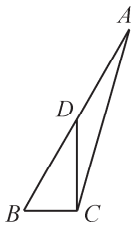


参考答案

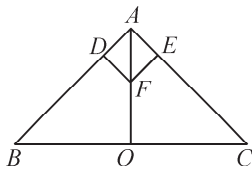
第六章 平面向量及其应用(A卷)

1. B 解析: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2, 3) + (-1, 4) = (1, 7)$. 故选 B.
2. B 解析: 因为 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AC} = c$, 所以 $a - b + c = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AB}$. 又 $|\overrightarrow{AB}| = 1$, 所以 $|a - b + c| = |2\overrightarrow{AB}| = 2$. 故选 B.
3. B 解析: 因为 $a = (2, 0), |b| = 1$, 所以 $|a| = 2$. 因为向量 a 与 b 的夹角为 60° , 所以 $a \cdot b = |a| |b| \cos 60^\circ = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$. 所以 $|a + 2b| = \sqrt{a^2 + 4a \cdot b + 4b^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$. 故选 B.
4. C 解析: 依题意, 由正弦定理, 得 $c^2 - (2a + b)b = (a - b)a$, 即 $c^2 - 2ab - b^2 = a^2 - ab$. 则 $a^2 + b^2 - c^2 = -ab$. 所以 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$, 即 $\cos C = -\frac{1}{2}$. 因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$. 故选 C.
5. B 解析: 由于 a, b 为不共线的非零向量, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 都没有倍数关系, 根据向量共线定理, 得 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线, $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不共线. 则 A, C 选项错误. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (-2a + 8b) + (3a - 3b) = a + 5b = \overrightarrow{AB}$, 则 A, B, D 三点共线, B 选项正确. 又 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (a + 5b) + (-2a + 8b) = -a + 13b$, 显然 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 没有倍数关系, 则 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不共线, D 选项错误. 故选 B.
6. A 解析: 如图所示:

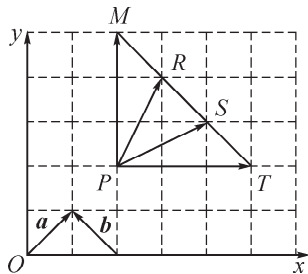


- $\because$ 点 D 为 AB 的中点, 且 $AD = 2, \therefore BD = 2$. 在 $\triangle DBC$ 中, $BC = 1, CD \perp BC, \therefore \angle DBC = \frac{\pi}{3}$. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 1, AB = 4, \angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 由余弦定理, 得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 4^2 + 1^2 - 2 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 13. \therefore AC = \sqrt{13}$. 故选 A.
7. B 解析: 因“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角

- 形与一个小正方形拼成的一个大正方形, 且 $\overrightarrow{BC} = a, \overrightarrow{BA} = b, \overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{EF}$, 则 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}(-\frac{3}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC} - \frac{9}{16}\overrightarrow{BF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. 解得 $\overrightarrow{BF} = \frac{16}{25}\overrightarrow{BC} + \frac{12}{25}\overrightarrow{BA}$. 所以 $\overrightarrow{BF} = \frac{16}{25}a + \frac{12}{25}b$. 故选 B.
8. D 解析: 如图所示, 在边 AB, AC 上分别取点 D, E , 使 $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$.



- 以 AD, AE 为邻边作平行四边形 $ADFE$, 则 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, 显然 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AE}| = 1$. 因此平行四边形 $ADFE$ 为菱形, AF 平分 $\angle BAC$, 而 $(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 则有 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 即 $AF \perp BC$, 于是得 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 即 $b = c$. 令直线 AF 交 BC 于点 O , 则 O 是边 BC 的中点. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot AO$, 而 $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2$, 因此有 $AO = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}BC$, 从而得 $\angle BAC = 90^\circ$. 所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形. 故选 D.
9. BD 解析: 因为 $2 \times 2 - (-1) \times (-3) = 1 \neq 0$, 所以 a, b 不平行, 则 A 错误. 由 $(a + b) \cdot c = (-1, 1) \cdot (1, 1) = -1 + 1 = 0$, 所以 $(a + b) \perp c$, 则 B 正确. 由 $a + b = (-1, 1), c = (1, 1)$, 故 C 错误. 由 $5a + 3b = (10 - 9, -5 + 6) = (1, 1) = c$, 故 D 正确. 故选 BD.
10. BD 解析: 建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $a = (1, 1), b = (-1, 1)$.



$$\text{故 } \overrightarrow{PM} = (0, 3) = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{3}{2}(-1, 1) = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b$$

$\frac{3}{2}\mathbf{b}$, 则 A 正确.

$$\overrightarrow{PT} = (3, 0) = \frac{3}{2}(1, 1) - \frac{3}{2}(-1, 1) = \frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{3}{2}\mathbf{b},$$

则 B 错误.

$$\overrightarrow{PS} = (2, 1) = \frac{3}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1) = \frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

则 C 正确.

$$\overrightarrow{PR} = (1, 2) = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1) = \frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

则 D 错误. 故选 BD.

11. AC 解析: 对于 A, 若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$, 则

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C}, \text{ 即 } \tan A = \tan B = \tan C, \text{ 即}$$

$A=B=C$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 故 A 正确. 对于 B, 若 $a\cos A = b\cos B$, 则由正弦定理得 $2R\sin A\cos A = 2R\sin B\cos B$, $\therefore \sin 2A = \sin 2B$, 则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=180^\circ$, 即 $A=B$ 或 $A+B=90^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形, 故 B 错误. 对于 C, 若 $b\cos C + c\cos B = b$, 则 $\sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin(B+C) = \sin A = \sin B$, 即 $A=B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 故 C 正确. 对于 D, 在 $\triangle ABC$ 中, $\because a^2 + b^2 - c^2 > 0$, $\therefore 2ab\cos C > 0$. $\therefore \cos C > 0$. $\therefore$ 角 C 为锐角, 但 $\triangle ABC$ 不一定是锐角三角形, 故 D 错误. 故选 AC.

12. AD 解析: 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 12, 故

$$\frac{1}{2}ac\sin B = 12, \text{ 故 } ac\sin B = 24.$$

对于 A, 若 $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 结合 B 为三角形的内角

可得 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故 $ac = 24\sqrt{5}$. 因为 $a=6$, 则 $c =$

$4\sqrt{5}$. 故 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B = 36 + 80 - 2 \times$

$24\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 20$, 故 $b = 2\sqrt{5}$. 由正弦定理, 得

$$\frac{6}{\sin A} = \frac{2\sqrt{5}}{\sin B} = \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}, \text{ 故 } \sin A = \frac{3}{5}, \text{ 故 A 正确.}$$

对于 B, 由余弦定理可得 $b^2 + c^2 - 2bccos A = 36$, 所以 $b^2 + c^2 = 2bccos A + 36 \geq 2bc$, 即 $18 \geq bc(1 - \cos A)$, 当且仅当 $b=c$ 时等号成立. 而 $\frac{1}{2}$

$bcsin A = 12$, 则 $bc = \frac{24}{\sin A}$. 故 $18 \geq \frac{24}{\sin A}(1 -$

$\cos A)$, 整理, 得 $\tan \frac{A}{2} \leq \frac{3}{4}$.

$$\text{而 } \sin A = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} =$$

$$\frac{2}{\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} + \tan \frac{A}{2}}, \text{ 因为 } 0 < \tan \frac{A}{2} \leq \frac{3}{4}, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} + \tan \frac{A}{2} \geq \frac{25}{12}, \text{ 故 } \sin A \text{ 的最大值为 } \frac{24}{25}. \text{ 当}$$

且仅当 $b=c=5$ 时等号成立, 故 B 错误.

$$\text{对于 C, } \frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{36 + 2bccos A}{bc} =$$

$$\frac{\frac{3}{2}bcsin A + 2bccos A}{bc}, \text{ 故 } \frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{3}{2} \sin A +$$

$$2\cos A. \text{ 而 } \frac{3}{2} \sin A + 2\cos A < \frac{\frac{9}{4} + \sin^2 A}{2} +$$

$$\frac{4 + \cos^2 A}{2} = \frac{29}{8}, \text{ 故 } \frac{c}{b} + \frac{b}{c} < \frac{29}{8}, \text{ 故 C 错误.}$$

$$\text{对于 D, 若 } \frac{c}{b} + \frac{2b}{c} = \frac{9}{2}, \text{ 则可得 } \frac{c}{b} = 4 \text{ 或 } \frac{c}{b} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{若 } \frac{c}{b} = 4, \text{ 则 } \begin{cases} c=4b, \\ bcsin A=24, \\ b^2+c^2-2bccos A=36, \end{cases} \text{ 消元后得}$$

$$\begin{cases} b^2 \sin A=6, \\ 17b^2-8b^2 \cos A=36. \end{cases} \text{ 所以 } \frac{\sin A}{17-8\cos A} = \frac{1}{6}. \text{ 整}$$

理, 得 $6\sin A + 8\cos A = 17$.

但 $6\sin A + 8\cos A \leq 10$, 故矛盾, 即 $\frac{c}{b} = 4$ 不成立.

$$\text{若 } \frac{c}{b} = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \begin{cases} b=2c, \\ bcsin A=24, \\ b^2+c^2-2bccos A=36, \end{cases} \text{ 消元后,}$$

$$\text{得 } \begin{cases} c^2 \sin A=12, \\ 5c^2-4c^2 \cos A=36. \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{\sin A}{5-4\cos A} = \frac{1}{3}, \text{ 整理, 得 } 3\sin A + 4\cos A =$$

5. 结合 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 可得 $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A =$

$\frac{4}{5}$, 此时 $c=2\sqrt{5}$, $b=4\sqrt{5}$. 故 D 正确. 故选 AD.

13. 1 解析: 由题知 $\overrightarrow{OC} = (-1, 4)$, $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2)$, 由 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 得 $(-1, 4) = \lambda(1,$

$$0) + \mu(0, 2). \therefore \begin{cases} -1 = \lambda, \\ 4 = 2\mu. \end{cases} \therefore \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = 2. \end{cases} \therefore \lambda + \mu = 1.$$

14. 5 解析: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$. $\because$ 点 B, C 在以 AD 为直径的圆

上, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \theta = |\overrightarrow{AC}| \cdot (|\overrightarrow{AD}| \cos \theta) = |\overrightarrow{AC}|^2$, 同理可得 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|^2$.
 $\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 9 - 4 = 5$.

15. $40\sqrt{3}$ 解析: 在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, $\sin 15^\circ = \frac{AB}{AM}$, 解得

$$AM = \frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{20\sqrt{3} - 20}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = 40\sqrt{2}. \text{ 在 } \triangle ACM$$

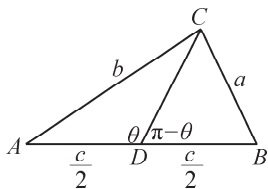
中, $\angle CAM = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$, $\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, 所以 $\angle ACM = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$. 由正弦定理, 得 $\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{CM}{\sin \angle CAM}$, 故

$$CM = \frac{\sin \angle CAM}{\sin \angle ACM} \cdot AM = \frac{\sin 45^\circ \times 40\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 40\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 80. \text{ 在 } \text{Rt}\triangle CDM \text{ 中, } \angle CMD = 60^\circ,$$

所以 $CD = CM \sin 60^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$, 估算该建

筑甲的高度为 $40\sqrt{3}$ m.

16. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 解析: 如图所示, 设 $\angle CDA = \theta$, 则 $\angle CDB = \pi - \theta$,



在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CDB$ 中, 分别由余弦定理可得

$$\cos \theta = \frac{\frac{c^2}{4} + 1 - b^2}{c}, \cos(\pi - \theta) = \frac{\frac{c^2}{4} + 1 - a^2}{c}. \text{ 两式}$$

相加, 整理, 得 $\frac{c^2}{2} + 2 - (a^2 + b^2) = 0$. $\therefore c^2 = 2(a^2 +$

$b^2) - 4$. ① 由 $(a - \frac{1}{2}b) \sin A = (c + b)(\sin C -$

$\sin B)$ 及正弦定理, 得 $(a - \frac{1}{2}b)a = (c + b)(c - b)$,

整理, 得 $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{ab}{2}$, ② 由余弦定理的推论

可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{4}$. 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

把①代入②, 整理, 得 $a^2 + b^2 + \frac{ab}{2} = 4$, 又 $a^2 + b^2 \geq$

$2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立, 所以 $4 \geq 2ab + \frac{ab}{2} = \frac{5ab}{2}$, 故得 $ab \leq \frac{8}{5}$. 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C \leq$

$\frac{1}{2} \times \frac{8}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{5}$. 即 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

17. 解: (1) $\because A$ 为 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

可得 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

$$\text{则 } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = 2\mathbf{a} - \frac{5}{3}\mathbf{b}.$$

(2) 由 (1), 得 $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{DC} = (2k + 1)\mathbf{a} - \frac{5}{3}k\mathbf{b}$.

$\because \overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{DC}$ 共线,

设 $\overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{DC})$,

$$\text{即 } 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \lambda(2k + 1)\mathbf{a} - \frac{5}{3}\lambda k\mathbf{b},$$

根据平面向量基本定理, 得 $\begin{cases} 2 = \lambda(2k + 1), \\ -1 = -\frac{5}{3}\lambda k. \end{cases}$

解得 $k = \frac{3}{4}$.

18. 解: (1) 原式可化为: $\sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin A \cos B + \cos A \sin B = 2\cos A \sin B$.

$\because B \in (0, \pi)$,

$\therefore \sin B > 0$.

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}.$$

又 $A \in (0, \pi)$,

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由余弦定理, 得 $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$.

$\because |\overrightarrow{BC}| = 7$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 20,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 89.$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 89 + 40 = 129,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{129}.$$

19. 解: (1) 由题意, 得 $\overrightarrow{CA} = (m - 2, -2)$, $\overrightarrow{CB} = (-1, -3)$.

于是 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (m - 3, -5)$.

$$\text{所以 } |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = \sqrt{(m - 3)^2 + 25} \geq 5.$$

所以 $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ 的最小值为 5.

此时 $m = 3$.

(2) 设 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{-m + 8}{\sqrt{(m - 2)^2 + 4} \times \sqrt{10}}.$$

$$\text{所以 } \frac{-m+8}{\sqrt{(m-2)^2+4} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

化简, 得 $m^2 + 8m - 48 = 0$,

解得 $m=4$ 或 $m=-12$.

