所以 $P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$,

$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$,

$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

素养提升

1. C 解析: 运动员每次罚球命中的概率为 0.4, 不命中的概率为 $1-0.4=0.6$. 命中两次停止时, 罚球次数恰为 4, 说明第 4 次命中, 前 3 次命中 1 次, 故所求概率为 $C_3^1 0.4 \times (0.6)^2 \times 0.4 = \frac{108}{625}$.

2. A 解析: 该地在该季节连续三天内, 至少有一天出现大潮包括两天或三天出现大潮, 有两天出现大潮的概率为 $C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, 有三天出现大潮的概率为 $C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, 所以至少有一天出现大潮的概率为 $\frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$, 故选 A.

3. ABD 解析: 对于 A, 比赛共进行了 3 场, 甲全部获胜的概率为 $P_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$, 故 A 正确; 对于 B, 比赛共进行了 5 场, 前 4 场是甲 2 胜 2 负, 第 5 场甲胜, 概率为 $P_2 = C_4^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{648}{3125}$, 故 B 正确; 对于 C, 比赛可能是甲胜出或乙胜出, 由选项 A 可知概率必定大于 $\frac{27}{125}$, 故 C 错误; 对于 D,

由上述分析可得甲获胜的概率为 $\frac{27}{125} + C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{648}{3125} = \frac{27}{125} + \frac{162}{625} + \frac{648}{3125} = \frac{2133}{3125}$, 故 D 正确.

4. 4 解析: 因为比赛采用 5 局 3 胜制时甲用 4 局赢得比赛的概率为 $\frac{8}{27}$, 每局比赛甲胜的概率为 p , 所以 $C_3^2 p^2 (1-p) \cdot p = \frac{8}{27}$, 解得 $p = \frac{2}{3}$, 所以每局比赛甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 由题意, 可知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(6, \frac{2}{3}\right)$, 所以 $E(X) = np = 6 \times \frac{2}{3} = 4$, 故甲胜的局数 X 的数学期望为 4.

5. 解: (1) 至少 3 人同时上网包括 3 人、4 人、5 人或 6 人同时上网,

记“至少 3 人同时上网”为事件 A,

$$\text{则 } P(A) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{21}{32}.$$

(2) 由(1)知至少 3 人同时上网的概率大于 0.3,

记“至少 4 人同时上网”为事件 B,

$$\text{其概率为 } P(B) = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{11}{32} > 0.3,$$

记“至少 5 人同时上网”为事件 C,

$$\text{其概率为 } P(C) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{7}{64} < 0.3.$$

所以至少 5 人同时上网的概率小于 0.3.

6. 解: (1) 质点运动 6 次回到原点, 则必定向右移动 3 次, 向左移动 3 次, 则可看作质点做 6 次运动,

设 X 表示向右移动的次數,

$$\text{则 } X \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right),$$

则质点回到原点的概率为

$$P(X=3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

(2) 设 X 表示质点在 6 次运动中向右移动的次數,

则向左移动 (6-X) 次,

则质点位置与原点的距离不大于 2 的概率为

$$P(X=3) + P(X=2) + P(X=4) = C_6^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_6^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_6^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{32}.$$

易错辨析

1. B 解析: ①满足 n 重伯努利试验的条件, 是二项分布; ②X 的取值是 1, 2, 3, ..., n, $P(X=k) = 0.9 \times 0.1^{k-1}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), 显然不符合二项分布的定义, 因此 X 不服从二项分布; ③虽然是有放回地摸球, 但随机变量 X 的定义是直到摸出白球为止, 也就是说前面摸出的一定是红球, 最后一次是白球, 不符合二项分布的定义; ④n 次试验是不独立的, 因此 X 不服从二项分布. 故选 B.

2. 0.896 解析: “至少有 2 天”包括“恰有 2 天”和“恰有 3 天”两种情况, 其概率为 $C_3^2 \times 0.8^2 \times 0.2 + C_3^3 \times 0.8^3 = 0.896$. 所以至少有 2 天预报准确的概率为 0.896.

小测试(三十四) 超几何分布

预习自评

1. B 2. A 3. D

基础过关

1. CD 解析: 由超几何分布的概念知 CD 符合.

2. D 解析: 方法一: 设取出的白球个数为离散型随机变量 X, 则 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 则 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} + \frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4} + \frac{C_4^4 C_6^0}{C_{10}^4} = \frac{90+24+1}{210} = \frac{115}{210} = \frac{23}{42}$. 故至少有 2 个白球的概率为 $\frac{23}{42}$. 方法二: 设 A = “至少有 2 个白球”, 则 $\bar{A}$ = “至多有 1 个白球”, 所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_4^0 C_6^4}{C_{10}^4} - \frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4} = 1 - \frac{15}{210} - \frac{80}{210} = \frac{115}{210} = \frac{23}{42}$.

3. A 解析: 由题意, 可知随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 则 $P(X=0) = \frac{C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$, $P(X=1) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56}$, $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$, $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$. 故随机变量 X 的数学期望为 $E(X) = 0 \times \frac{10}{56} + 1 \times \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}$.

4. B 解析: 由题意可知, $P(X=1) = \frac{C_{12}^1 C_4^1}{C_{26}^2}$, $P(X=0) = \frac{C_{22}^2}{C_{26}^2}$, $\therefore \frac{C_{22}^1 C_4^1 + C_{22}^2}{C_{26}^2}$ 表示取出的 2 个球中有 1 个白球或者一个白球都没有, 即 $P(X \leq 1)$.

5. ACD 解析: 由题意知随机变量 X 服从超几何分布, 故 B 错误, C 正确; 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, $P(X=0) = \frac{C_4^0}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}$, $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$, $P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$, $P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{4}{35}$, $P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$, 故 $E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{8}{21} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{210} = \frac{8}{5}$, 故 A,

D 正确.

6.1 解析:由题意,可得 ξ 服从超几何分布, ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2. $P(\xi=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$, $P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$, $P(\xi=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$. 所以随机变量 ξ 的期望为 $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1$.

7. $\frac{243}{245}$ 解析:一批产品共 50 箱,从中随机抽取 5 箱,用 X 表示“5 箱中不合格产品的箱数”,则 X 服从超几何分布,其中 $N=50, M=2, n=5, \therefore$ 该批产品被接收的概率为 $P(X \leq 1) = \frac{C_2^0 C_{48}^5}{C_{50}^5} + \frac{C_2^1 C_{48}^4}{C_{50}^5} = \frac{243}{245}$.

8. 解:(1)记“从袋中随机摸出 2 个球,至少摸到 1 个白球”为事件 A ,

设袋中白球的个数为 x ,

$$\text{则 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{10-x}^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9},$$

解得 $x=5$ ($x=14$ 不符合题意,舍去),

所以白球的个数为 5.