20. 解: (1) $\because 0 < A < \pi, \therefore \sin A > 0$,

$$\text{则 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}.$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times bc \times \frac{4}{5} = 3,$$

$$\therefore bc = \frac{15}{2}.$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = bc \cos A = \frac{15}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{2}.$$

$$(2) \because \vec{m} = \left(2\sin \frac{B}{2}, 1 \right), \vec{n} = \left(\cos B, \cos \frac{B}{2} \right), \text{且}$$

$\vec{m} \parallel \vec{n}$,

$$\therefore 2\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos B, \text{即 } \sin B = \cos B.$$

$$\therefore \tan B = 1.$$

$$\because 0 < B < \pi,$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore A + C = \frac{3}{4}\pi.$$

$$\therefore \sin 2C = \sin \left[2\left(\frac{3\pi}{4} - A \right) \right] = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2A \right) =$$

$$-\cos 2A = 1 - 2\cos^2 A = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{7}{25},$$

$$\cos 2C = \cos \left[2\left(\frac{3\pi}{4} - A \right) \right] = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - 2A \right) =$$

$$-\sin 2A = -2\sin A \cos A = -2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}.$$

$$\therefore \sin (B - 2C) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2C \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2C -$$

$$\sin 2C) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{24}{25} - \frac{7}{25} \right) = -\frac{31\sqrt{2}}{50}.$$

21. 解: (1) $\because 2S + \sqrt{3} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$,

$$\therefore 2 \times \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A + \sqrt{3} c \cdot b \cdot \cos A = 0.$$

$$\text{又 } b \cdot c > 0,$$

$$\therefore \sin A + \sqrt{3} \cos A = 0, \text{即 } \tan A = -\sqrt{3}.$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$$\text{又 } a = \sqrt{7}, b = 1, A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore c^2 + c - 6 = 0,$$

$$\text{又 } c > 0, \therefore c = 2.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

又 $A = \frac{2}{3}\pi$, $\therefore B$ 为锐角,

$$\therefore \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

$$\therefore AD \perp AB,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } \frac{AB}{BD} = \cos B, \frac{AD}{BD} = \sin B.$$

$$\therefore BD = \frac{AB}{\cos B} = 2 \times \frac{14}{5\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{5},$$

$$AD = BD \cdot \sin B = \frac{4\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的周长 } AB + AD + BD = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{5} +$$

$$\frac{4\sqrt{7}}{5} = \frac{10 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{7}}{5}.$$

22. 解: (1) 由 $a \sin 2B = b \sin A$,

$$\text{得 } \sin A \sin 2B = \sin B \sin A,$$

$$\therefore 2\sin A \sin B \cos B = \sin B \sin A.$$

$$\text{则 } \cos B = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由余弦定理 } b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{得 } 7 = c^2 + 9 - 2c \times 3 \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{即 } c^2 - 3c + 2 = 0.$$

$$\text{解得 } c = 1 \text{ 或 } c = 2.$$

$$\text{当 } c = 1 \text{ 时, } b^2 + c^2 - a^2 = 7 + 1 - 9 = -1 < 0,$$

$$\cos A < 0, \text{即 } A \text{ 为钝角,}$$

$$\therefore c = 2.$$

$$(2) \text{由 (1), 得 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3} - A.$$

$$\therefore \frac{a \cos C - c \cos A}{b} = \frac{\sin A \cos C - \cos A \sin C}{\sin B} =$$

$$\frac{\sin (A - C)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(2A - \frac{2\pi}{3} \right).$$

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} < 2A - \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \left(2A - \frac{2\pi}{3} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore -1 < \frac{a \cos C - c \cos A}{b} < 1.$$

故 $\frac{a \cos C - c \cos A}{b}$ 的取值范围是 $(-1, 1)$.

第六章 平面向量及其应用(B卷)

1. C 解析: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. 故选 C.

2. B 解析: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, 可得 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. 解得 $BC = 3\sqrt{2}$. 故选 B.

3. B 解析: 对于选项 A, $|a| = |b|$ 仅表示 a 与 b 的大小相等, 但是方向不确定, 故 $a = \pm b$ 未必成立, 所以 A 错误;

对于选项 B, 根据零向量的定义可判断 B 正确;

对于选项 C, 长度相等的向量方向不一定相同, 故 C 错误;

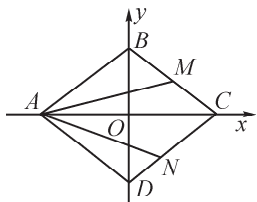
对于选项 D, 共线向量不一定在同一条直线上, 也可以平行, 故 D 错误. 故选 B.

4. B 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B = 3 + c^2 - \sqrt{3}c = 9$. $\therefore c^2 - \sqrt{3}c - 6 = 0$. 解得 $c = 2\sqrt{3}$ 或 $c = -\sqrt{3}$ (舍去). $\therefore c = 2\sqrt{3}$. 故选 B.

5. C 解析: 因为 $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$, 所以 $||\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AB}|| \leq |\overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AB}|$, 即 $3 \leq |\overrightarrow{BC}| \leq 13$. 故选 C.

6. A 解析: 因为 $BC = 4$, $|AB| = 2|AC|$, 所以 $\begin{cases} |AB| + |AC| > 4, \\ |AB| - |AC| < 4, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2|AC| + |AC| > 4, \\ 2|AC| - |AC| < 4. \end{cases}$ 解得 $\frac{4}{3} < |AC| < 4$. 又因为 $\cos \angle CAB = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAB = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} = \frac{5|AC|^2 - 16}{2}$. 因为 $\frac{4}{3} < |AC| < 4$, 所以 $\frac{16}{9} < |AC|^2 < 16$, 所以 $-\frac{32}{9} < \frac{5|AC|^2 - 16}{2} < 32$. 即 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \in (-\frac{32}{9}, 32)$. 故选 A.

7. D 解析: 作出图形, 建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $N(x, y)$, 因为 $AC = 2\sqrt{3}$, $\angle ABC = 120^\circ$, 所以 $BO = 1$. 因为 $\overrightarrow{BM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$, 所以 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 即

M 是 BC 的中点. 所以 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$,

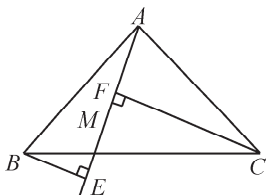
$D(0, -1)$, $C(\sqrt{3}, 0)$. 所以 $\overrightarrow{AM} = (\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DC} =$

$(\sqrt{3}, 1) = \lambda \overrightarrow{DN} = \lambda(x, y + 1)$. 由题知 $\lambda \neq 0$. 故

$N(\frac{\sqrt{3}}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} - 1)$. 所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{5}{\lambda} + 4 = 29$. 所以

$\lambda = \frac{1}{5}$. 故选 D.

8. B 解析: 因为过 $\triangle ABC$ 内一点 M 任作一条直线, 可将此直线特殊为过点 A , 则 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$. 如图所示.



则直线 AM 经过 BC 的中点. 同理可得直线 BM 经过 AC 的中点, 直线 CM 经过 AB 的中点, 所以点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心. 故选 B.

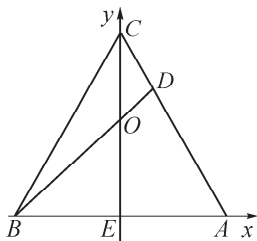
9. CD 解析: 对于 A 选项, 若 a 与 b 的夹角为钝角, 则 $a \cdot b < 0$ 且 a 与 b 不共线, 则 $k - 2 < 0$ 且 $k \neq -2$, 解得 $k < 2$ 且 $k \neq -2$, 所以 A 选项正确.

对于 B 选项, $|a| = \sqrt{k^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2$, 当且仅当 $k = 0$ 时等号成立, 所以 B 选项正确.

对于 C 选项, $|b| = \sqrt{2}$, 与 b 共线的单位向量为 $\pm \frac{b}{|b|}$, 即与 b 共线的单位向量为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 所以 C 选项错误.

对于 D 选项, 因为 $|a| = 2|b| = 2\sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{k^2 + 4} = 2\sqrt{2}$. 解得 $k = \pm 2$. 所以 D 选项错误. 故选 CD.

10. BCD 解析: 由题意, 得 E 为 AB 的中点, 则 $CE \perp AB$. 以 E 为原点, EA, EC 分别为 x 轴, y 轴的正方向建立平面直角坐标系, 如图所示.



则 $E(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$,
 $D(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$. 设 $O(0, y)$, $y \in (0, \sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{BO} = (1, y)$, $\overrightarrow{DO} = (-\frac{1}{3}, y - \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 因为 $\overrightarrow{BO} \parallel$

$\overrightarrow{DO}$, 所以 $y - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3}y$, 解得 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 即 O 是

CE 的中点, $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 所以选项 B 正确. 因为

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |2\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OE}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以选项 C 正确.

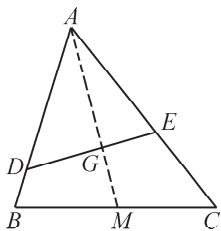
因为 $CE \perp AB$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$, 所以选项 A 错误.

因为 $\overrightarrow{ED} = (\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $\overrightarrow{BC} = (1, \sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{ED}$ 在

$\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影为 $\frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{2} = \frac{7}{6}$. 所以

选项 D 正确. 故选 BCD.

11. ABC 解析: 连接 AG 并延长交 BC 于点 M , 如图所示.



因为点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 M 是边 BC 的中

点, 且 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. 又 D, G, E 三点共线, 即 $\overrightarrow{DG} =$

$t\overrightarrow{DE}$ ($0 < t < 1$), 则有 $\overrightarrow{AG} = (1-t)\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AE}$.

因为 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = n\overrightarrow{AC}$, 又 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} +$

$\overrightarrow{AC})$, 所以 $(1-t)m\overrightarrow{AB} + tn\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线, 所以 $(1-t)m = \frac{1}{3}$, $tn = \frac{1}{3}$. 则

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3(1-t) + 3t = 3, \text{ 故 A 正确.}$$

$\triangle ADE$ 边 AD 上的高为 $AE \sin \angle BAC$, $\triangle ABC$ 边

AB 上的高为 $AC \sin \angle BAC$, 则 $\frac{S_1}{S_2} =$
 $\frac{\frac{1}{2}AD \cdot AE \sin \angle BAC}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = mn$, 故 B 正

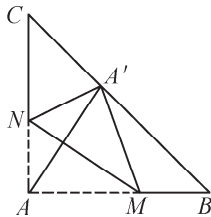
确. 由 A 可知, $1 = \frac{1}{3m} + \frac{1}{3n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{3m} \cdot \frac{1}{3n}}$, 当且仅

当 $m = n = \frac{2}{3}$ 时取“=”, 则有 $mn \geq \frac{4}{9}$. 即 $\frac{S_1}{S_2} \geq \frac{4}{9}$,

而 $\frac{S_1}{S_2} < 1$, 于是得 $\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_1}{S_2 - S_1} = \frac{S_2}{S_2 - S_1} - 1 =$
 $\frac{1}{1 - \frac{S_1}{S_2}} - 1 \geq \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$, 故 C 正确, D 错误. 故

选 ABC.

12. ABD 解析: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 4$, 所以 $AB = AC = 2\sqrt{2}$.



如图所示, 在翻折过程中有 $AM = A'M$. 设 $AM = A'M = x$, 则 $BM = 2\sqrt{2} - x$. 设 $\angle A'AM = \angle AA'M = \theta$, 则 $\angle A'MB = 2\theta$, $\angle MA'B = 180^\circ - 2\theta - 45^\circ = 135^\circ - 2\theta$. 在 $\triangle BA'M$ 中, 由正弦定理可得

$$\frac{MB}{\sin \angle MA'B} = \frac{A'M}{\sin B}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{2} - x}{\sin(135^\circ - 2\theta)} = \frac{x}{\sin 45^\circ}.$$

$$\therefore \begin{cases} 0^\circ < \theta < 90^\circ, \\ 2\theta \leq 135^\circ, \end{cases} \therefore 0^\circ < 2\theta \leq 135^\circ. \therefore 135^\circ - 2\theta \in [0^\circ, 135^\circ).$$

$\therefore \sqrt{2} + 2\sin(135^\circ - 2\theta) \in [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 2]$. 则

$$x = \frac{4}{\sqrt{2} + 2\sin(135^\circ - 2\theta)} \in \left[\frac{4}{\sqrt{2} + 2}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right], \text{ 即 } x \in$$

$[4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$. 只有 $4 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 不在范围内. 故

选 ABD.

13. $\frac{1}{2}$ 解析: 单位向量 a 在 b 上的投影为

$$|a| \cos 60^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

14. $\frac{2}{3}$ 解析: 因为 $c = 2a - \sqrt{5}b$, $a \cdot b = 0$, 所以 $a \cdot$

$$c = 2a^2 - \sqrt{5}a \cdot b = 2, |c|^2 = 4|a|^2 - 4\sqrt{5}a \cdot b + 5|b|^2 = 9. \text{ 所以 } |c| = 3. \text{ 所以 } \cos \langle a, c \rangle =$$

$$\frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}.$$

15. $\frac{4}{5}$ 解析: 设 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 因为 $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DB}$, 所

以 $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}b$. 由于点 C 是点 B 关于点 A 的对称

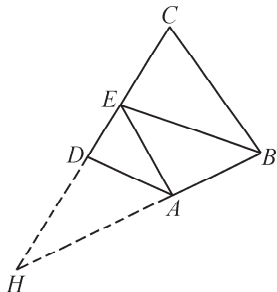
点, 则 A 为 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$,

则 $\overrightarrow{OC} = 2a - b$. 所以 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = 2a - \frac{5}{3}b$. 由

于 $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = (2 - \lambda)a - b$, 又 $\overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{DC}$, 所以

$$\frac{2 - \lambda}{2} = \frac{1}{\frac{5}{3}}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{4}{5}.$$

16. $\frac{21}{16}$ 解析:如图所示,延长 CD , BA 相交于点 H .



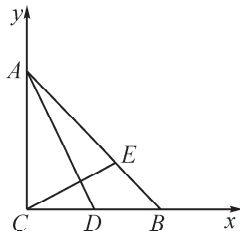
因为 $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, 所以 $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle DHA = 30^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle ADH$ 中, $\angle DHA = 30^\circ$, $AD = 1$, 所以 $AH = 2$, $DH = \sqrt{3}$. 在 $\text{Rt} \triangle BCH$ 中, $\angle CHB = 30^\circ$, $BH = AB + AH = 3$, 所以 $CH = 2\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{3}$, $DC = CH - DH = \sqrt{3}$, 所以 $DC = BC$. 不妨设 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{3}\lambda$, 且 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 30° , $\overrightarrow{DA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 60° , 则 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + |\overrightarrow{DA}|^2 + |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \frac{\pi}{3} + 3\lambda^2 - 0 - |\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} + 3\lambda^2 - 0 - \sqrt{3}\lambda \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2} = 3\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{16}$. 所以当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$ 取最小值 $\frac{21}{16}$.

17. 解: (1) $\because |a| = 2, |b| = 1, (a - 3b) \cdot (a + b) = 3$,
 $\therefore 2^2 - 3 \times 1^2 - 2a \cdot b = 3$,
 解得 $a \cdot b = -1$.
 故 $|a + b| = \sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{2^2 + 2 \times (-1) + 1^2} = \sqrt{3}$.
 (2) 设 a 与 $a - 2b$ 的夹角为 θ ,
 则 $\cos \theta = \frac{a \cdot (a - 2b)}{|a| |a - 2b|} = \frac{2^2 - 2 \times (-1)}{2 \sqrt{(a - 2b)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 4 \times 1^2 - 4 \times (-1)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 又 $\theta \in [0, \pi]$,
 $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$.

18. 解: (1) $\because \overrightarrow{CA} = a, \overrightarrow{CD} = b$, 点 D 是 CB 的中点,
 $\therefore \overrightarrow{CB} = 2b$.
 $\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = 2b - a$.
 $\therefore \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = a + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = a + \frac{1}{2} (2b - a) =$

$$\frac{1}{2}a + b.$$

(2) 以点 C 为坐标原点, 分别以 CB, CA 为 x 轴, y 轴, 建立如图所示平面直角坐标系.



设 $A(0, a)$, 则点 B 的坐标为 $(a, 0)$,
 设点 E 的坐标为 (x, y) ,
 $\because$ 点 D 是 CB 的中点,
 $\therefore$ 点 D 的坐标为 $(\frac{a}{2}, 0)$.
 又 $\because \overrightarrow{AE} = 2 \overrightarrow{EB}$,
 $\therefore (x, y - a) = 2(a - x, -y)$.
 $\therefore x = \frac{2a}{3}, y = \frac{a}{3}$.
 则 $\overrightarrow{AD} = (\frac{a}{2}, -a), \overrightarrow{CE} = (\frac{2a}{3}, \frac{a}{3})$.
 $\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{a}{2} \times \frac{2a}{3} + (-a) \times \frac{a}{3} = 0$.

19. 解: (1) 因为点 E 是 AB 的中点,
 所以 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}a$.
 因为 $AF = \frac{2}{3}AD, BG = \frac{2}{3}BC$,
 所以 $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}b$.
 所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}a$,
 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b$.
 (2) 由 (1) 可得 $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}a, \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b$.
 因为 $|a| = \frac{4}{3}|b|$,
 所以 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = (\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}a) \cdot (\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b) = \frac{4}{9}|b|^2 - \frac{1}{4}|a|^2 = \frac{4}{9}|b|^2 - \frac{1}{4}(\frac{4}{3}|b|)^2 = 0$.
 所以 $EF \perp EG$.

20. 解: (1) $\because \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \angle D = 2\angle B$,
 $\therefore \cos D = \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.
 $\therefore AD = 1, CD = 3$,

∴由余弦定理,得 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos D = 1 + 9 - 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 12$.

∵ $AC > 0$,

∴ $AC = 2\sqrt{3}$.

(2)若 $BC = \sqrt{6}$, 在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得

$$\cos B = \frac{AB^2 + 6 - 12}{2\sqrt{6} \times AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解得 $AB = 3\sqrt{2}$ 或 $AB = -\sqrt{2}$ (舍去),

$$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 3\sqrt{2}.$$

$$\therefore \cos D = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin D = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{故 } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \times DC \times \sin D = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

∴花卉种植区域的总面积为 $3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

21. 解: (1) 因为 $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$,

所以 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B - \sin C = 0$,

因为 $B = \pi - (A + C)$,

所以 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin(A + C) - \sin C = 0$.

所以 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin A \cos C - \cos A \sin C - \sin C = 0$,

即 $\sqrt{3} \sin A \sin C - \cos A \sin C - \sin C = 0$.

因为 $\sin C \neq 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$.

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A - \frac{1}{2} \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } \left(A - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3}.$$

因为 $a = \sqrt{21}$, $b = \sqrt{3}$,

所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

$$\text{即 } 21 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3}c \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } c^2 - \sqrt{3}c - 18 = 0.$$

解得 $c = -2\sqrt{3}$ (舍去) 或 $c = 3\sqrt{3}$.

所以 $c = 3\sqrt{3}$.

(2)由(1)可知 $A = \frac{\pi}{3}$.

由于等边 $\triangle DEF$ 面积的最大值为 $7\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{\sqrt{3}}{4} DE^2 = 7\sqrt{3}, \text{ 解得 } DE = 2\sqrt{7}.$$

所以 DE 的最大值为 $2\sqrt{7}$,

因为 $\angle CAB = 60^\circ$,

所以 $\angle DAC + \angle BAE = 120^\circ$.

因为 $\angle DAC + \angle ACD = 120^\circ$,

所以 $\angle ACD = \angle BAE$.

设 $\angle ACD = \angle BAE = \alpha$,

则 $\angle ABE = 120^\circ - \alpha$.

在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理,得 $\frac{AC}{\sin D} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$.

因为 $b = AC = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{AD}{\sin \alpha}.$$

$$\text{则 } AD = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \cdot \sin \alpha.$$

在 $\triangle ABE$ 中,由正弦定理,得 $\frac{AB}{\sin E} = \frac{AE}{\sin \angle ABE}$.

$$\text{所以 } \frac{c}{\sin 60^\circ} = \frac{AE}{\sin (120^\circ - \alpha)},$$

$$\text{解得 } AE = \frac{c}{\sin 60^\circ} \cdot \sin (120^\circ - \alpha),$$

所以 $DE = AD + AE$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \sin \alpha + \frac{c}{\sin 60^\circ} \sin (120^\circ - \alpha)$$

$$= \frac{1}{\sin 60^\circ} [\sqrt{3} \sin \alpha + c \sin (120^\circ - \alpha)]$$

$$= \frac{1}{\sin 60^\circ} (\sqrt{3} \sin \alpha + c \sin 120^\circ \cos \alpha - c \cos 120^\circ \sin \alpha)$$

$$= \frac{1}{\sin 60^\circ} \left[\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}c \right) \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} c \cos \alpha \right]$$

$$= \frac{1}{\sin 60^\circ} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}c \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c \right)^2} \sin(\alpha + \theta),$$

$$\text{其中 } \tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\sqrt{3} + \frac{1}{2}c}.$$

所以当 $\sin(\alpha + \theta) = 1$ 时, DE 取得最大值,

$$\text{所以 } \frac{1}{\sin 60^\circ} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}c \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c \right)^2} = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{所以 } \sqrt{c^2 + \sqrt{3}c + 3} = \sqrt{21},$$

$$\text{所以 } c^2 + \sqrt{3}c + 3 = 21, \text{ 即 } c^2 + \sqrt{3}c - 18 = 0.$$

$$\text{解得 } c = 2\sqrt{3} \text{ 或 } c = -3\sqrt{3} \text{ (舍去).}$$

$$\text{所以 } c = 2\sqrt{3}.$$

$$22. \text{ 解: (1) 由正弦定理及 } \frac{2\sin A - \sin C}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2},$$

$$\text{得 } \frac{2a - c}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2},$$

$$\text{即 } \frac{2a}{c} - 1 = \frac{2a^2 - a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{2a^2}{a^2 + c^2 - b^2} - 1.$$

$$\therefore \frac{2a}{c} = \frac{2a^2}{a^2 + c^2 - b^2}.$$

$$\text{则 } a^2 + c^2 - b^2 = ac,$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \text{ 故 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } A + C = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{故 } \sin A + \sin C = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \sin A +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A = \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A =$$

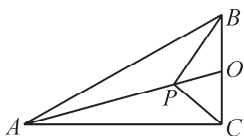
$$\sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{又 } 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right],$$

$$\therefore \sin A + \sin C \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right].$$

(3) 如图所示.



$$\therefore \vec{BP} \cdot \vec{CP} = 0,$$

$$\therefore PB \perp PC.$$

$$\therefore BC = 2, O \text{ 为 } BC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore PO = \frac{1}{2} BC = 1.$$

$$\text{由 (1) 知 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{3}, AB = 4.$$

$$\therefore AO = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore AP = \sqrt{13} - 1.$$

$$\text{设 } \angle OCP = \alpha, \text{ 则 } \angle COP = \pi - 2\alpha.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{PB}{BC} = \frac{1}{2} PB,$$

$$\cos \alpha = \frac{PC}{BC} = \frac{1}{2} PC,$$

$$\therefore S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} PB \times PC = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

$$\therefore \text{在直角 } \triangle ACO \text{ 中, } \sin \angle COA = \sin(\pi - 2\alpha) =$$

$$\sin 2\alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13},$$

$$\therefore AP = \sqrt{13} - 1, \triangle BPC \text{ 的面积为 } \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

第七章 复数

1. D 解析: $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. 故选 D.

2. B 解析: 因为 $z_1 = 1 + 2i$ 对应的点为 $(1, 2)$, z_1, z_2 所对应的点关于虚轴对称, 所以 z_2 对应的点为 $(-1, 2)$, 所以 $z_2 = -1 + 2i$. 故选 B.

3. C 解析: 由复数的几何意义知: $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 1 + i$, 则 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 对应的点的坐标为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, 位于第三象限, 故选 C.

4. B 解析: $\because z = i^{2020} + 2i^{2021} + 3i^{2022} = (i^2)^{1010} + 2(i^2)^{1010} \cdot i + 3(i^2)^{1011} = -2 + 2i, \therefore \bar{z} = -2 - 2i$, $\therefore \bar{z}$ 的虚部为 -2 . 故选 B.

5. B 解析: 因为 $z_1 = m + 3i$, 所以 $z_2 = z_1 + 4 - ni = m + 3i + 4 - ni = (m + 4) + (3 - n)i$. 因为 z_2 为纯虚数, $|z_2| = 1$, 所以

$$\begin{cases} m + 4 = 0, \\ 3 - n \neq 0, \\ \sqrt{(m+4)^2 + (3-n)^2} = 1. \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} m = -4, \\ n = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = -4, \\ n = 4. \end{cases} \text{ 所以 } m + n = -2 \text{ 或 } m + n =$$

0. 故选 B.

6. B 解析: 因为 $\frac{a+2i}{i} = \frac{-ai-2i^2}{-i^2} = 2 - ai = b + i, a,$

$$b \in \mathbf{R}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2 = b, \\ -a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2, \\ a = -1, \end{cases} \text{ 则 } a + b = 1. \text{ 故}$$

选 B.

7. C 解析: 由题意, 知 $z = 1 + bi (b \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = 1 - bi$. 因为 $|z - \bar{z}| = 2|z + \bar{z}|$, 所以 $2|b| = 4$, 解得 $b = \pm 2$. 所以 $z = 1 \pm 2i$. 故选 C.

8. C 解析: 设 $z_1 = a + bi, (a, b \in \mathbf{R})$, 因为 $|z_1| = 2$, 所以 $a^2 + b^2 = 4$. 因为复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 $Z_1, Z_2, z_2 = 3i$, 所以 $Z_1(a, b), Z_2(0, 3)$, 所以 $|Z_1 Z_2| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{13 - 6b}$. 易

知 $-2 \leq b \leq 2$. 故当 $b = -2$ 时, $|Z_1 Z_2|$ 取得最大值 $\sqrt{13+12}=5$. 故选 C.

9. BC 解析: $\because$ 当 $n=4k (k \in \mathbf{N})$ 时, $i^n = 1$; 当 $n=4k+1 (k \in \mathbf{N})$ 时, $i^n = i$; 当 $n=4k+2 (k \in \mathbf{N})$ 时, $i^n = -1$; 当 $n=4k+3 (k \in \mathbf{N})$ 时, $i^n = -i$. $\therefore M = \{-1, 1, i, -i\}$.

选项 A 中, $(1-i)(1+i) = 2 \notin M$;

选项 B 中, $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i \in M$;

选项 C 中, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \in M$;

选项 D 中, $(1-i)^2 = -2i \notin M$. 故选 BC.

10. BCD 解析: 因为 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\pi < 2\theta < \pi$.

所以 $-1 < \cos 2\theta \leq 1$. 所以 $0 < 1 + \cos 2\theta \leq 2$. 所以

选项 A 错误. 当 $\sin 2\theta = 0, \theta = 0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时,

复数 z 是实数, 故选项 B 正确. $|z| = \sqrt{(1+\cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2} = \sqrt{2+2\cos 2\theta} = 2\cos \theta$, 故选项 C 正确.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta} =$$

$$\frac{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{(1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta)} =$$

$$\frac{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{2+2\cos 2\theta}, \text{ 则 } \frac{1}{z} \text{ 的实部是 } \frac{1+\cos 2\theta}{2+2\cos 2\theta} =$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 故选项 D 正确. 故选 BCD.}$$

11. ABCD 解析: 对于选项 A, 设 $a = i^{n_1}, b = i^{n_2} (n_1, n_2 \in \mathbf{Z})$, 则 $a \oplus b = ab = i^{n_1+n_2}$. $\because n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$, $\therefore n_1+n_2 \in \mathbf{Z}$, 所以 $i^{n_1+n_2} \in X$, 即 $a \oplus b \in X$, 故 A 正确. 对于选项 B, $\forall a, b \in X$, 则 $a \cdot \bar{a} = 1, b \cdot \bar{b} = 1$, 故 $\frac{a\bar{a}}{b\bar{b}} = 1$, 即 $(\frac{a}{b}) \cdot (\frac{\bar{a}}{\bar{b}}) = 1, \therefore \frac{a}{b} \in X$, 即 $a \oplus b \in X$, 故 B 正确. 对于选项 C, $\forall a, b \in X$, 则 $|a| \leq 1, |b| \leq 1, \therefore |a \cdot b| = |a| |b| \leq 1$, 即 $a \cdot b \in X$, 即 $a \oplus b \in X$, 故 C 正确. 对于选项 D, 由于在复数范围内, $|\bar{x}| = |x|, |\bar{y}| = |y|$, 所以由 $|\bar{x}| + |\bar{y}| \leq |x-y| \Leftrightarrow |x| + |y| \leq |x-y|$. 由复数的模的不等式得到存在实数 $k \leq 0$, 使得 $x = ky (k \leq 0)$, 又 $y = 1+i$, 于是 $x \in X \Leftrightarrow$ 存在实数 $k \leq 0$, 使得 $x = k(1+i), \forall a, b \in X, a = k(1+i), b = k'(1+i) (k \leq 0, k' \leq 0)$, 所以 $a \oplus b = a+b = (k+k')(1+i)$, 因为 $k \leq 0, k' \leq 0$, 所以 $k+k' \leq 0$, 即 $a \oplus b \in X$, 故 D 正确. 故选 ABCD.