(2)由题知, X 服从超几何分布,其中 $N=10, M=5, n=3$,

$$\text{则 } P(X=k) = \frac{C_5^k C_5^{3-k}}{C_{10}^3}, k=0, 1, 2, 3.$$

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_5^0 C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12},$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5}{12},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{12},$$

因此随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

素养提升

1. C 解析:随机变量 ξ 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$P(\xi=1) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}, P(\xi=2) = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}, P(\xi=3) =$$

$$\frac{C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \text{故随机变量 } \xi \text{ 的分布列为}$$

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

2. D 解析:方法一:由题意得,随机变量 X 服从超几何分布, $N=10, M=4, n=2$, 则 $E(X) = \frac{nM}{N} = \frac{2 \times 4}{10} = \frac{4}{5}$.

方法二: X 的可能取值为 0, 1, 2, 则 $P(X=0) = \frac{C_6^2 C_4^0}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$,

$P(X=2) = \frac{C_6^0 C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$. 所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}. \text{ 故选 D.}$$

3. ACD 解析:由题意知 X, Y 均服从超几何分布, 且

$$X+Y=4, Z=2X+Y, P(X=k) = \frac{C_4^k C_6^{4-k}}{C_{10}^4} (k=0, 1,$$

$$2, 3, 4). \text{ 从而 } P(|Z-6| \leq 1) = P(5 \leq Z \leq 7) = 1 -$$

$$P(Z=4) - P(Z=8) = 1 - P(X=0) - P(X=4) =$$

$$1 - \frac{C_4^0 C_6^4}{C_{10}^4} - \frac{C_4^4 C_6^0}{C_{10}^4} = \frac{97}{105}, \text{ 故选项 A 正确; } E(X) = 4 \times$$

$$\frac{4}{10} = \frac{8}{5}, E(Y) = 4 - E(X) = \frac{12}{5}, D(X) = D(4 -$$

$$Y) = D(Y), \text{ 故选项 B 错误, C 正确; } E(Z) =$$

$$2E(X) + E(Y) = \frac{28}{5}, \text{ 故选项 D 正确. 故选 ACD.}$$

4. 3 解析:设口袋中有白球 $x(x \geq 2)$ 个,由已知可得

取得白球个数 X 的可能取值为 0, 1, 2, 则 X 服从超

几何分布, $P(X=k) = \frac{C_x^k C_{7-k}^{2-k}}{C_7^2} (k=0, 1, 2),$

$$\therefore P(X=0) = \frac{C_x^0 C_{7-x}^2}{C_7^2}, P(X=1) = \frac{C_x^1 C_{7-x}^1}{C_7^2}, P(X=$$

$$2) = \frac{C_x^2}{C_7^2}, \therefore E(X) = \frac{C_x^1 C_{7-x}^1}{C_7^2} + \frac{2C_x^2}{C_7^2} = \frac{6}{7}, \therefore x(7 -$$

$$x) + x(x-1) = 18, \text{ 解得 } x=3.$$

5. 解:(1)随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 X 服从超几何分布.

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^1 C_3^2}{C_9^3} = \frac{3}{14},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{84} + 1 \times \frac{3}{14} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{21} = 2.$$

(2)若甲没有通过预选赛,

则甲答对了 1 道或 0 道题.

所以甲没有通过预选赛的概率为 $P = P(X=0) +$

$$P(X=1) = \frac{1}{84} + \frac{3}{14} = \frac{19}{84}.$$

易错辨析

解:(1)由题意知,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,且 X 服从超几何分布,

参数 $N=10, M=3, n=3$,

$$\text{因此 } P(X=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3}, k=0,1,2,3,$$

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_3^0 C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{40},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

(2)由题意知,随机变量 Y 的所有可能取值为 0,1,

$$2,3, \text{ 且 } Y \sim B\left(3, \frac{3}{10}\right),$$

$$\text{所以 } P(Y=0) = C_3^0 \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000},$$

$$P(Y=1) = C_3^1 \times \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000},$$

$$P(Y=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{189}{1000},$$

$$P(Y=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^0 = \frac{27}{1000},$$

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

小测试(三十五) 正态分布

预习自评

1. B 2. D 3. A

基础过关

1. C 解析:因为随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 所以 $P(X \leq 2) = 0.5$, 而 $P(X < 4) = 0.8$, 所以 $P(2 < X < 4) = P(X < 4) - P(X \leq 2) = 0.3$, 所以 $P(2 < X < 4) = 0.3$.

2. C 解析:因为每年 6 月份的平均气温 t 近似服从 $N(28, \sigma^2)$, 所以 $\mu = 28$, 因为 $P(28 \leq t \leq 30) = 0.3$, 所以 $P(26 \leq t \leq 28) = 0.3$, 所以 $P(t < 26) = 0.5 - 0.3 = 0.2$, 所以该城市 6 月份平均气温低于 26°C 的天数为 $0.2 \times 30 = 6$.

3. AC 解析:因为 $P(X \geq 0) + P(X \geq -2) = 1$, 所以 $P(X \geq 0) = P(X \leq -2)$, 所以 $\mu = -1$. 故 $P(-2 \leq X \leq 0) = 1 - 0.3 \times 2 = 0.4$.

4. ACD 解析: $\because \Phi(-a) = P(X \leq -a)$, $\therefore$ 图中阴影部分的面积为 $\frac{1}{2} - P(X \leq -a) = \frac{1}{2} - \Phi(-a)$. 再根据正态曲线的对称性可知图中阴影部分的面积为 $P(X \leq a) - \frac{1}{2} = \Phi(a) - \frac{1}{2}$. 又 $P(-a \leq X \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a)$, 则阴影部分的面积为 $\frac{1}{2} [\Phi(a) - \Phi(-a)]$. 故选 ACD.

5. C 解析:因为测试成绩服从正态分布 $N(70, \sigma^2)$, 所以 $P(70 \leq X \leq 80) = P(60 \leq X \leq 70) = 0.2$, 则 $P(X > 80) = 0.5 - 0.2 = 0.3$, 即该学校高三年级学生体能测试成绩在 80 分以上的人数约为 $0.3 \times 800 = 240$. 故选 C.

6. 64 5 解析:由 $p(x)_{\max} = p(95) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}$ 可知, $\mu = 95, \sigma = 8$, 故方差 $\sigma^2 = 64$. 由正态密度曲线的对称性知 $P(x > 95) = \frac{1}{2}$, 故 $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$, 所以 X 的数学期望 $E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.

7. 15 解析:因为数学成绩 ξ 服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$, $P(80 < \xi \leq 100) = 0.35$, 所以 $P(80 < \xi < 120) = 2 \times 0.35 = 0.70$, 所以 $P(\xi \geq 120) = \frac{1}{2} \times (1 - 0.70) = 0.15$. 所以应从 120 分及以上的试卷中抽取 $100 \times 0.15 = 15$ (份).

8. 解: 设该地建筑工人年均收入 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,

结合图象可知 $\mu = 8\ 000, \sigma = 500$.

(1) 此地建筑工人年均收入的正态密度函数的表达式为

$$f(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{500\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-8\ 000)^2}{500\ 000}},$$

$\xi \in (-\infty, +\infty)$.

(2) 因为 $P(7\ 500 \leq \xi \leq 8\ 500) = P(8\ 000 - 500 \leq \xi \leq 8\ 000 + 500) \approx 0.682\ 7$,

所以 $P(8\ 000 \leq \xi \leq 8\ 500) = \frac{1}{2} \times P(7\ 500 \leq \xi \leq 8\ 500) \approx 0.341\ 35$,

即此地建筑工人年均收入(单位:元)在区间 $[8\ 000, 8\ 500]$ 的人数约占总体的 34.135% .

素养提升

1. D 解析: 由 $E(X) = 4p = 3$ 可得 $p = \frac{3}{4}$, 则 $P(Y > 0) = \frac{3}{4}$, 则 $P(0 < Y < 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 则 $P(0 < Y < 2) = 2P(0 < Y < 1) = \frac{1}{2}$. 故选 D.