12. BC 解析: 对于选项 A, 取 $z_2 = 1, z_3 = i$, 满足 $|z_2| = |z_3|$, 但是 $z_2 = \pm z_3$ 不成立, 故 A 错误. 对于选项 B, 当 $z_1 z_2 = z_1 z_3$ 时, 有 $z_1 (z_2 - z_3) = 0$,

又 $z_1 \neq 0$, 所以 $z_2 = z_3$, 故 B 正确.

对于选项 C, 当 $z_2 = z_3$ 时, 则 $z_2 = \bar{z}_3$.

所以 $|z_1 z_2|^2 - |z_1 z_3|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) - (z_1 z_3)(\overline{z_1 z_3}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 - z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3 = 0$, 故 C 正确.

对于选项 D, 当 $z_1 z_2 = |z_1|^2$ 时, 则 $z_1 z_2 = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1$, 可得 $z_1 z_2 - z_1 \bar{z}_1 = z_1 (z_2 - \bar{z}_1) = 0$.

因为 $z_1 \neq 0$, 所以 $z_1 = \bar{z}_2$. 故 D 错误. 故选 BC.

13. $\sqrt{2}$ 解析: 由题意, 复数 z 满足 $z(1+i) = 2i$, 则

$$z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i \cdot (1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i+2}{2} = 1+i, \text{ 所以}$$

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

14. $-2-i$ 解析: 由题图可知 $z_1 = -1+2i$. 由 $\frac{z_2}{z_1} = i$,

$$\text{得 } z_2 = z_1 i = (-1+2i)i = -2-i.$$

15. 4 解析: 由 $\frac{x}{1-i} + \frac{y}{1-2i} = \frac{x(1+i)}{2} +$

$$\frac{y(1+2i)}{5} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{2y}{5}\right)i, \text{ 而 } \frac{5}{1-3i} =$$

$$\frac{5(1+3i)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \text{ 所以 } \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{1}{2} \text{ 且 } \frac{x}{2} +$$

$$\frac{2y}{5} = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } x = -1, y = 5, \text{ 所以 } x+y = 4.$$

16. $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 或 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 解析: $(x-1)(x^2+ax+1) \cdot$

$$(x^2+bx+1) = (x-1)[x^4 + (a+b)x^3 + (2+ab)x^2 + (a+b)x + 1],$$

$$\text{对比系数得 } \begin{cases} a+b=1, \\ ab+2=1. \end{cases} \text{ 解得 } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b =$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{ 所以原方程的虚根为}$$

$$\frac{-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}}i}{4}, \frac{-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{10+2\sqrt{5}}i}{4},$$

$$\text{故原方程的一个虚根的实部为 } \frac{-1-\sqrt{5}}{4},$$

$$\text{或 } \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

17. 解: (1) $z = (1+i)^2 + \frac{2i}{1-i} = 2i + i(1+i) = -1+3i$,

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}.$$

$$(2) \text{ 由 } z^2 + a\bar{z} + b = 2+3i,$$

$$\text{得 } (-1+3i)^2 + a(-1-3i) + b = 2+3i,$$

$$\text{即 } (-8-a+b) + (-6-3a)i = 2+3i.$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -8-a+b=2, \\ -6-3a=3. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=-3, \\ b=7. \end{cases}$$

18. 解: (1) 设 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$,

由 $z-3i=a+(b-3)i$ 为实数,

得 $b-3=0$, 即 $b=3$.

$$\therefore \frac{z-5i}{2-i} = \frac{a-2i}{2-i} = \frac{(a-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2a+2+(a-4)i}{5} \text{ 为纯虚数,}$$

$$\therefore 2a+2=0, a-4 \neq 0, \text{ 即 } a=-1.$$

$$\therefore z=-1+3i.$$

$$(2) \therefore \frac{z}{1-i} = \frac{-1+3i}{1-i} = \frac{(-1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i,$$

$$\therefore \left| \frac{z}{1-i} \right| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}.$$

19. 解: (1) 因为 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$,

所以 $\overrightarrow{OB}$ 所对应的复数 $z_1 = (2+i) + (-1+3i) = 1+4i$.

所以 $\overrightarrow{OB} = (1, 4)$,

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}.$$

因为 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$,

所以 $\overrightarrow{CA}$ 所对应的复数 $z_2 = (2+i) - (-1+3i) = 3-2i$.

所以 $\overrightarrow{CA} = (3, -2)$,

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}.$$

(2) 由题意可知 $\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 的夹角为 θ .

因为 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = (2, 1)$,

$\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC} = (1, -3)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO} = 2 \times 1 + 1 \times (-3) = -1,$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},$$

$$|\overrightarrow{CO}| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{所以 } \cos \theta = \cos \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO} \rangle = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO}}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CO}|} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

20. 解: (1) 设 x_0 是其实根, 代入原方程变形为 $x_0^2 + 2ax_0 + 1 - (a+x_0)i = 0$.

由复数相等的定义, 得 $\begin{cases} x_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0, \\ a + x_0 = 0. \end{cases}$

解得 $a = \pm 1$.

(2) 由题意, 得 $\bar{z} = (m^2 + m - 2) - (2m^2 - m - 3)i$.

$$\therefore \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0, \\ -(2m^2 - m - 3) > 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0, \\ 2m^2 - m - 3 < 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } 1 < m < \frac{3}{2}.$$

故实数 m 的取值范围为 $(1, \frac{3}{2})$.

21. 解: $\because |z_1| > |z_2|$,

$$\therefore x^4 + x^2 + 1 > (x^2 + a)^2.$$

$$\therefore (1-2a)x^2 + (1-a^2) > 0 \text{ 对 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立.}$$

① 当 $1-2a=0$, 即 $a=\frac{1}{2}$ 时, $\frac{3}{4} > 0$, 不等式恒成立.

$$\text{② 当 } 1-2a \neq 0 \text{ 时, } \begin{cases} 1-2a > 0, \\ -4(1-2a)(1-a^2) < 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } -1 < a < \frac{1}{2}.$$

综上所述, a 的取值范围为 $(-1, \frac{1}{2}]$.

22. (1) 解: 设 $z=a+bi, a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$,

$$\text{则 } \omega = a + bi + \frac{1}{a+bi} = \left(a + \frac{a}{a^2+b^2}\right) +$$

$$\left(b - \frac{b}{a^2+b^2}\right)i.$$

$$\therefore -1 < \omega < 2,$$

$\therefore \omega$ 是实数,

又 $b \neq 0$,

$$\therefore a^2 + b^2 = 1, \text{ 即 } |z| = 1.$$

$$\therefore \omega = 2a.$$

$$\text{则 } -1 < 2a < 2,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < a < 1.$$

$\therefore z$ 的实部的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 1)$.

$$(2) \text{ 证明: } \because u = \frac{1-\bar{z}}{1+z} = \frac{1-a-bi}{1+a+bi} = \frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2} = -\frac{b}{a+1}i,$$

$$\text{又 } a \in (-\frac{1}{2}, 1), b \neq 0,$$

$\therefore u$ 为纯虚数.

$$(3) \text{ 解: } \because \omega - u^2 = 2a + \frac{b^2}{(a+1)^2} = 2a - \frac{a-1}{a+1} = 2a -$$

$$1 + \frac{2}{a+1} = 2 \left[(a+1) + \frac{1}{a+1} \right] - 3,$$

$$\text{又 } a \in (-\frac{1}{2}, 1), a+1 > 0,$$

$$\therefore \omega - u^2 \geq 2 \times 2\sqrt{(a+1) \cdot \frac{1}{a+1}} - 3 = 4 - 3 = 1.$$

当且仅当 $a+1 = \frac{1}{a+1}$, 即 $a=0$ 时, 取“=”.

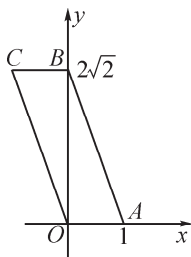
$\therefore \omega - u^2$ 的最小值为 1.

第八章 立体几何初步(A卷)

1. D 解析: 对于 A, 直四棱柱的底面不一定是矩形,

故直四棱柱不一定是长方体,故 A 错误. 对于 B, 两个平面平行, 其余各面是梯形的多面体, 当侧棱延长后不交于同一点时, 就不是棱台, 故 B 错误. 对于 C, 平行六面体一定是棱柱, 故 C 错误. 对于 D, 根据正棱锥的结构特征可知, 正棱锥的侧面是全等的等腰三角形, 故 D 正确. 故选 D.

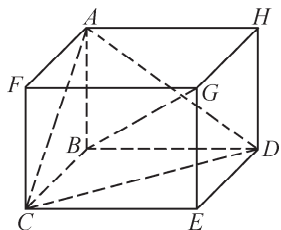
2. C 解析: 原图形如图所示.



$\because AB = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3, \therefore$ 原图形的周长为 $OA + AB + BC + CO = 1 + 3 + 1 + 3 = 8$. 故选 C.

3. B 解析: A 选项, 若 $l \parallel \alpha, m \parallel l$, 则 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$, 所以 A 不正确. B 选项, 若 $l \perp \alpha, l \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$, 所以 B 正确. C 选项, 若 $l \parallel \alpha, m \subset \alpha$, 则 l 与 m 平行或异面, 所以 C 不正确. D 选项, 若 $\alpha \perp \beta, m \parallel \alpha$, 则 m 与 β 的位置关系不确定, 所以 D 不正确. 故选 B.

4. C 解析: 在三棱锥 $B-ACD$ 中, BA, BC, BD 两两垂直, 将该三棱锥补成长方体 $BCED-AFGH$, 如图所示.

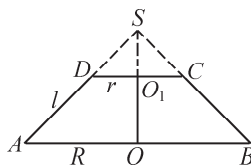


则长方体 $BCED-AFGH$ 的体对角线长为 $BG = \sqrt{BA^2 + BC^2 + BD^2} = 5\sqrt{2}$. 所以三棱锥 $B-ACD$ 的外接球半径 $R = \frac{BG}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 故该三棱锥外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 50\pi$. 故选 C.

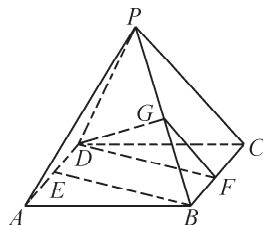
5. A 解析: 设圆台的上、下底面半径分别为 r, R . 母线长为 l , 则由题意可知 $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4}{9}$, 故 $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$. 又母线与底面的夹角是 45° , 则 $\cos 45^\circ = \frac{R-r}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又圆台轴截面的面积为 20, 则 $\frac{1}{2}(2r+2R)(R-r) =$

$$R^2 - r^2 = 20, \text{ 由 } \begin{cases} \frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \\ \frac{R-r}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ R^2 - r^2 = 20, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} R=6, \\ r=4, \\ l=2\sqrt{2}. \end{cases} \text{ 又圆锥}$$

的高为 $OS = R = 6$, 所以圆锥 SO 的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6 = 72\pi$. 故选 A.



6. B 解析: 分别取 BC, PB 的中点 F, G , 连接 DF, FG, DG , 如图所示.

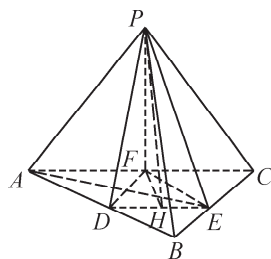


因为 E 为 AD 的中点, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $DF \parallel BE, FG \parallel PC$, 所以 $\angle DFG$ (或其补角) 是异面直线 PC 与 BE 所成的角. 因为底面 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形, 且 $PB = PC = PD = 4, \angle BAD = 60^\circ$,

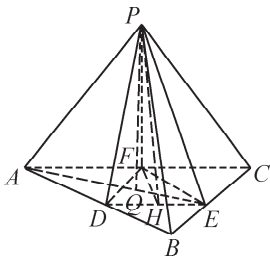
$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cos 60^\circ} = \sqrt{4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}. \text{ 所以 } DF = BE = 2\sqrt{3}, FG = 2, DG = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \text{ 所以 } \cos \angle DFG = \frac{DF^2 + FG^2 - DG^2}{2DF \cdot FG} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

所以异面直线 PC 与 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 故选 B.

7. B 解析: 对于选项 A, 因为 D, E, F 分别是棱 AB, BC, CA 的中点, 所以 $DF \parallel BC$. 又 $DF \subset$ 平面 $PDF, BC \not\subset$ 平面 PDF , 所以 $BC \parallel$ 平面 PDF , 故 A 正确. 对于选项 B, 过 P 作 $PH \perp DE$, 如图所示. 因为平面 $PDE \cap$ 平面 $ABC = DE$, 若平面 $PDE \perp$ 平面 ABC , 则 $PH \perp$ 平面 ABC . 因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PH \perp BC$. 因为 $BC \perp PE, PH \subset$ 平面 $PDE, PE \subset$ 平面 PDE , 所以 $BC \perp$ 平面 PDE . 又 $DE \subset$ 平面 PDE , 所以 $BC \perp DE$. 因为 $BC \perp AE, AE \cap DE = E$, 所以 BC 与 DE 不可能垂直, 矛盾. 故选项 B 不正确.