2. C 解析: 由正态分布知, 每个人数学成绩在 $[70, 110]$ 的概率为 $2 \times (0.5 - 0.2) = 0.6$, 所以随机抽取的 10 名学生中数学成绩在 $[70, 110]$ 的人数服从二项分布 $B(10, 0.6)$, 所求方差为 $10 \times 0.6 \times (1 - 0.6) = 2.4$. 故选 C.

3. BCD 解析: 对于 A 选项, $E(X) = 0.2, D(X) = 0.3^2 = 0.09$, 故 A 错误; 对于 B 选项, $P(X \geq 0.2) = 0.5$, 故 B 正确; 对于 C 选项, 因为 $P(0.2 - 0.3 \leq X \leq 0.2 + 0.3) = P(-0.1 \leq X \leq 0.5) \approx 0.682\ 7$, 则 $P(X \geq 0.5) \approx \frac{1 - 0.682\ 7}{2} = 0.158\ 65$, 故 C 正确; 对于 D 选项, 因为 $P(0.2 - 0.3 \times 2 \leq X \leq 0.2 + 0.3 \times 2) = P(-0.4 \leq X \leq 0.8) \approx 0.954\ 5$, 所以 $P(X \leq -0.4) \approx \frac{1 - 0.954\ 5}{2} = 0.022\ 75$, 故 D 正确. 故选 BCD.

4. $6 + 4\sqrt{2}$ 解析: $\because$ 随机变量 X 服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, $\therefore P(X \geq 10) = \frac{1}{2}$. 由 $P(8 \leq X \leq 10) = n$, 得 $P(10 \leq X \leq 12) = n$. 又 $P(X > 12) = m$, $\therefore m + n = \frac{1}{2}$, 且 $m > 0, n > 0$. 则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}\right)(2m + 2n) = 6 + \frac{4n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 6 + 2\sqrt{\frac{4n}{m} \cdot \frac{2m}{n}} = 6 + 4\sqrt{2}$, 当

且仅当 $\frac{4n}{m} = \frac{2m}{n}$, 即 $m = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, n = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ 时, 等号

成立. $\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 $6 + 4\sqrt{2}$.

5. 解: (1) 根据题图得 $\mu = (47.5 + 72.5) \times 0.004 \times 5 + (52.5 + 67.5) \times 0.026 \times 5 + (57.5 + 62.5) \times 0.07 \times 5 = 60$.

$$\sigma^2 = [(47.5 - 60)^2 + (72.5 - 60)^2] \times 0.004 \times 5 + [(52.5 - 60)^2 + (67.5 - 60)^2] \times 0.026 \times 5 + [(57.5 - 60)^2 + (62.5 - 60)^2] \times 0.07 \times 5 \approx 25.$$

(2) 由题图可得从全校学生中随机抽取 1 名学生, 其体重在 $[55, 65]$ 的概率为 0.7.

随机抽取 3 人, 相当于 3 重伯努利试验,

则随机变量 X 服从二项分布 $B(3, 0.7)$,

$$P(X=0) = C_3^0 \times 0.7^0 \times 0.3^3 = 0.027,$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times 0.7 \times 0.3^2 = 0.189,$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3 = 0.441,$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times 0.7^3 \times 0.3^0 = 0.343,$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

$$E(X) = 3 \times 0.7 = 2.1.$$

(3) 正常 理由如下:

由(1)知 Y 近似服从正态分布 $N(60, 25)$,

$$\text{则 } P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = P(50 \leq Y \leq 70) = 0.96 > 0.954\ 5,$$

所以该校学生的体重是正常的.

易错辨析

解: 因为 $P(X \leq 1) \approx 0.841\ 4$,

$$\text{所以 } P(X > 1) \approx 1 - 0.841\ 4 = 0.158\ 6,$$

$$\text{所以 } P(X \leq -1) \approx 0.158\ 6,$$

$$\text{所以 } P(-1 < X \leq 0) \approx 0.5 - 0.158\ 6 = 0.341\ 4.$$

滚动卷(五) 小测试(二十九)至(三十五)

综合拔高

1. A 解析: $\because$ 随机变量 $X \sim B\left(8, \frac{1}{2}\right)$, $\therefore E(X) = 8 \times \frac{1}{2} = 4$, $\therefore E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 3 \times 4 - 1 = 11$.

2. C 解析: 根据题意, 可知 $X \sim B(50, 0.4)$, 则 $D(X) = 50 \times 0.4 \times (1 - 0.4) = 12$, $D(3X + 2\ 022) =$

$9D(X)=108$. 故选 C.

3. D 解析: 设事件 A: 第 1 次抽到代数题, 事件 B: 第 2 次抽到几何题, 则 $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(AB)=\frac{2}{5} \times$

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{10}, \text{ 所以 } P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}.$$

4. B 解析: 依题意, $\xi=0, 1, 2$, 则 $P(\xi=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

$$P(\xi=1)=\frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}, P(\xi=2)=\frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}, \text{ 故}$$

$$E(\xi)=0 \times \frac{1}{5}+1 \times \frac{3}{5}+2 \times \frac{1}{5}=1.$$

5. CD 解析: 对于 A, 若随机变量 X 服从两点分布,

$$P(X=1)=\frac{1}{2}, \text{ 则 } D(X)=\frac{1}{2} \times \left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}, \text{ 故}$$

A 错误; 对于 B, 若随机变量 Y 的方差 $D(Y)=2$, 则 $D(3Y+2)=9D(Y)=18$, 故 B 错误; 对于 C, 若随机

变量 ξ 服从二项分布 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, 则 $P(\xi=3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$, 故 C 正确; 对于 D, 若随

机变量 η 服从正态分布 $N(5, \sigma^2)$, $P(\eta < 2)=0.1$, 则 $P(\eta > 8)=0.1$, 故 $P(2 < \eta < 8)=1-P(\eta < 2)-P(\eta > 8)=0.8$, 故 D 正确. 故选 CD.

6. $\frac{1}{8}$ 解析: $P(X=4)=\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7}=\frac{1}{8}$.

7. 1 解析: 因为 $X \sim B(100, p)$, 所以 $E(X)=100p=20$, 解得 $p=\frac{1}{5}$, 所以 $D(X)=100p(1-p)=100 \times$

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}=16. \text{ 故 } D\left(\frac{1}{4}X+3\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times D(X)=$$

$$\frac{1}{16} \times 16=1.$$

8. $\frac{1}{3} \frac{7}{27}$ 解析: 在一次活动中, 甲获胜的概率为

$$\frac{5}{6} \times \left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{3}, \text{ 则在三次活动中, 甲至少获胜}$$

$$\text{两次的概率为 } C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}.$$

9. 解: (1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄为 $0.001 \times 10 \times 5+0.002 \times 10 \times 15+0.012 \times 10 \times 25+0.017 \times 10 \times 35+0.023 \times 10 \times 45+0.020 \times 10 \times 55+0.017 \times 10 \times 65+0.006 \times 10 \times 75+0.002 \times 10 \times 85=47.9$.