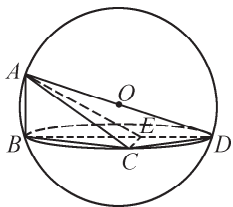


对于选项 D, 设正 $\triangle ABC$ 的中心为 Q , 则点 Q 在 AE 上, 连接 PQ , 如图所示. 由正四面体的性质, 得 $PQ \perp$ 平面 ABC . 又 $DF \subset$ 平面 ABC , 所以 $PQ \perp DF$. 又 $DF \perp AE$, $AE \cap PQ = Q$, 所以 $DF \perp$ 平面 PAE , 故 D 正确.



对于选项 C, 由选项 D 的解析, 得 $DF \perp$ 平面 PAE . 又 $DF \subset$ 平面 PDF , 所以平面 $PDF \perp$ 平面 PAE , 故 C 正确. 所以不正确的选项是 B. 故选 B.

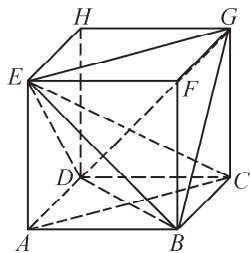
8. B 解析: 如图, 因为 $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, 所以 AD 为球 O 的直径. 由 $AB=2$, $BC=4$, 得 $AC=2\sqrt{5}$.



过点 C 作 $CE \perp BD$, 则 $\angle CAE$ 即为 AC 与平面 ABD 所成角. 所以 $\sin \angle CAE = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{2\sqrt{5}}$.

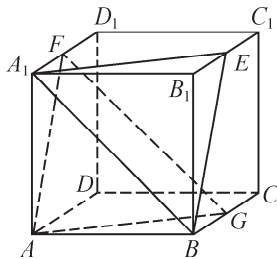
解得 $CE=2\sqrt{2}$. 设 $CD=x$, 由等面积法, 得 $4x=2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+16}$, 解得 $x=4$. 所以 $AD^2=AB^2+BC^2+CD^2=4+16+16=36$, 即 $2R=6$, $R=3$. 又平面 ACD 过球心, 所以点 P 到平面 ACD 距离的最大值为半径的长. 所以点 P 到平面 ACD 距离的最大值为 3. 故选 B.

9. ABD 解析: 画出正方体 $ABCD-EFGH$, 如图所示. 对于选项 A, 每个面都是直角三角形的四面体, 如 $E-ABC$, 所以 A 正确. 对于选项 B, 每个面都是等边三角形的四面体, 如 $E-BGD$, 所以 B 正确. 对于选项 C, 若四面体的每个面都是全等的直角三角形, 则必有直角边等于斜边, 而这样的直角三角形不存在, 所以 C 错误. 对于选项 D, 有三个面为等腰直角三角形, 有一个面为等边三角形的四面体, 如 $A-BDE$, 所以 D 正确. 故选 ABD.

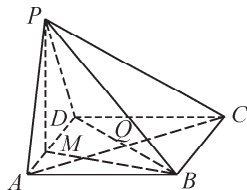


10. AC 解析: 对于选项 A, 正六棱锥的底面边长为 1, 则该正六棱锥的底面积为 $S=6 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 又侧棱长为 $\sqrt{5}$, 则棱锥的高 $h=\sqrt{5-1}=2$. 所以该棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\sqrt{3}$, 故 A 正确. 对于选项 B, 水平放置直观图是边长为 a 的正三角形, 则直观图的面积是 $S'=\frac{1}{2}a^2 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 则原 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2\sqrt{2}S' = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$, 所以 B 错误. 由异面直线所成角可知 C 正确. 已知两个平面垂直, 一个平面内的直线与另一个平面不一定垂直, D 错误. 故选 AC.

11. ABD 解析: 如图, BE 与 CD 异面, A 正确. 依题意可证 $A_1E \parallel AG$, $BE \parallel AF$. 因为 $AG \subset$ 平面 AFG , $A_1E \not\subset$ 平面 AFG , 所以 $A_1E \parallel$ 平面 AFG . 同理可证 $BE \parallel$ 平面 AFG . 因为 $A_1E \cap BE = E$, 所以平面 $A_1BE \parallel$ 平面 AFG , B 正确. 由图可知, 平面 AFG 与平面 $ABCD$ 不垂直, C 错误. 因为 $DD_1 \parallel BB_1$, 所以 BE 与 DD_1 所成的角即为 BE 与 BB_1 所成的角. 所以 BE 与 DD_1 所成角的正切值为 $\tan \angle B_1BE = \frac{B_1E}{B_1B} = \frac{1}{2}$, D 正确.



12. ABC 解析: 如图, 对于选项 A, 取 AD 的中点 M , 连接 PM, BM .



∵侧面 PAD 为正三角形, $\therefore PM \perp AD$. 又底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. $\therefore AD \perp BM$. 又 $PM \cap BM = M$, $PM, BM \subset$ 平面 PMB , $\therefore AD \perp$ 平面 PBM , 故 A 正确.

对于选项 B, $\because AD \perp$ 平面 PBM , $\therefore AD \perp PB$, 即异面直线 AD 与 PB 所成的角为 90° , 故 B 正确.

对于选项 C, $\because BC \parallel AD$, $\therefore BC \perp$ 平面 PBM . $\therefore BC \perp PB$, $BC \perp BM$, $\therefore \angle PBM$ 是二面角

$P-BC-A$ 的平面角. 设 $AB = 1$, 则 $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面

$PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PM \subset$ 平面 PAD , $PM \perp AD$, $\therefore PM \perp$ 平面 $ABCD$. 在 $\text{Rt} \triangle PBM$ 中,

$\tan \angle PBM = \frac{PM}{BM} = 1$, 即 $\angle PBM = 45^\circ$, 故二面角

$P-BC-A$ 的大小为 45° , 故 C 正确.

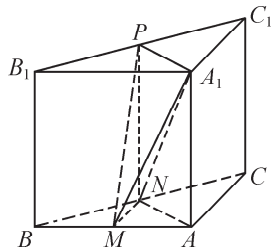
对于选项 D, 因为 BD 与 PA 不垂直, 所以 BD 与平面 PAC 不垂直, 故 D 错误.

故选 ABC.

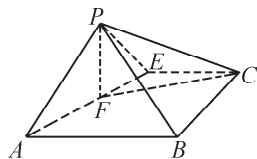
- 13.3 解析: 圆台的表面积为 $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2) \times 2 = 11\pi$, 从而 $r_1^2 + r_2^2 + 2(r_1 + r_2) = 11$, 即 $(r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 + 2(r_1 + r_2) = 11$. 因此 $(r_1 + r_2)^2 + 2(r_1 + r_2) - 15 = 0$, 解得 $r_1 + r_2 = 3$ 或 $r_1 + r_2 = -5$ (舍去).

14. $\frac{1}{2}$ 解析: $\because$ 平面 $MNE \parallel$ 平面 ACB_1 , 平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $MNE = ME$, 平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $ACB_1 = AB_1$, 平面 $CBB_1C_1 \cap$ 平面 $MNE = NE$, 平面 $CBB_1C_1 \cap$ 平面 $ACB_1 = CB_1$, $\therefore ME \parallel AB_1$, $NE \parallel CB_1$. $\because BE = EB_1$, $\therefore AM = MB$, $BN = NC$. $\therefore MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

15. $\frac{1}{24}$ 解析: 如图, 因为 N, P 分别是棱 BC, B_1C_1 的中点, 所以 $PN \parallel AA_1$. 因为 $PN \subset$ 平面 PMN , $AA_1 \not\subset$ 平面 PMN , 所以 $AA_1 \parallel$ 平面 PMN , 则 $V_{P-A_1MN} = V_{A_1-PMN} = V_{A-PMN} = V_{P-AMN} = \frac{1}{3}S_{\triangle AMN} \cdot PN = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$.



16. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 解析: 取 AE 的中点 F , 连接 CF, PF , 如图所示.



由题意, 得 $PA = PE = 2$. $\because F$ 为 AE 的中点,

$\therefore PF \perp AE$. 又 $\because$ 平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$, 平面 $PAE \cap$ 平面 $ABCE = AE$, $PF \subset$ 平面 PAE ,

$\therefore PF \perp$ 平面 $ABCE$, 则直线 PC 与平面 $ABCE$ 所成角为 $\angle PCF$. $\because AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore PF = EF = \sqrt{2}$. $\because \angle DEA = 45^\circ$, $\therefore \angle CEA = 135^\circ$, 即 $\angle CEF = 135^\circ$. $\therefore CF^2 = EF^2 + CE^2 -$

$2EF \cdot CE \cdot \cos \angle CEF = 2 + 4 + 2 \times \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$, 即 $CF = \sqrt{10}$, $\therefore \tan \angle PCF = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

17. (1) 证明: $\because E, F$ 分别是 BC, AB 的中点,

$\therefore EF \parallel AC$.

又 G, H 分别是 AD, DC 的中点,

$\therefore GH \parallel AC$.

$\therefore EF \parallel GH$,

$\therefore E, F, G, H$ 四点在同一平面内.

(2) 解: 由 (1) 知, $EF \parallel AC$.

又 F, G 分别是 AB, AD 的中点,

$\therefore FG \parallel BD$.

则 $\angle EFG$ (或其补角) 为异面直线 AC 与 BD 所成的角.

$\because AC = 6, BD = 8$,

$\therefore EF = 3, FG = 4$.

当 $\angle EFG = 60^\circ$ 时,

$EG = \sqrt{EF^2 + FG^2 - 2EF \cdot FG \cdot \cos 60^\circ} =$

$\sqrt{9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{13}$.

当 $\angle EFG = 120^\circ$ 时,

$$EG = \sqrt{EF^2 + FG^2 - 2EF \cdot FG \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{9 + 16 + 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{37}.$$

18. (1) 证明: 连接 A_1D, EF, B_1C , 如图所示.

$\because E, F$ 分别是 B_1B, BC 的中点,

$\therefore EF \parallel B_1C$.

又 $\because B_1C \parallel A_1D$,

$\therefore EF \parallel A_1D$ 且 $EF \neq A_1D$,

$\therefore A_1E, DF$ 共面,

设 $A_1E \cap DF = P$, 则 $P \in A_1E, P \in DF$.

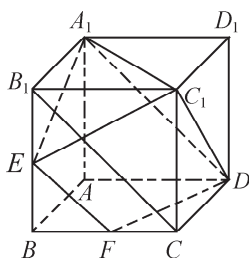
而 $A_1E \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

$\therefore P \in$ 平面 AA_1B_1B .

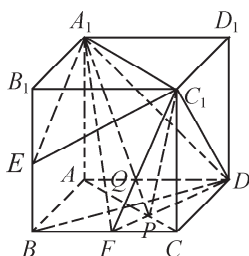
同理可得 $P \in$ 平面 $ABCD$.

$\therefore$ 点 P 在平面 $ABCD$ 与平面 AA_1B_1B 的公共直线 AB 上,

即 A_1E, AB, DF 三线共点.



(2) 解: 连接 AC 交 DF 于点 P , 连接 $A_1F, A_1P, FC_1, BD, C_1D, C_1P$, 如图所示.



$\because CF \parallel AD$,

$\therefore$ 由相似比可知 $DP : PF = AD : FC = 2 : 1$,

$\therefore V_{D-A_1FC_1} = V_{D-A_1PC_1} + V_{F-A_1PC_1} = V_{D-A_1PC_1} +$

$$\frac{1}{2}V_{D-A_1PC_1} = \frac{3}{2}V_{D-A_1PC_1},$$

记 DB 交 AC 于点 Q ,

$\because AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, DQ \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AA_1 \perp DQ, AC \perp DQ, AC \cap AA_1 = A$,

$\therefore DQ \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

易知 $DQ = \sqrt{2}, S_{\triangle A_1PC_1} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$.

$$\therefore V_{D-A_1FC_1} = \frac{3}{2}V_{D-A_1PC_1} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1PC_1} \times$$

$$DQ = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

19. 解: (1) 由题意知 AB 是圆柱 OO' 的一条母线, BC 过底面圆心 O , 且 $AB = BC = 5$,

则圆柱的底面圆的半径 $R = \frac{5}{2}$.

圆柱的侧面积为 $S_1 = 2\pi R \cdot AB = 2\pi \times \frac{5}{2} \times 5 = 25\pi$,

圆柱的底面积为 $S_2 = \pi R^2 = \pi \times \frac{25}{4} = \frac{25}{4}\pi$.

所以圆柱的表面积为 $S = S_1 + 2S_2 = 25\pi + 2 \times \frac{25}{4}\pi = \frac{75}{2}\pi$.

(2) 由线段 AC 绕 AB 旋转一周所得几何体为以 BC 为底面半径, 以 AB 为高的圆锥,

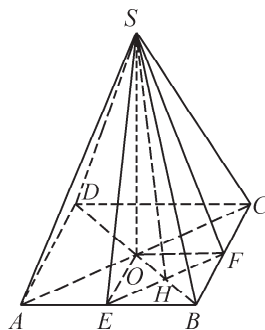
线段 AD 绕 AB 旋转一周所得的几何体为以 BD 为底面半径, 以 AB 为高的圆锥,

所以 $\triangle ACD$ 绕 AB 旋转一周而成的封闭几何体的

$$\text{体积为 } V = \frac{1}{3}\pi \cdot BC^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot AB = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 5 - \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 5 = 15\pi.$$

20. 解: (1) 连接 EF 交 BD 于点 H , 连接 SH, OE, OF , 如图所示.

设 O 是底面正方形的中心, 则 SO 是正四棱锥的高, 且 $\triangle SAB, \triangle SBC$ 都是等腰三角形,



$\because E, F$ 分别是 AB, BC 的中点,

$\therefore OF \parallel AB$,

$\because AB \perp BC$,

$\therefore OF \perp BC$.

$\because SB = SC$,

$\therefore SF \perp BC$.

$\therefore \angle SFO$ 是侧面与底面所成二面角的平面角, 即 $\angle SFO = 60^\circ$.

$\because SF = a$,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}a, OS = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\text{又 } BE = BF = OF = \frac{1}{2}a,$$

$\therefore$ 较小部分是三棱锥 $S-BEF$ 的体积, 其体积

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} BE \cdot BF \right) \cdot SO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{48} a^3.$$

(2) 设 O 到截面 SEF 的距离为 d ,

$$\text{则 } V_{S-OEF} = V_{S-BEF}.$$

由于底面 $ABCD$ 是正方形,

则 $OB \perp AC$.

$$\text{又 } EF \parallel AC, \text{ 且 } EF = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} a,$$

$SH \perp EF$,

$$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} a\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} a,$$

$$\therefore S_{\triangle SEF} = \frac{1}{2} EF \cdot SH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} a \times \frac{\sqrt{14}}{4} a = \frac{\sqrt{7}}{8} a^2.$$

$$\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle SEF} \cdot d = \frac{\sqrt{3}}{48} a^3,$$

$$\therefore d = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} a = \frac{\sqrt{21}}{14} a.$$

即底面中心到截面 SEF 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{14} a$.

21. (1) 证明: 由 $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$,

则 $BCDE$ 是直角梯形.

由 $DE = BE = 1, CD = 2$, 得 $BD = BC = \sqrt{2}$.

由 $AC = \sqrt{2}, AB = 2$, 得 $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

即 $AC \perp BC$,

又平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$,

则 $AC \perp$ 平面 $BCDE$.

所以 $AC \perp DE$.

又 $DE \perp DC, AC \cap DC = C$,

所以 $DE \perp$ 平面 ACD .

(2) 解: 过点 B 作 $BF \perp AD$, 与 AD 交于点 F , 作 $BO \perp CD$, 与 CD 交于点 O , 连接 OF , 如图所示.

因为 $DE \perp DC$,

所以 $DE \parallel OB$.

所以 $OB \perp AD$.

所以 $OF \perp AD$,

所以 $\angle BFO$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角.

在直角梯形 $BCDE$ 中, 易知 $CD^2 = BC^2 + BD^2$,

则 $BD \perp BC$.

又平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$,

则 $BD \perp$ 平面 ABC ,

所以 $BD \perp AB$.

由于 $AC \perp$ 平面 $BCDE$,

则 $AC \perp CD$.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由 $DC = 2, AC = \sqrt{2}$, 得 $AD = \sqrt{6}$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由 $BD = \sqrt{2}, AB = 2, AD = \sqrt{6}$, 得

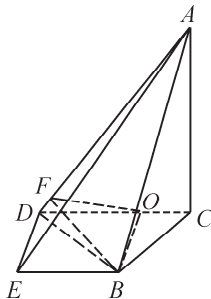
$$BF = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

因为 $BO = DE = 1$,

$$\text{所以 } OF = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \tan \angle BFO = \frac{BO}{OF} = \sqrt{3}.$$

所以二面角 $B-AD-C$ 的正切值为 $\sqrt{3}$.



22. (1) 证明: 由 $\angle BAD = 90^\circ$, 即 $AD \perp AB$,

又 $AD \parallel BC$, 则 $BC \perp AB$.

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD, BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp BC$.

又 $PA \cap AB = A$,

则 $BC \perp$ 平面 PAB ,

又 $PB \subset$ 平面 PAB , 则 $BC \perp PB$,

由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 有 $PA \perp AB$, 且 $PA = AB$,

N 为 PB 的中点, 则 $AN \perp PB$.

又 M 为 PC 的中点,

则 $MN \parallel BC$,

即 $MN \perp PB$,

又 $AN \cap MN = N$,

$AD \parallel BC, AD \parallel MN$, 即 A, N, D, M 共面,

$\therefore PB \perp$ 平面 $ADMN$.

$\because DM \subset$ 平面 $ADMN$,

$\therefore PB \perp DM$.

(2) 由 (1) 知: $PB \perp$ 平面 $ADMN$,

设 BD 与平面 $ADMN$ 所成角为 θ , 则 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

且 $BC = 1$,

$$\therefore BN = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}, BD = 2\sqrt{2},$$

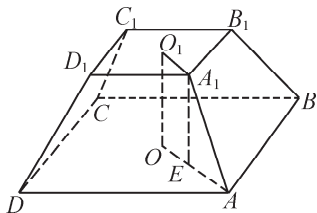
$$\text{则 } \sin \theta = \frac{BN}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

故 $\theta = \frac{\pi}{6}$.

第八章 立体几何初步(B卷)

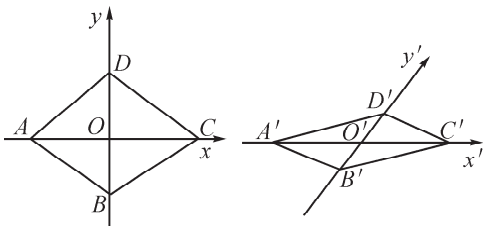
1. B 解析:不妨设半圆的半径为 1. 用圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的小扇形围成的圆锥的底面圆周长为 $\frac{\pi}{3} \times 1 = \frac{\pi}{3}$. 设其底面圆的半径为 r_1 , 则 $2\pi r_1 = \frac{\pi}{3}$, 解得 $r_1 = \frac{1}{6}$. 该圆锥的高 $h_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$. 用圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的大扇形围成的圆锥的底面圆周长为 $\frac{2\pi}{3} \times 1 = \frac{2\pi}{3}$, 设其底面圆的半径为 r_2 , 则 $2\pi r_2 = \frac{2\pi}{3}$. 解得 $r_2 = \frac{1}{3}$. 该圆锥的高 $h_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以所求高之比为 $h_1 : h_2 = \sqrt{70} : 8$. 故选 B.

2. B 解析:如图所示,



在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O_1, O 分别为上、下底面的中心, 连接 OA, O_1A_1, OO_1 . 则由题意可知 $O_1O \perp$ 底面 $ABCD$, $OA = 2\sqrt{2}, O_1A_1 = \sqrt{2}$. 过点 A_1 作 $A_1E \parallel OO_1$ 交 AO 于点 E , 则 $A_1E \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 OEA_1O_1 为矩形, $OE = O_1A_1 = \sqrt{2}$, 所以 $AE = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. 因为 $AA_1 = 2$, 所以 $A_1E = O_1O = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = \sqrt{2}$, 即正四棱台的高为 $\sqrt{2}$. 所以正四棱台的体积为 $V = \frac{1}{3} \times (4^2 + 2^2 + \sqrt{4^2 \times 2^2}) \times \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

3. A 解析:菱形 $ABCD$ 的边长为 4 cm, 一个内角为 120° , 画出它的平面直观图四边形 $A'B'C'D'$, 如图所示.

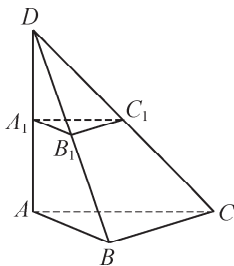


在菱形 $ABCD$ 中, $AB = AD = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$, 所

以 $BD = 4, AC = 4\sqrt{3}$. 在四边形 $A'B'C'D'$ 中, $B'D' = \frac{1}{2}BD = 2, AC = A'C' = 4\sqrt{3}$, 所以四边形 $A'B'C'D'$ 的面积为 $\frac{1}{2}A'C' \cdot B'D' \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6} (\text{cm}^2)$.

4. A 解析:由题意, 平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD , 平面 $A'BD \cap$ 平面 $BCD = BD$, 又 $BD \perp CD, CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $CD \perp$ 平面 $A'BD$. 因为 $AB = AD = CD = 1$, 所以 $S_{\triangle A'BD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$. 所以 $V_{A'-BCD} = V_{C-A'BD} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'BD} \times CD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$. 所以四面体 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{6}$. 故选 A.

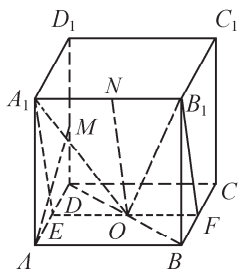
5. A 解析:将三棱台补全为如下三棱锥 $D-ABC$.



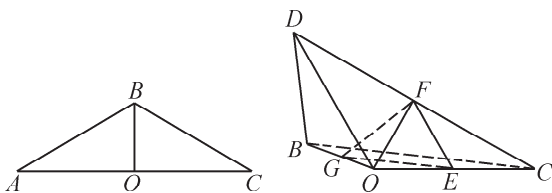
由 $\angle ABC = 90^\circ, AA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = 1, AB = 2$, 易知 $DA = BC = 2, AC = 2\sqrt{2}$. 由 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AB, AC \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AC$. 所以 $BD = 2\sqrt{2}, CD = 2\sqrt{3}$. 故 $BC^2 + BD^2 = CD^2$, 即 $BC \perp BD$. 所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. 若点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离为 h , 由 $V_{D-ABC} = V_{A-BCD}$, 得 $\frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{3} h \times 2\sqrt{2}$, 可得 $h = \sqrt{2}$. 设 AC 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ , 则 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 由 $\sin \theta = \frac{h}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 得 $\theta = \frac{\pi}{6}$. 故选 A.

6. C 解析:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心, M 是 D_1D 的中点, N 是 A_1B_1 上的动点, 连接 A_1O, B_1O . 设 E, F 分别是 AD, BC 的中点, 连接 A_1E, EF, B_1F , 如图所示. 则 E, O, F 三点共线, 且 $EF \parallel AB \parallel A_1B_1$. 在正方形 ADD_1A_1 中, 易证 $\triangle A_1AE \cong \triangle ADM$. 所以 $\angle AA_1E = \angle DAM$. 所以 $\angle DAM + \angle EAA_1 = \angle AA_1E + \angle EAA_1 = 90^\circ$. 所以 $AM \perp A_1E$. 又 $EF \perp$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $EF \perp AM$, 所以 $AM \perp$ 平面 A_1EFB_1 , 因为 $NO \subset$ 平面 A_1EFB_1 , 所以直线 $NO \perp$

AM. 又 NO, AM 不相交, 则它们异面垂直. 故选 C.

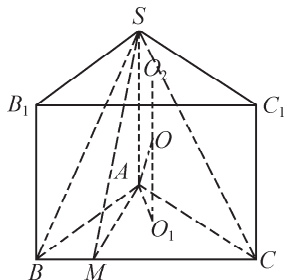


7. A 解析: 由题意知 $OA \perp OB$, 即 $OD \perp OB$, $OC \perp OB$. 所以二面角 $D-BO-C$ 的平面角 $\angle COD = 120^\circ$. 设 E, F, G 分别为 OC, CD, OB 的中点, 连接 EF, FG, EG , 如图所示.



所以 $EF \parallel OD, EG \parallel BC$, 故异面直线 DO 与 BC 所成角, 即为 $\angle FEG$ (或其补角). 设 $EG = 1$, 则 $BC = 2, OC = OD = \sqrt{3}$, 故 $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $OD \cap OC = O, OD, OC \subset$ 平面 COD , 故 $OB \perp$ 平面 COD . 又 $OF \subset$ 平面 COD , 故 $OB \perp OF$. 在 $Rt\triangle GOF$ 中, $OG = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}, OF = \frac{1}{2}OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $GF = \sqrt{OG^2 + OF^2} = 1$. 所以在 $\triangle FEG$ 中, $\cos \angle FEG = \frac{EF^2 + EG^2 - GF^2}{2EF \cdot EG} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

8. B 解析: 根据题意, 将三棱锥 $S-ABC$ 放入直三棱柱 SB_1C_1-ABC , 则两者外接球相同, 且取 $\triangle ABC, \triangle SB_1C_1$ 的外心分别为 O_1, O_2 , 连接 O_1O_2 , 且取 O_1O_2 的中点为 O , 连接 OA, AO_1 如图所示.



因为三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 64π , 设外接球半径为 R , 则 $4\pi R^2 = 64\pi$, 解得 $R = 4$. 对直三棱柱 SB_1C_1-ABC , 其外接球球心在 O_1O_2 的中点 O 处, 则 $OA = 4$, 故在 $Rt\triangle OO_1A$ 中, $OA = 4, OO_1 =$

$\frac{1}{2}SA = 2$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆半径 AO_1 为 r , 则 $r^2 + 2^2 = 4^2$, 解得 $r = 2\sqrt{3}$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $r = 2\sqrt{3}$, 则 $BC = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$. 又 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2r$, 则 $\sin \angle ACB = \frac{AB}{2r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. 又 $\angle ACB$ 为锐角, 故 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$. 则 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$, 即 $\triangle ABC$ 是以 $\angle BAC$ 为顶角的等腰三角形. 因为 $SA \perp$ 平面 ABC , 故 SM 与平面 ABC 的夹角即为 $\angle SMA$, 则 $\tan \angle SMA = \frac{SA}{AM} = \frac{4}{AM}$. 又 AM 的最小值即为 BC 边上的高线, 设其长度为 h , 则 $h = \sin \angle ABC \times AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. 故当 $\angle SMA$ 最大时, $\tan \angle SMA$ 的值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 即直线 SM 与平面 ABC 所成的最大角的正切值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

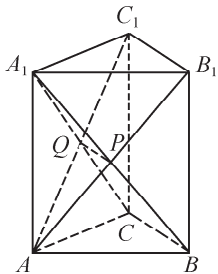
9. BC 解析: 当 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ 时, m, n 可以平行、相交、异面, 所以 A 选项不正确. 当 $m \perp \alpha, n \subset \alpha$ 时, 由线面垂直的定义可知 $m \perp n$, 所以 B 选项正确. 当 $m \perp n, n \perp \alpha$ 时, 可以有 $m \parallel \alpha$, 也可以有 $m \subset \alpha$, 所以 C 选项正确. 当 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$ 时, m 与 n 平行或异面, D 选项不正确. 故选 BC.

10. BCD 解析: 由题意可知, 该几何体的结构为半个圆锥和半个圆台. 该几何体的高为 $DE = \sqrt{3}$. 该几何体的表面积为 $S = \frac{1}{2} \pi \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \pi \times 1^2 + \frac{1}{2} \pi (1+2) \times 2 + \frac{1}{2} \pi \times (1^2 + 2^2) + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = 7\pi + 2\sqrt{3}$, 体积 $V = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \pi \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \pi \times \sqrt{3} \times (1+4+2) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$. 故选 BCD.