(2) 估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间

$[20, 70)$ 的概率 $P=0.012 \times 10+0.017 \times 10+$

$$0.023 \times 10+0.020 \times 10+0.017 \times 10=0.89.$$

(3) 设事件 A: 此人患这种疾病,

事件 B: 此人年龄位于区间 $[40, 50)$,

则由题意知 $P(AB)=23\% \times 0.1\%=0.023\%$,

$$P(B)=16\%,$$

所以若此人年龄位于 $[40, 50)$,

$$\text{则此人患这种疾病的概率 } P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=$$

$$\frac{0.023\%}{16\%} \approx 0.0014.$$

10. 解: (1) ξ 的可能取值为 1, 2, 3, 4,

$$P(\xi=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$P(\xi=2)=\frac{3}{6} \times \frac{3}{5}=\frac{3}{10},$$

$$P(\xi=3)=\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}=\frac{3}{20},$$

$$P(\xi=4)=\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3}=\frac{1}{20},$$

故 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\therefore E(\xi)=1 \times \frac{1}{2}+2 \times \frac{3}{10}+3 \times \frac{3}{20}+4 \times \frac{1}{20}=\frac{7}{4}.$$

(2) 取出后放回, 取球 3 次, 每次取到红球的概率

$$\text{为 } \frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \text{ 可看作 3 次独立重复试验,}$$

$$\text{所以 } \eta \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right),$$

η 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(\eta=0)=C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

$$P(\eta=1)=C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},$$

$$P(\eta=2)=C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8},$$

$$P(\eta=3)=C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8},$$

故 η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore E(\eta)=3 \times \frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$D(\eta) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

素养提升

1. B 解析: 设运动员射击 4 次, 击中目标的次数为 X , 则 $P(X \geq 3) = C_4^1 \times 0.8^1 + C_4^3 \times 0.8^3 \times 0.2 = 0.8192$.

2. B 解析: 设 $P(X=1)=p, P(X=2)=q, \therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + p + 2q = 1$ ①, 又 $\frac{1}{5} + p + q = 1$ ②, 由 ①② 得 $p = \frac{3}{5}, q = \frac{1}{5}, \therefore D(X) = \frac{1}{5} \times (0-1)^2 + \frac{3}{5} \times (1-1)^2 + \frac{1}{5} \times (2-1)^2 = \frac{2}{5}$.

3. B 解析: 设“电话响第一声被接”为事件 A , “电话响第二声被接”为事件 B , “电话响第三声被接”为事件 C , “电话响第四声被接”为事件 D , 则 A, B, C, D 两两互斥, 从而 $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

4. 26 解析: 由高二学生体育健康测试成绩近似服从正态分布 $N(70, 7^2)$, 可得 $\mu=70, \sigma=7$. 因为 $P(X \geq 77) = P(X \geq \mu + \sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.16$, 又成绩在 77 分及 77 分以上的学生有 208 人, 所以高二学生总数约为 $208 \div 0.16 = 1300$. 又 $P(X \geq 84) = P(X \geq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.02$, 故本次体育健康测试成绩为优秀的大约有 $1300 \times 0.02 = 26$ (人).

5. 解: (1) 设第一次取出的球是红球为事件 A , 取到甲袋、乙袋、丙袋分别为事件 B_1, B_2, B_3 , 则 $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$, 由全概率公式可得 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

(2) 设第二次取出的球是白球为事件 C ,

由全概率公式可得 $P(AC) = P(AC|B_1)P(B_1) + P(AC|B_2)P(B_2) + P(AC|B_3)P(B_3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{31}{105}$,

所以 $P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{\frac{31}{105}}{\frac{1}{2}} = \frac{62}{105}$.

6. 解: (1) 一辆客车是否出现故障可看作一次试验, 在一次试验中, 记客车出现故障为事件 A ,

则事件 A 的概率为 $\frac{1}{3}$,

该汽车公司有 4 辆大型客车就相当于 4 次独立重复试验,

因为出现故障的客车辆数为 X ,

所以 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$,

$$P(X=0) = C_4^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

$$P(X=1) = C_4^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(X=3) = C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81},$$

$$P(X=4) = C_4^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

(2) 设该汽车公司有 n 名维修工,

则“每辆客车在任何时刻同时出现故障能及时进行维修”满足的条件为 $X \leq n$,

即 $X=0, X=1, \dots, X=n$ 这 $n+1$ 个互斥事件的和事件,

则

n	0	1	2	3	4
$P(X \leq n)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{80}{81}$	1

因为 $\frac{72}{81} < 90\% < \frac{80}{81}$,

所以至少有 3 名维修工才能保证每辆客车在任何时刻同时出现故障能及时维修的概率不小于 90%.

小测试(三十六) 成对数据的统计相关性

预习自评

1. C 2. CD 3. C

基础过关

1. BC 解析: A 中, 所有的点都在一条曲线上, 所以 A

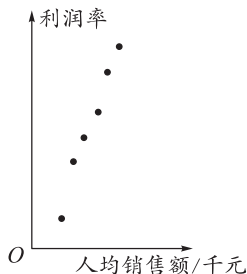
中的两个变量具有函数关系;B中,所有的点都分布在一条直线的附近,所以B中的两个变量具有相关关系;C中,所有的点都分布在一条曲线的附近,所以C中的两个变量具有相关关系;D中,所有的点杂乱无章,没有分布在一条曲线的附近,所以D中的两个变量没有相关关系.故选BC.

2. AD 解析:对于A, $|r|$ 越大,相关程度越大,命题正确;对于B, $|r|$ 越小,相关程度越小,命题错误;对于C, r 越接近于 -1 时,线性相关程度越强,命题错误;对于D, $|r|$ 越接近于 1 时,线性相关程度越强,命题正确.

3. C 解析:Y随X的增大而增大,故变量Y与X正相关,即 $r_1 > 0$;V随U的增大而减小,故变量V与U负相关,即 $r_2 < 0$. 故 $r_2 < 0 < r_1$.

4. D 解析:题图(1)中的点分布在从左上角到右下角的带状区域内,所以 x 与 y 负相关;题图(2)中的点分布在从左下角到右上角的带状区域内,所以 u 与 v 正相关.

5. A 解析:画出利润率与人均销售额的大致散点图,如图所示.由图可知利润率与人均销售额成正相关关系.



6. 甲 解析:根据题意,因为线性相关系数的绝对值越大,线性相关性越强.又甲、乙、丙、丁四组数据的线性相关系数分别为 -0.95 , -0.87 , 0.76 , 0.92 , 所以甲组数据的线性相关性最强.

7. -0.99 解析:根据表中数据计算可知 $\bar{x} = \frac{1}{4} \times$

$$(6+8+10+12)=9, \bar{y} = \frac{1}{4} \times (6+5+3+2)=4,$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (6-9)(6-4) + (8-9)(5-4) + (10-9)(3-4) + (12-9)(2-4) = -14,$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = (6-9)^2 + (8-9)^2 + (10-9)^2 + (12-9)^2 = 20, \sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2 = (6-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (2-4)^2 = 10,$$

变量 x, y 之间的相关

$$\text{系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-14}{10\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \approx -0.99.$$

8. 解:由题易得, $\bar{x}=5, \bar{y}=5$,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 21,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{26},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{18.5},$$

$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{21}{\sqrt{26} \times \sqrt{18.5}} = \frac{21}{\sqrt{481}} \approx 0.958 > 0.75,$$

故年份与接待游客数相关性很强.

素养提升

1. C 解析:选项A,B中的图象为连续曲线,变量间的关系是确定的,选项C中的散点分布在一条直线附近,可得变量 x, y 具有线性相关关系,选项D中的散点分布在一个长方形区域内,则变量 x, y 不具有相关关系.

2. D 解析:根据题中散点图可知该同学的数学成绩与测试次数具有正相关关系,所以①③均正确;第1次的成绩在90分以下,第9次的成绩在130分以上,所以②正确,故选D.

3. C 解析:由样本相关系数 $r_1 = 0.7859 > 0$ 知 x 与 y 正相关,由样本相关系数 $r_2 = -0.9568 < 0$ 知 u 与 v 负相关,又 $|r_1| < |r_2|$, 所以变量 u 与 v 的线性相关性比变量 x 与 y 的线性相关性更强.

4. $r_2 < r_4 < r_3 < r_1$ 解析:根据散点图可知,图①③成正相关,图②④成负相关, $\therefore r_1 > 0, r_2 < 0, r_3 > 0, r_4 < 0$. 又图①②的散点图近似在一条直线上,则图①②两变量的线性相关程度比较高,图③④的散点图比较分散,故图③④两变量的线性相关程度比较低,即 $|r_1|$ 与 $|r_2|$ 比较大, $|r_4|$ 与 $|r_3|$ 比较小, $\therefore r_2 < r_4 < r_3 < r_1$.

5. 解:由折线图中的数据 and 参考数据得 $\bar{t}=4$,

$$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 = 28, \sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} \approx 0.55,$$

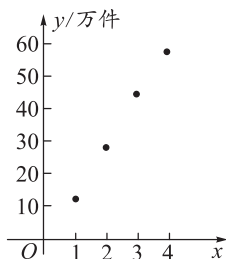
$$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) \approx 2.89,$$

$$\therefore r \approx \frac{2.89}{\sqrt{28} \times 0.55} \approx \frac{2.89}{0.55 \times 2 \times 2.646} \approx 0.99.$$

$\therefore y$ 与 t 的样本相关系数近似为 0.99,

$\therefore y$ 与 t 之间具有较强的线性相关关系.

6. 解: 作出散点图如图所示.



由散点图可知, 各点大致分布在一条直线附近, 故可推断 x 与 y 线性相关.

由题中所给数据得,

$$\bar{x} = \frac{5}{2}, \bar{y} = 34.5,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y} = 418 - 4 \times \frac{5}{2} \times 34.5 = 73,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{5} \approx 2.24,$$

$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2}} \approx$$

$$\frac{73}{2.24 \times 32.7} \approx 0.997.$$

$\therefore y$ 与 x 的样本相关系数近似为 0.997,

故可以推断该公司的年销售量 y 与第 x 年正相关, 且线性相关程度很强.

易错辨析

C 解析: 正方形的面积与边长是函数关系, 故 A 选项错误; 吸烟越多, 越不健康, 所以吸烟与健康具有负相关关系, 故 B 选项错误; 汽车越重, 每消耗 1 L 汽油所行驶的平均路程越短, 所以汽车的质量与汽车每消耗 1 L 汽油所行驶的平均路程具有负相关关系, 故 D 选项错误; 一般来说, 年龄越大, 体重超重, 所以儿童的年龄与体重具有正相关关系. 故选 C.

小测试(三十七) 一元线性回归模型及其应用

预习自评

1. D 2. B 3. D

基础过关

1. D 解析: 由题意结合经验回归方程的预测作用可得当 $x=6$ 时, $\hat{y}=6.5 \times 6 + 17.5 = 56.5$, 则残差为 $50 - 56.5 = -6.5$.

2. C 解析: 因为 4 个不同的模型, 模型 3 的决定系数 R^2 最大且最接近 1, 所以拟合效果最好的模型是模型 3.

3. C 解析: ①在回归模型中, 响应变量 y 的值不能由解释变量 x 唯一确定, 还受随机误差的影响, 故①正确; ②若变量 x, y 满足关系 $y = -2x + 1$, 且变量 y 与 z 正相关, 则 x 与 z 负相关, 故②错误; ③在残差图中, 残差点分布的带状区域的宽度越狭窄, 其模型拟合的精度越高, 即越接近于回归直线, 故③正确; ④样本点的中心恒在回归直线上, 样本点可能全部不在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 故④正确. 故选 C.

4. C 解析: 因为样本点都落在直线上, 所以样本相关系数 $|r| = 1$, 若直线的斜率为正, 则 $r = 1$, 若斜率为负, 则 $r = -1$, 故 C 选项说法错误; 直线对应的函数为一次函数, 故解释变量和响应变量是一次函数关系, 故 A 选项说法正确; 决定系数和残差平方和都能反映模型的拟合程度, 故决定系数 $R^2 = 1$, 残差平方和为 0, 故 B, D 选项说法正确.

5. C 解析: 由题意得, $\bar{x} = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5, \bar{y} = \frac{3+4.5+6.5+7.5+9}{5} = \frac{30.5}{5} = 6.1$. 因为经验回归直线经过样本点的中心, 所以 $6.1 = 1.05 \times 5 + \hat{a}$, 解得 $\hat{a} = 0.85$, 所以 $\hat{y} = 1.05x + 0.85$. 当使用年限为 7 年时, 维护费用约为 $1.05 \times 7 + 0.85 = 8.2$ (千元). 故选 C.

6. 20 解析: 设两个同学的总成绩分别为 x_1, x_2 , 则对应的数学成绩约为 $\hat{y}_1 = 6 + 0.4x_1, \hat{y}_2 = 6 + 0.4x_2$, 所以 $|\hat{y}_1 - \hat{y}_2| = |0.4(x_1 - x_2)| = 0.4 \times 50 = 20$.

7. 106.5 解析: 根据表中数据, 计算 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (2+4+5+6+8) = 5, \bar{y} = \frac{1}{5} \times (20+40+60+70+80) =$

54, 代入经验回归方程 $\hat{y} = 10.5x + \hat{a}$ 中, 解得 $\hat{a} = 54 - 10.5 \times 5 = 1.5$, $\therefore$ 经验回归方程为 $\hat{y} = 10.5x + 1.5$. 据此模型预测, 当 $x = 10$ 时, $\hat{y} = 10.5 \times 10 + 1.5 = 106.5$, 即 y 的估计值是 106.5.

8. 解: (1) 正相关.

设经验回归方程是 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$.

由数据知 $\bar{x} = 6, \bar{y} = 3.4$,

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{(-3) \times (-1.4) + (-1) \times (-0.4) + 0 \times (-0.4) + 1 \times 0.6 + 3 \times 1.6}{9 + 1 + 0 + 1 + 9} = \frac{10}{20} = 0.5,$$

即利润额与销售额正相关,

则 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 3.4 - 0.5 \times 6 = 0.4$,

$\therefore$ 利润额 y 关于销售额 x 的经验回归方程为

$$\hat{y} = 0.5x + 0.4.$$

(2) 由(1)知, 当 $x = 4$ 时, $\hat{y} = 0.5 \times 4 + 0.4 = 2.4$,

$\therefore$ 当销售额为 4 千万元时, 估计该零售店的利润额为 2.4 百万元.

素养提升

1. BD 解析: 因为残差平方和越小, 模型的拟合效果越好, 故选项 A 错误; 因为经验回归方程必过样本中心, 故选项 B 正确; 因为决定系数 R^2 越接近 1, 说明模型的拟合效果越好, 故选项 C 错误; 由样本相关系数为负且接近 -1, 则 y 和 x 之间具有很强的负线性相关关系, 故选项 D 正确.

2. D 解析: 因为 $\hat{y} = \hat{c}e^{kx}$, 两边取对数得 $\ln \hat{y} = \ln(\hat{c}e^{kx}) = \ln \hat{c} + \ln e^{kx} = \hat{k}x + \ln \hat{c}$, 由 $\hat{z} = \ln \hat{y}$, 得 $\hat{z} = \hat{k}x + \ln \hat{c}$, 又 $\hat{z} = 0.5x + 2$, 则 $\ln \hat{c} = 2$, 即 $\hat{c} = e^2$.