11. ABC 解析: 易知 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 则平面 $BDC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 . 点 O, C_1 为平面 BDC_1 与平面 ACC_1A_1 的公共点, 且 $M \in A_1C, M \in$ 平面 BDC_1 , 则 C_1, M, O 三点共线. 故 A 选项正确. 易知 $A_1C \perp BD, A_1C \perp BC_1, BD \cap BC_1 = B$, 故 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD , 故 B 选项正确. 设直线 A_1C_1 与平面 ABC_1D_1 的夹角为 θ , 又 $A_1C_1 = \sqrt{2}$, 点 A_1 到平面 ABC_1D_1 的距离为 $\frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\sin \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 则 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 故 C 选项正确. 设 B_1 到平面

C_1BD 的距离为 h , 因为 $V_{B_1-C_1BD} = V_{D-C_1BB_1}$, 所以 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1$, 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 D 选项错误. 故选 ABC.

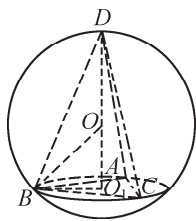
12. ABD 解析: 画出原直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 如图所示. 对于 A, 连接 AC_1 交 A_1C 于点 Q , 连接 PQ , $\because P, Q$ 分别为 AB_1, AC_1 的中点, $\therefore PQ \parallel B_1C_1$, $\therefore PQ \parallel BC$, $\therefore P, Q, C, B$ 四点共面, 故 A 正确. 对于 B, 连接 A_1B 交 AB_1 于点 P , $\because AB = AA_1$, $\therefore$ 直三棱柱的侧面四边形 ABB_1A_1 为正方形, 故 $AB_1 \perp A_1B$. $\because BB_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore BB_1 \perp BC$. $\because AB \perp BC$, $AB \cap BB_1 = B$. $\therefore BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 . $\because AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore BC \perp AB_1$. $\because A_1B \cap BC = B$, $\therefore AB_1 \perp$ 平面 A_1BC . $\because A_1C \subset$ 平面 A_1BC , $\therefore A_1C \perp AB_1$, 故 B 正确. 对于 C, 由 A 可得 $PQ \parallel BC$, $PQ = \frac{1}{2} BC$, 故 $S_{\triangle A_1PQ} = \frac{1}{4} S_{\triangle A_1BC}$. $\therefore V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} V_{A_1B_1C_1-ABC}$, $\therefore V_{A-PQCB} = \frac{3}{4} V_{A-A_1BC} = \frac{3}{4} V_{A_1-ABC} = \frac{1}{4} V_{A_1B_1C_1-ABC}$, 故 C 错误. 对于 D, 设 $AB = 1$, 易知 $BC \perp$ 平面 ABB_1 , 则 $\angle BA_1C$ 为 A_1C 与平面 ABB_1 所成的角. 在 $Rt\triangle A_1BC$ 中, $BC = \sqrt{2} AB = \sqrt{2}$, $A_1B = \sqrt{2}$, 则 $\tan \angle BA_1C = \frac{BC}{A_1B} = 1$, 故 A_1C 与平面 ABB_1 所成的角为 45° , 故 D 正确. 故选 ABD.



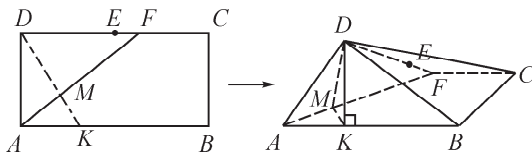
13. ①③④ $\Rightarrow$ ②(或②③④ $\Rightarrow$ ①) 解析: $\because \alpha, \beta$ 是两个不同的平面, m, n 是平面 α 及 β 之外的两条不同的直线, 若 ① $m \perp n$, ③ $n \perp \beta$, 则 $m \parallel \beta$. 又 $\because$ ④ $m \perp \alpha$, $\therefore$ ② $\alpha \perp \beta$. 即 ①③④ $\Rightarrow$ ②. 若 ② $\alpha \perp \beta$, ③ $n \perp \beta$, 则 $n \parallel \alpha$. 又 $\because$ ④ $m \perp \alpha$, $\therefore$ ① $m \perp n$. 即 ②③④ $\Rightarrow$ ①.

14. $18\sqrt{3}$ 解析: 设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O_1 , 如图所示. 因为正三角形 ABC 的外接圆半径为 $2\sqrt{3}$, 即 $O_1B = 2\sqrt{3}$. 由正弦定理 $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2r = 4\sqrt{3}$, 得 $AC = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$. 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times$

$\sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$. 要使三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大, 则 $O_1D \perp$ 平面 ABC , 且球心 O 在线段 O_1D 上. 因为球 O 的体积为 $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{256\pi}{3}$, 所以球 O 的半径为 $R = 4$. 在 $Rt\triangle OO_1B$ 中, 由勾股定理得 $OO_1 = \sqrt{R^2 - O_1B^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$, 所以三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot (OO_1 + R) = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times (2 + 4) = 18\sqrt{3}$.

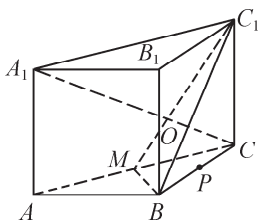


15. $(\frac{1}{2}, 1)$ 解析: 在棱锥中, 过点 K 作 $KM \perp AF$ 于点 M , 连接 DM . $\because$ 平面 $ABD \perp$ 平面 $ABCF$, 平面 $ABD \cap$ 平面 $ABCF = AB$, $DK \perp AB$, $DK \subset$ 平面 ABD , $\therefore DK \perp$ 平面 $ABCF$. $\because AF \subset$ 平面 $ABCF$, $\therefore DK \perp AF$. $\because MK \perp AF$, $DK \cap MK = K$, $\therefore AF \perp$ 平面 DMK . $\because DM \subset$ 平面 DMK , $\therefore AF \perp DM$. 与折前的图形对比, 可知折前的图形中 D, M, K 三点共线, 如图所示, 且 $DK \perp AF$, $\therefore \triangle DAK \sim \triangle FDA$, $\therefore \frac{AK}{AD} = \frac{AD}{DF}$, 即 $\frac{t}{1} = \frac{1}{DF}$, $\therefore t = \frac{1}{DF}$. $\because DF \in (1, 2)$, $\therefore t \in (\frac{1}{2}, 1)$.

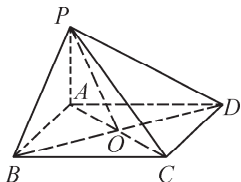


16. $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 解析: 如图, 取 AC 的中点为 M , 连接 C_1M 交 A_1C 于点 O , 连接 MB . 所以 $CM = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$, $MB = \sqrt{2}$, 所以 $C_1M = \sqrt{MC^2 + CC_1^2} = \sqrt{6}$, $C_1B = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 2\sqrt{2}$. 易证 $\triangle A_1OC_1 \sim \triangle COM$, 所以 $\frac{OM}{OC_1} = \frac{CO}{A_1O} = \frac{CM}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$, 所以 $OM = \frac{1}{3} C_1M$, $CO = \frac{1}{3} A_1C$, $OM^2 + OC^2 = \frac{1}{9} (C_1M^2 + A_1C^2) = 2 = CM^2$, 故 $A_1C \perp C_1M$. 又因为平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 其交线为 AC , 且 $MB \perp AC$, 又 $BM \subset$ 平面 ABC , 则 $MB \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 故 $A_1C \perp BM$, 因此 $A_1C \perp$ 平面 MBC_1 , 故平面 $\alpha \parallel$ 平面 MBC_1 . 因为点 P 在棱

BC 上运动,故当点 P 运动到点 B 时,此时截面最大,则周长最大,此时周长为 $MB+MC_1+C_1B=\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.



17. 证明:(1)连接 AC,交 BD 于点 O,连接 PO,如图所示.



因为四边形 ABCD 为菱形,

所以 $BD \perp AC$.

又因为 $PB=PD$,O 为 BD 的中点,

所以 $BD \perp PO$.

因为 $PO \cap AC=O$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC,

因为 $PC \subset$ 平面 PAC,

所以 $BD \perp PC$.

(2)因为四边形 ABCD 为菱形,

所以 $BC \parallel AD$.

因为 $BC \not\subset$ 平面 PAD, $AD \subset$ 平面 PAD,

所以 $BC \parallel$ 平面 PAD.

又因为 $BC \subset$ 平面 PBC,平面 PBC 与平面 PAD 的交线为 l,

所以 $BC \parallel l$.

18. (1)证明:因为 O,M 分别是 AB,VA 的中点,

所以 $MO \parallel VB$.

因为 $MO \subset$ 平面 MOC, $VB \not\subset$ 平面 MOC,

所以 $VB \parallel$ 平面 MOC.

(2)解:因为 $AC=BC$,O 为 AB 的中点,

所以 $OC \perp AB$.

因为平面 VAB $\perp$ 平面 ABC,平面 VAB $\cap$ 平面

ABC=AB, $OC \subset$ 平面 ABC,

所以 $OC \perp$ 平面 VAB.

在等腰直角三角形 ABC 中, $AC=BC=\sqrt{2}$,

所以 $AB=2,OC=1$,

所以等边 $\triangle VAB$ 的面积 $S_{\triangle VAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } V_{V-ABC} = V_{C-VAB} = \frac{1}{3} OC \cdot S_{\triangle VAB} = \frac{1}{3} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以三棱锥 V-ABC 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. (1)证明:因为 $AB=AC$,且 M 为 BC 的中点,

所以 $AM \perp BC$.

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC, $AM \subset$ 平面 ABC,且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 ABC=BC,

所以 $AM \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $BN \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $AM \perp BN$.

因为 M,N 分别为 BC, CC_1 的中点,

所以 $BM=CN=2$.

又因为 $BB_1=CB=4$, $\angle MBB_1 = \angle NCB = 90^\circ$,

所以 $\triangle MBB_1 \cong \triangle NCB$.

所以 $\angle BMB_1 = \angle CNB$, $\angle BB_1M = \angle CBN$.

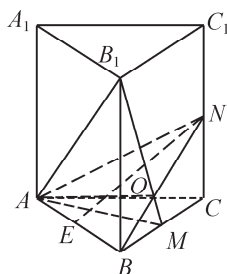
所以 $\angle BMB_1 + \angle CBN = \angle CNB + \angle CBN = 90^\circ$,

所以 $BN \perp B_1M$.

因为 $AM \cap B_1M=M$,

所以 $BN \perp$ 平面 AMB_1 .

(2)解:设 $BN \cap B_1M=O$,连接 AO,AN,如图所示.



由(1)可知 $BO \perp$ 平面 AMB_1 .

所以 $\angle BAO$ 为 AB 与平面 AMB_1 所成的角.

由题可知 $AN=BN=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

所以 $\triangle ABN$ 为等腰三角形.

作 $NE \perp AB$ 于点 E,则 E 为 AB 的中点.

所以 $NE = \sqrt{BN^2 - BE^2} = 4$,

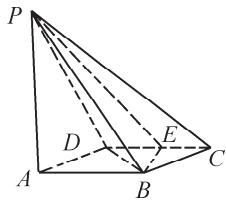
$$\text{所以 } AO = \frac{AB \cdot NE}{BN} = \frac{4 \times 4}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB=90^\circ$,

$$\text{所以 } \cos \angle BAO = \frac{AO}{AB} = \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

所以直线 AB 与平面 AMB_1 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

20. (1) 证明: 如图所示, 连接 BD .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle BCD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形.

$\because E$ 是 CD 的中点,

$\therefore BE \perp CD$.

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore BE \perp AB$.

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BE \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp BE$.

$\because PA \cap AB = A$,

$\therefore BE \perp$ 平面 PAB .

又 $\because BE \subset$ 平面 PBE ,

$\therefore$ 平面 $PBE \perp$ 平面 PAB .

(2) 解: 由(1)知 $BE \perp$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore PB \perp BE$.

又 $\because AB \perp BE$,

$\therefore \angle PBA$ 是二面角 $A-BE-P$ 的平面角.

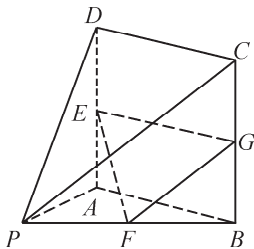
$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $\tan \angle PBA = \frac{PA}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle PBA = 60^\circ$.

故二面角 $A-BE-P$ 的大小是 60° .

21. 解: (1) 取 BC 的中点为 G , 则平面 $GEF \parallel$ 平面 PCD . 证明如下:

取 BC 的中点 G , 连接 EG, FG , 如图所示.



在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, G 是 BC 的中点,

所以 $GE \parallel CD$.

又因为 $GE \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD ,

所以 $GE \parallel$ 平面 PCD .

因为 F 是 PB 的中点, G 是 BC 的中点,

所以 $GF \parallel PC$.

同理可得 $GF \parallel$ 平面 PCD .

又 $GE \cap GF = G$,

所以平面 $GEF \parallel$ 平面 PCD .

(2) 由(1)知, 平面 $GEF \parallel$ 平面 PCD .

所以 $EF \parallel$ 平面 PDC .

所以点 F 到平面 PDC 的距离等于点 E 到平面 PDC 的距离.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp DA$.

因为 $PA = AD = 1$,

所以在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中, $DP = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp CB$.

又因为 $CB \perp AB$, $PA \cap AB = A$,

所以 $CB \perp$ 平面 PAB .

又因为 $PB \subset$ 平面 PAB ,

所以 $CB \perp PB$.

所以 $PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$.

所以 $PD^2 + DC^2 = PC^2$,

所以 $\triangle PDC$ 为直角三角形.

设 E 到平面 PDC 的距离为 h ,

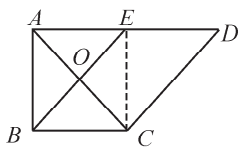
因为 $V_{E-PDC} = V_{P-CDE}$,

所以 $\frac{1}{3} \times h \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1$.

解得 $h = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

所以点 F 到平面 PDC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

22. (1) 证明: 在直角梯形 $ABCD$ 中, 连接 CE , 如图所示.



在直角梯形 $ABCD$ 中, 因为 $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$,

点 E 是 AD 的中点, $\angle BAD = 90^\circ$,

所以四边形 $ABCE$ 是正方形.

所以 $BE \perp AC$.

在四棱锥 A_1-BCDE 中, $BE \perp A_1O$, $BE \perp OC$.

因为 $A_1O \cap OC = O$, $A_1O \subset$ 平面 A_1OC , $OC \subset$ 平面 A_1OC ,

所以 $BE \perp$ 平面 A_1OC .

又因为 $DE \parallel BC$, $DE = BC$,

所以四边形 $BCDE$ 是平行四边形.