3. C 解析: 由 $\hat{y} = \hat{b} \ln x + 0.24$, 令 $t = \ln x$, 则 $\hat{y} = \hat{b}t + 0.24$, 由题意, 得 $\bar{t} = \frac{1+3+4+6+7}{5} = 4.2, \bar{y} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, 所以 $3 = \hat{b} \times 4.2 + 0.24$, 解得 $\hat{b} = \frac{23}{35}$, 所以 $\hat{y} = \frac{23}{35} \ln x + 0.24$, 由 $x = e^{10}$, 得 y 的值大约为 6.81.

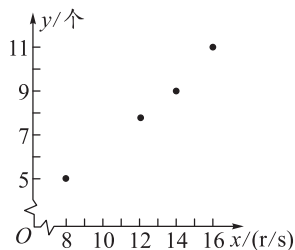
4. 1.6 3.65 解析: 由题中数表得,

$$\bar{x} = \frac{1.8+2.2+2.6+3.0}{4} = 2.4,$$

$$\bar{y} = \frac{2.0+2.8+3.2+4.0}{4} = 3,$$

因此, 回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x - 0.84$ 过点 $(2.4, 3)$, 由 $3 = 2.4\hat{b} - 0.84$, 解得 $\hat{b} = 1.6$, 则 $\hat{y} = 1.6x - 0.84$, 当 $y = 5$ 时, 即 $5 = 1.6x - 0.84$, 解得 $x = 3.65$, 故预计 2024 年进口总额为 3.65 千亿元.

5. 解: (1) 画出散点图, 如图所示.



(2) 由题表易得 $\bar{x} = 12.5, \bar{y} = 8.25$,

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 438, \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 660,$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4 \bar{x}^2} =$$

$$\frac{438 - 4 \times 12.5 \times 8.25}{660 - 4 \times 12.5^2} \approx 0.7286,$$

则 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 8.25 - 0.7286 \times 12.5 = -0.8575$.

故经验回归方程为 $\hat{y} = 0.7286x - 0.8575$.

(3) 要使 $y \leq 10$,

则 $0.7286x - 0.8575 \leq 10$,

$$\text{解得 } x \leq \frac{108.575}{0.7286} \approx 14.9.$$

故机器的转速应控制在 14.9 r/s 以内.

6. 解: (1) 由题表中数据可得 $\bar{x} = 18, \bar{y} = 45.4$.

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{3992 - 5 \times 18 \times 45.4}{1660 - 5 \times 18^2} = -2.35.$$

则 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 45.4 + 2.35 \times 18 = 87.7$.

故 y 关于 x 的经验回归方程为

$$\hat{y} = -2.35x + 87.7.$$

(2) 列表:

编号	1	2	3	4	5
$y_i - \hat{y}_i$	1.2	-0.1	-2.4	0.3	1
$y_i - \bar{y}$	10.6	4.6	-2.4	-4.4	-8.4

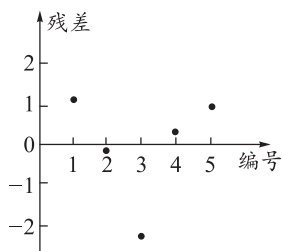
$$\text{所以 } \sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 8.3, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 229.2,$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{8.3}{229.2} \approx 0.964.$$

因为 0.964 很接近 1,

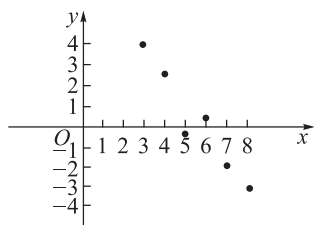
所以该模型的拟合效果好.

残差图如图,残差点比较均匀地在水平的带状区域中,说明选用的模型比较合适.



易错辨析

B 解析:画出散点图如图所示,由图可知 $\hat{a} > 0$, $\hat{b} < 0$.



小测试(三十八) 列联表与独立性检验

预习自评

1. D 2. C 3. C

基础过关

1. B **解析:**独立性检验是对两个分类变量是否有关进行检验,A,C,D 选项中均是对两个分类变量是否有关进行检验,而 B 选项不是.

2. B **解析:**由题意知 $\frac{a}{a+b}$ 与 $\frac{c}{c+d}$ 基本相等,由列联表知 $\frac{200}{1\ 000}$ 与 $\frac{180}{180+a}$ 基本相等,即 $\frac{200}{1\ 000} = \frac{180}{180+a}$,解得 $a=720$.

3. B **解析:**对于分类变量 X 与 Y 的随机变量 χ^2 , χ^2 越大,“X 与 Y 有关联”的可信程度越大; χ^2 越小,“X 与 Y 有关联”的可信程度越小.故选 B.

4. D **解析:**在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为这个结论是成立的,其意义就是有 99% 的把握认为打鼾与患心脏病有关联.对于 A,题设中没有给出吸烟与打鼾的相关性判断,故 A 错误;对于 B,

99% 是结论的可信程度,而不是心脏病患者打鼾的概率,故 B 错误;对于 C,D,概率是表示事件发生可能性的数学量,不能用“一定”来描述事件发生的比例,实际上 100 个心脏病患者中可能有一个打鼾的人,也可能有不止一个,也可能一个也没有,故 C 错误,D 正确.故选 D.

5. B **解析:** $\because$ 有 97.5% 的把握但没有 99% 的把握, $\therefore \chi^2$ 的观测值区间范围为 $[5.024, 6.635)$,结合选项可知 χ^2 的观测值可能为 6.625.

6. 能 **解析:**根据题目所给数据得到如下 2×2 列联表.

	乐观	不乐观	合计
国内代表	60	40	100
国外代表	40	60	100
合计	100	100	200

$$\text{则 } \chi^2 = \frac{200 \times (60 \times 60 - 40 \times 40)^2}{100 \times 100 \times 100 \times 100} = 8 >$$

6.635 = $\chi_{0.01}$,故能有 99% 的把握认为是否持乐观态度与国内外差异有关联.

7. 45,50,55,60 或 65 **解析:**设被调查的学生中男生有 x 人,由题意可得 2×2 列联表如下,

	喜欢	不喜欢	合计
男生	$\frac{4}{5}x$	$\frac{1}{5}x$	x
女生	$\frac{3}{5}x$	$\frac{2}{5}x$	x
合计	$\frac{7}{5}x$	$\frac{3}{5}x$	$2x$

若认为喜欢网络游戏和性别有关,且该推断犯错误的概率超过 0.01 但不超过 0.05,则 $3.841 < \chi^2 <$

$$6.635. \because \chi^2 = \frac{2x \left(\frac{4}{5}x \cdot \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}x \cdot \frac{3}{5}x \right)^2}{\frac{7}{5}x \cdot \frac{3}{5}x \cdot x \cdot x} =$$

$$\frac{2}{21}x, \therefore 3.841 < \frac{2}{21}x < 6.635, \text{解得 } 40.3 < x < 69.7,$$

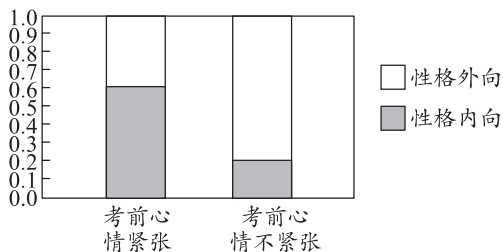
又 x 为 5 的整数倍, $\therefore$ 被调查的学生中男生可能的人数为 45,50,55,60,65.

8. 解:作列联表如下:

单位:人

	性格内向	性格外向	合计
考前心情紧张	332	213	545
考前心情不紧张	94	381	475
合计	426	594	1 020

作出等高堆积条形图如图所示.



图中阴影部分表示考前心情紧张与考前心情不紧张中性格内向的比例.从图中可以看出考前心情紧张的样本中性格内向占的比例比考前心情不紧张的样本中性格内向占的比例高,可以认为该校高三学生考前心情紧张与性格类型有关.

素养提升

1. A 解析:由题意可得当 $\frac{a}{a+10}$ 与 $\frac{c}{c+30}$ 相差越大时, X 与 Y 有关系的可能性越大,分析四组选项, A 选项中 a, c 的值最符合题意,故选 A.
2. A 解析:因为 $3.841 < \chi^2 < 6.635$, 所以判定休闲方式与性别有关系,这种判断出错的可能性不超过 5%.
3. B 解析:由题意得到如下 2×2 列联表:

	喜欢看篮球赛	不喜欢看篮球赛	总计
男	$\frac{5n}{6}$	$\frac{n}{6}$	n
女	$\frac{n}{6}$	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{2}$
总计	n	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{2}$

所以 $\chi^2 = \frac{\frac{3n}{2} \left(\frac{5n}{6} \cdot \frac{n}{3} - \frac{n}{6} \cdot \frac{n}{6} \right)^2}{n \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot n} = \frac{3n}{8}$. 因为

95% 的把握认为是否喜欢看篮球赛与性别有关,所以

以 $\chi^2 > 3.841$, 即 $\frac{3n}{8} > 3.841$, 解得 $n > \frac{3.841 \times 8}{3} \approx$

10.24. 又 $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ 为整数, 所以 n 的最小值为 12.

故选 B.

4. ①② 解析:对于①,甲组数据的中位数为 45,乙组数据的中位数为 $\frac{46+48}{2}=47$,①错误;对于②,相关系数 $|r| \geq 0.75$ 时,两个变量有很强的相关性,②错误;对于③, χ^2 的观测值约为 $4.103 > 3.841 = x_{0.05}$, 认为两个变量有关,此推断犯错误的概率不超过 0.05,③正确;对于④,残差分析中,相应数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 的残差 $\hat{e}_i = y_i - (\hat{b}x_i + \hat{a})$,④正确,所以错误命题的序号是①②.

5. 解:(1)由题意,完成列联表如下:

	平均车速超过 100 km/h	平均车速不超过 100 km/h	合计
男性驾驶员	45	15	60
女性驾驶员	10	30	40
合计	55	45	100

计算可得 $\chi^2 = \frac{100 \times (45 \times 30 - 15 \times 10)^2}{60 \times 40 \times 55 \times 45} \approx$

24.242 > 10.828,

所以有 99.9% 的把握认为轿车在高速公路上行驶的平均车速超过 100 km/h 与性别有关.

(2)根据样本估计总体的思想,从高速公路上行驶的大量家用轿车中随机抽取 1 辆,驾驶员为女性且

车速不超过 100 km/h 的概率为 $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$,

ξ 可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4,

由题意知 $\xi \sim B\left(4, \frac{3}{10}\right)$,

所以数学期望 $E(\xi) = 4 \times \frac{3}{10} = 1.2$.

易错辨析

1. B 解析:因为利用独立性检验时与样本的选取有关,所以得到的结论可能有误,因此 B 中说法错误. 故选 B.

2. D 解析: $\because$ 概率 $P(\chi^2 \geq 10.828) \approx 0.001$, $\therefore$ 两个变量有关联的可信度是 $1 - 0.001 = 99.9\%$.

滚动卷(六) 小测试(三十六) 至(三十八)

综合拔高

1. A 解析:观察散点图知,第一、三个图中 x, y 是正

相关的,且第一个图中点的集中程度高于第三个图的, r_1 接近于 1, 即 $r_1 > r_3 > 0$, 第二、四个图中 x, y 是负相关的, 且第二个图中点的集中程度高于第四个图的, r_2 接近于 -1, 即 $r_2 < r_4 < 0$, 所以有 $r_1 > r_3 > r_4 > r_2$. 故选 A.

2. D 解析: 由表中数据可得 y 随 x 的增大而增大, 故 y 与 x 正相关. 又 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (10 + 20 + 30 + 40 + 50) = 30, \bar{y} = \frac{1}{5} \times (64 + 69 + 75 + 82 + 90) = 76$, 所以以样本点的中心为 $(30, 76)$. 又经验回归直线过样本点的中心, 因此其经验回归直线经过点 $(30, 76)$. 故选 D.

3. C 解析: 由表中数据知, $\bar{x} = \frac{1}{6} \times (4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 6.5, \bar{y} = \frac{1}{6} \times (90 + 84 + 83 + 80 + 75 + 68) = 80$. 因为经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + 106$ 恒过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$, 所以 $80 = \hat{b} \times 6.5 + 106$, 解得 $\hat{b} = -4$, 所以 $\hat{y} = -4x + 106$. 由此得到数据如表所示.

单价 x /元	4	5	6	7	8	9
销量 y /件	90	84	83	80	75	68
估计值 $\hat{y}$ /件	90	86	82	78	74	70

所以 6 个点中, 在经验回归直线右上方的点有 $(6, 83), (7, 80), (8, 75)$, 共 3 个, 所以所求概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 C.

4. B 解析: 依题意, 设男、女学生的人数各为 $5x$, 建立 2×2 列联表如下:

	喜欢网络课程	不喜欢网络课程	合计
男生	$4x$	x	$5x$
女生	$3x$	$2x$	$5x$
合计	$7x$	$3x$	$10x$

故 $\chi^2 = \frac{(8x^2 - 3x^2)^2 \cdot 10x}{5x \cdot 5x \cdot 3x \cdot 7x} = \frac{10x}{21}$, 由题可知 $6.635 \leq \frac{10x}{21} < 10.828, \therefore 139.335 \leq 10x < 227.388$, 只有 B 符合题意.

5. AC 解析: 对于 A, 因为参加调查的男、女生人数相同, 由题图可知男生中喜欢攀岩的占 80%, 女生

中喜欢攀岩的占 30%, 所以参与调查的学生中喜欢攀岩的男生人数比喜欢攀岩的女生人数多, 故选项 A 正确; 对于 B, 由题图可知参与调查的女生中喜欢攀岩的人数占 30%, 所以不喜欢攀岩的人数占 70%, 所以不喜欢攀岩的人数比喜欢攀岩的人数多, 故选项 B 不正确; 对于 C, 若参加调查的男、女生人数都为 100, 则可得 2×2 列联表如下:

	喜欢攀岩	不喜欢攀岩	合计
男生	80	20	100
女生	30	70	100
合计	110	90	200

所以 $\chi^2 = \frac{200 \times (80 \times 70 - 20 \times 30)^2}{100 \times 100 \times 110 \times 90} = \frac{5000}{99} \approx 50.505 > 6.635 = x_{0.01}$, 所以有 99% 的把握认为喜欢攀岩和性别有关, 故选项 C 正确; 对于 D, 如果不确定参与调查的男、女生人数, 无法计算是否有 99% 的把握认为喜欢攀岩和性别有关, 故选项 D 不正确.

6. 0.8 解析: 由题图知 $\bar{x} = \frac{0+1+3+4}{4} = 2, \bar{y} = \frac{0.9+1.9+3.2+4.4}{4} = 2.6$, 将 $(2, 2.6)$ 代入 $\hat{y} = \hat{b}x + 1$ 中, 得 $\hat{b} = 0.8$.

7. 5% 解析: 因为 $\chi^2 \approx 4.844 > 3.841 = x_{0.05}$, 所以认为喜欢英语与性别有关系出错的概率约为 5%.

8. 1.3 $e^{-0.2}$ 解析: 由题表可知, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4, \bar{z} = \frac{1}{5} \times (1.5 + 4.5 + 5.5 + 6.5 + 7) = 5$. 又 $\hat{z} = 1.3x + \hat{a}$ 恒过点 $(\bar{x}, \bar{z})$, 即 $5 = 1.3 \times 4 + \hat{a}$, 解得 $\hat{a} = -0.2, \therefore \hat{z} = 1.3x - 0.2$, 即 $\ln \hat{y} = 1.3x - 0.2, \therefore \hat{y} = e^{1.3x - 0.2} = e^{-0.2} \cdot e^{1.3x}, \therefore \hat{k} = 1.3, \hat{c} = e^{-0.2}$.

9. 解: (1) 由散点图可知, $\hat{y} = \hat{c}x^2 + \hat{d}$ 适宜作为销售额 y 关于 x 的回归方程类型.

(2) 令 $t = x^2$,

则 $\hat{y} = \hat{c}t + \hat{d}$.

易得 $\bar{t} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_i = \frac{385}{10} = 38.5$,

$\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1020}{10} = 102$.

$$\text{则 } \hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i y_i - 10 \bar{t} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{10} t_i^2 - 10 \bar{t}^2} \approx$$

$$\frac{67\,770 - 10 \times 38.5 \times 102}{25\,380 - 10 \times 1\,482} \approx 2.7,$$

$$\hat{d} = \bar{y} - \hat{c} \bar{t} \approx 102 - 2.7 \times 38.5 \approx -2.0,$$

$$\therefore \hat{y} = 2.7t - 2.0,$$

故 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 2.7x^2 - 2.0$.

10. 解: (1) 估计该校高三学生当天的观看人数为

$$\frac{95}{100} \times 900 = 855.$$

(2) 当天没有观看的 5 名学生中, 记第二天看了重播的 3 名学生分别为 a, b, c , 没有看重播的 2 名学生为 D, E , 从这 5 名学生中任选 2 名, 基本事件为 $ab, ac, aD, aE, bc, bD, bE, cD, cE, DE$, 共 10 个, 记“选到的 2 名学生第二天都看了重播”为事件 A ,

则其包含的基本事件有 ab, ac, bc , 共 3 个,

所以这 2 名学生第二天都看了重播的概率为

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

(3) 零假设为 H_0 : “是否使用手机观看”与“学生的性别”无关联.

$$\text{因为 } \chi^2 = \frac{60 \times (20 \times 12 - 8 \times 20)^2}{28 \times 32 \times 40 \times 20} = \frac{15}{28} \approx 0.536,$$

$$\text{且 } 0.536 < 3.841 = x_{0.05},$$

故认为 H_0 成立,

所以没有 95% 的把握认为网络观看的学生中“是否使用手机观看”与“学生的性别”有关.

素养提升

1. C 解析: 由题意知, 成绩优秀的学生人数是 $105 \times \frac{2}{7} = 30$, 则成绩非优秀的学生人数是 $105 - 30 = 75$, 所以 $c = 30 - 10 = 20$, $b = 75 - 30 = 45$, 故选项 A, B 错误; 根据列联表中的数据, 得到 $\chi^2 = \frac{105 \times (10 \times 30 - 20 \times 45)^2}{55 \times 50 \times 30 \times 75} \approx 6.109 > 3.841$, 因此按 95% 的可靠性, 能认为“成绩与班级有关联”, 故选项 C 正确, 选项 D 错误. 故选 C.

2. D 解析: 根据等高堆积条形图, 不同性别喜欢使用手机支付的比例差距很明显, 所以喜欢使用手机支付与性别有关联, A 错误; 样本中男生喜欢使用手机支付的约为 40%, B 错误; 女生喜欢使用手机支

付的可能性比男生大些, 由于不知道样本中的男、女生人数, 所以不能认定样本中女生喜欢使用手机支付的人数比男生多, 所以 C 错误, D 正确. 故选 D.

3. AC 解析: 因为 $6.635 < 9 < 10.828$, 所以有 99% 的把握认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关, 或者说在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下, 认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关联, 所以选项 C 正确, 选项 D 错误; 由表可知认可“光盘行动”的人数为 60, 所以在该餐厅用餐的客人中认可“光盘行动”的比例约为 $\frac{60}{90} \times 100\% \approx 66.7\%$, 故选项 A 正确, 选项 B 错误. 故选 AC.

4. 必要不充分 解析: 当 x_0, y_0 为这 10 组数据的平均值, 即 $x_0 = \bar{x}, y_0 = \bar{y}$ 时, 因为经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 必过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$, 所以 (x_0, y_0) 一定满足经验回归方程, 但满足经验回归方程的除了 $(\bar{x}, \bar{y})$ 外, 可能还有其他样本点, 所以“ (x_0, y_0) 满足经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ”是“ $x_0 = \frac{1}{10}(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}), y_0 = \frac{1}{10}(y_1 + y_2 + \dots + y_{10})$ ”的必要不充分条件.

5. 解: (1) $\bar{x} = \frac{1}{4} \times (3 + 4 + 5 + 6) = 4.5$,

$$\bar{y} = \frac{1}{4} \times (0.45 + 0.40 + 0.30 + 0.25) = 0.35,$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86,$$

$$3 \times 0.45 + 4 \times 0.40 + 5 \times 0.30 + 6 \times 0.25 = 5.95,$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{5.95 - 4 \times 4.5 \times 0.35}{86 - 4 \times 4.5^2} = -0.07,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 0.35 - (-0.07) \times 4.5 = 0.665.$$

故 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = -0.07x + 0.665$.

(2) 设超市一天内 A 水果能获得的销售收入为 z 元, 当 A 水果的销售价格为 x 元/千克时, 销售量为 1 000 y 千克,

$$\text{有 } z = 1\,000xy = x(-70x + 665) = -70x^2 + 665x,$$

$$\text{当 } x = -\frac{665}{2 \times (-70)} = 4.75,$$

即 A 水果的销售价格为 4.75 元/千克时, 超市一天内 A 水果能获得最大的销售收入.

6. 解: (1) 由 $80 + x = 180$ 可得 $x = 100$,

$$\text{由 } 80 + y = 160 \text{ 可得 } y = 80,$$

由 $80+z=220$ 可得 $z=140$,

2×2 列联表如下.

	喜欢	不喜欢	合计
男生	80	80	160
女生	100	140	240
合计	180	220	400

假设 H_0 : 学生喜欢冰雪运动与性别无关,

根据列联表计算得

$$\chi^2 = \frac{400 \times (80 \times 140 - 100 \times 80)^2}{180 \times 220 \times 160 \times 240} \approx 2.694,$$

因为 $2.694 < 2.706$, 根据小概率值 $\alpha = 0.10$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立,

因此依据 $\alpha = 0.10$ 的独立性检验, 不能认为学生喜欢冰雪运动与性别有关.

(2) 抽取的 9 人中, 男生有 $\frac{80}{180} \times 9 = 4$ (人),

女生有 $\frac{100}{180} \times 9 = 5$ (人),

则 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{5}{14},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{5}{14} + 3 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{3}.$$