所以 $CD \parallel BE$.

所以 $CD \perp$ 平面 A_1OC .

(2)解:由已知,平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$,且平面 $A_1BE \cap$ 平面 $BCDE = BE$.

又由(1)知, $A_1O \perp BE$,

所以 $A_1O \perp$ 平面 $BCDE$,

即 A_1O 是四棱锥 A_1-BCDE 的高.

平行四边形 $BCDE$ 的面积 $S = BC \cdot AB = a^2$,

所以四棱锥 A_1-BCDE 的体积 $V = \frac{1}{3} \times S \times$

$$A_1O = \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3.$$

$$\text{令 } \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 = 36\sqrt{2},$$

解得 $a = 6$.

第九章 统 计(A卷)

1. C 解析:由题意可知,这 2 500 名城镇居民的寿命的全体是样本.

2. B 解析: $\because$ 考号末位为 5 的学生考号间距相同, $\therefore$ 高一年级组运用的抽样方法是系统抽样,故选 B.

3. B 解析:设报名的 300 名学生志愿者中女生有 x 人,则 $\frac{x}{300} = \frac{50-30}{50}$,解得 $x = 120$. 故选 B.

4. B 解析:对于 A,众数可能不变,如 8,7,7,7,4,4,1,故 A 错误. 对于 B,方差体现数据的偏离程度,因为数据不完全相同,当去掉 1 个最高分、1 个最低分,一定使得数据偏离程度变小,即方差变小,故 B 正确. 对于 C,个数从小到大排列,第 4 个数为中位数,当去掉首、末两端的数,中间的数依然不变,故 5 个有效评分与 7 个原始评分相比,不变的是中位数,故 C 错误. 对于 D,平均数可能变大、可能变小是、也可能不变,故 D 错误. 故选 B.

5. D 解析:这组数据由小到大排列依次为 21,23,24,30,32,则该组数据的中位数为 24,极差为 $32-21=11$,故①②正确. 将该组数据中每个数据都加上 2,新数据的平均数增加 2,方差不变,故③正确. 故选 D.

6. C 解析:记 x_m 为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的中位数, y_m 为 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ 的中位数. 因为 $y_i = 2x_i + 3, i = 1, 2, 3, \dots, n, x_m = 6$, 所以 $y_m = 2x_m + 3 = 2 \times 6 + 3 = 15$. 故选 C.

7. B 解析:依题意可知共有 $2+1+2+3+1+1+1=11$ (场)比赛,因为 $11 \times 40\% = 4.4$,将表中数据,从小到大排列为 3,3,6,7,7,10,10,10,11,13,30. 所

以第 40 百分位数为 7. 故选 B.

8. D 解析:从第 1 行第 5 列、第 6 列组成的数 65 开始由左到右依次选出的数为 08,02,14,07,01,所以第 5 个个体的编号为 01.

9. BD 解析:总体是某市高三毕业生的升学考试中数学成绩的全体,故 A 不正确. 个体是每 1 名学生的数学成绩,故 B 正确. 样本是抽查的 1 000 名学生的数学升学考试成绩,故 C 不正确, D 正确. 故选 BD.

10. ABCD 解析:收集数据主要有普查和抽样调查,还有问卷调查、持续观察、做调查、查阅资料、做试验等. 可以根据人数的多少以及调查的目的进行选择. 故选 ABCD.

11. ACD 解析:甲的极差为 $10-6=4$,故 A 正确. 将甲的 10 次成绩从小到大排列为 6,7,7,7,8,8,8,9,10,10. 而 $10 \times 75\% = 7.5$,所以甲的 10 次成绩的 75% 分位数为 9,故 B 不正确. 甲的 10 次成绩的平均数为 8,而乙的 10 次成绩的平均数为 8,则甲和乙的 20 次成绩的平均数为 $\frac{10 \times 8 + 10 \times 8}{20} =$

8,故 C 正确. 甲的 10 次成绩的方差为 $\frac{1}{10} \times [(6-8)^2 + 3 \times (7-8)^2 + 3 \times (8-8)^2 + (9-8)^2 + 2 \times (10-8)^2] = 1.6$,因为 $1.6 > 0.4$,所以乙比甲的成绩更稳定, D 正确. 故选 ACD.

12. AC 解析:由频率分布表的性质,得 $m = 100 - 8 - 10 - 20 - 26 - 12 - 6 - 2 = 16$,故 A 正确. $\because$ 观看比赛低于 4 场的学生所占比例为 $8\% + 10\% + 20\% + 26\% = 64\%$, $\therefore$ 估计观看比赛低于 4 场的学生约为 $1\,000 \times 64\% = 640$ 人,故 B 错误. $\because$ 观看比赛不低于 4 场的学生所占比例为 $16\% + 12\% + 6\% + 2\% = 36\%$, $\therefore$ 估计观看比赛不低于 4 场的学生约为 $1\,000 \times 36\% = 360$ 人,故 C 正确. 出现频率最高的为 3,故高三年级观看比赛场数的众数为 3, D 错误. 故选 AC.

13. 15 解析:应从高二年级抽取 $50 \times \frac{3}{3+3+4} = 15$ (名)学生.

14. 128 解析:随机抽取了 50 个样本,样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ 的方差为 8,则数据 $4x_1 - 1, 4x_2 - 1, \dots, 4x_{50} - 1$ 的方差为 $4^2 \times 8 = 128$.

15. 甲 解析:甲的射击成绩的平均数 $\bar{x}_1 = \frac{6+8+9+9+8}{5} = 8$,乙的射击成绩的平均数 $\bar{x}_2 = \frac{10+7+7+7+9}{5} = 8$. 甲的射击成绩的方差 $s_1^2 =$

$$\frac{(6-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2}{5} =$$

$$1.2, \text{乙的射击成绩的方差 } s_2^2 = \frac{(10-8)^2 + (7-8)^2 + (7-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{5} =$$

1.6. 因为 $s_1^2 < s_2^2$, 所以甲的射击成绩更稳定.

16.3 解析: 将这组数据按照从小到大重新排列为 2, 2, 2, m , 4, 5, 10, 则平均数为 $\frac{2+2+2+m+4+5+10}{7} = \frac{m+25}{7}$, 中位数为 m , 众数为 2. 易得 $2 < m < \frac{m+25}{7}$, 则 $2 + \frac{m+25}{7} = 2m$, 解得 $m=3$. 因为 $7 \times 50\% = 3.5$, 所以第 50% 分位数是 3.

17. 解: 因为甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数的比例为 $240:160:160=3:2:2$,

所以抽取的 7 名同学中, 从甲年级的学生志愿者中应抽取 $7 \times \frac{3}{3+2+2} = 3$ (人),

从乙年级的学生志愿者中应抽取 $7 \times \frac{2}{3+2+2} = 2$ (人),

从丙年级的学生志愿者中应抽取 $7 \times \frac{2}{3+2+2} = 2$ (人).

故应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取 3 人, 2 人, 2 人.

18. 解: (1) 根据频率分布直方图, 得 $(0.004 + 0.006 + a + 0.030 + 0.024 + 0.016) \times 10 = 1$.

解得 $a = 0.020$.

众数是出现次数最多的数,

则这 50 名党员成绩的众数是 $\frac{70+80}{2} = 75$.

(2) 因为前 5 个小组的频率之和是 $(0.004 + 0.006 + 0.020 + 0.030 + 0.024) \times 10 = 0.84$,

所以第 90 百分位数在第六小组 $[90, 100]$ 内, 设其为 x ,

则 $0.84 + (x - 90) \times 0.016 = 0.90$,

解得 $x = 93.75$.

则可以估计此样本数据的第 90 百分位数为 93.75.

19. (1) 解: 依题意, 得 $163.0 + 164.0 + 161.0 + 157.0 + 162.0 + 165.0 + 158.0 + 155.0 + 164.0 + 162.5 + 154.0 + 154.0 + 164.0 + 149.0 + 159.0 + 161.0 + 170.0 + 171.0 + 155.0 + 148.0 + 172.0 + 162.5 + 158.0 + 155.5 + 157.0 + 163.0 + 172.0 =$

4 336.5,

所以样本平均数为 $4 336.5 \div 27 \approx 160.6$ (cm).

即女生身高的样本平均数约为 160.6 cm.

(2) 依题意可得高一年级学生的平均身高约 $\frac{160.6 \times 386 + 170.6 \times (712 - 386)}{712} \approx 165.2$ (cm).

$$20. \text{解: } \because \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{75+78+80+89+85+92+96}{7} = 85,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{75+80+80+85+90+90+95}{7} = 85,$$

$$\therefore s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{7} \times [(75-85)^2 + (78-85)^2 + \dots + (96-85)^2] = \frac{360}{7},$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{7} \times [(75-85)^2 + (80-85)^2 + \dots + (95-85)^2] = \frac{300}{7}.$$

$$\therefore \bar{x}_{\text{甲}} = \bar{x}_{\text{乙}}, s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2.$$

即两个班平均成绩相同, 但乙班成绩较甲班成绩更稳定, 故应该选择乙班参赛.

21. 解: (1) 第四小组的频率为 $1 - 0.1 - 0.3 - 0.4 = 0.2$.

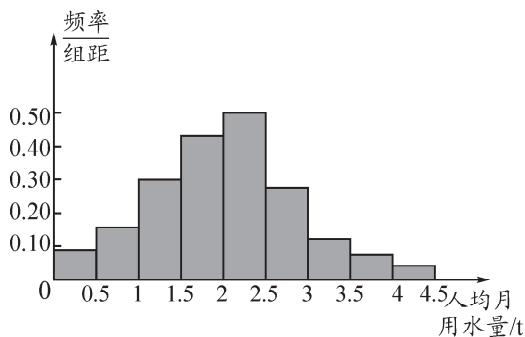
(2) 参加这次测试的学生人数为 $\frac{5}{0.1} = 50$.

(3) 由于中位数是所有数据中的中间值, 故在频率分布直方图中体现的是中位数的左、右两边频数应相等, 即频率也相等, 从而就是小矩形的面积和相等. 因此在频率分布直方图中将频率分布直方图中所有小矩形的面积一分为二的直线所对应的成绩即为所求. 故这次测试中学生跳绳次数的中位数落在第三小组内.

22. 解: (1) 列出频率分布表如下:

分组	频数	频率
$(0, 0.5]$	4	0.04
$(0.5, 1]$	8	0.08
$(1, 1.5]$	15	0.15
$(1.5, 2]$	22	0.22
$(2, 2.5]$	25	0.25
$(2.5, 3]$	14	0.14
$(3, 3.5]$	6	0.06
$(3.5, 4]$	4	0.04
$(4, 4.5]$	2	0.02
合计	100	1

(2) 绘制出频率分布直方图如图所示.



众数为 $\frac{2+2.5}{2}=2.25$,

人均月用水量在 $[0, 2)$ 内的频率为 $0.04+0.08+0.15+0.22=0.49$,

$$\therefore \frac{0.5-0.49}{0.5}=0.02,$$

$\therefore$ 中位数为 $2+0.02=2.02$.

平均数为 $0.04 \times 0.25 + 0.08 \times 0.75 + 0.15 \times 1.25 + 0.22 \times 1.75 + 0.49 \times 2.25 + 0.02 \times 2.75 + 0.06 \times 3.25 + 0.14 \times 3.75 + 0.02 \times 4.25 = 2.02$.

(3) $\because$ 人均月用水量在 3 t 以上的居民所占的比例为 $6\%+4\%+2\%=12\%$,

$\therefore$ 大约有 12% 的居民人均月用水量在 3 t 以上, $1-12\%=88\%$ 的居民人均月用水量在 3 t 以下 (包括 3 t), 因此自来水厂的解释是正确的.

第九章 统计(B卷)

1. D 解析: 由随机数表法抽取原则可知最方便的编号应为均编排为三位数, 从 000 开始, 到 105 结束. 故选 D.

2. B 解析: 由这组数据的众数为 5 , 可知 $x=5$. 把这组数据由小到大排列为 $-3, 5, 5, 7, 11$, 则可知中位数为 5 .

3. B 解析: 由 $30 \times 75\% = 22.5$ 可知, 样本的第 75 百分位数为第 23 个数, 即这次数学考试成绩的第 75 百分位数为 88 . 故选 B.

4. C 解析: 由题意, 得参加测试的 100 名学生的平均成绩为 $\frac{60 \times 70 + 40 \times 80}{100} = 74$. 故选 C.

5. C 解析: 依题意, 知众数为 4 , 中位数为 $\frac{4+x}{2}$. 因为 $\frac{5}{4} \times 4 = \frac{4+x}{2}$, 解得 $x=6$. 因为平均数 $= \frac{1+4+4+6+7+8}{6} = 5$, 所以方差 $s^2 = \frac{1}{6} \times [(1-5)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2] = \frac{16}{3}$. 故选 C.

6. B 解析: $1\,000 \times \frac{n}{200+1\,200+1\,000} = 80$, 解得 $n=192$.

7. D 解析: $\because$ 方差 $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = 10.2, n=40$,

$\therefore \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2 = 10.2 \times 40 = 408$. 若存在 $x=55$, 则 $(x - \bar{x})^2 = (82 - 55)^2 = 729 > 408$. 导致方差必然大于 10.2 , 不符合题意. $\therefore 55$ 不可能是该班数学成绩, 故选 D.

8. D 解析: ①甲地: 5 个数据的中位数为 7 , 众数为 6 , 则这 5 个数据可能为 $6, 6, 7, 10, 11$, 则连续 5 天的日平均气温不是都低于 10°C , 所以甲地不一定入冬, 故 A 错误. ②乙地: 5 个数据的平均数为 8 , 极差为 3 , 则这 5 个数据可能为 $7, 7, 8, 8, 10$, 则连续 5 天的日平均气温不是都低于 10°C , 所以乙地不一定入冬, 故 B 错误. ③丙地: 5 个数据的平均数为 5 , 中位数为 4 , 则这 5 个数据可能为 $1, 2, 4, 7, 11$, 则连续 5 天的日平均气温不是都低于 10°C , 所以丙地不一定入冬, 故 C 错误. ④丁地: 5 个数据的平均数为 6 , 方差小于 3 . 假设有数据 ≥ 10 , 则方差必大于等于 $\frac{(10-6)^2}{5} = \frac{16}{5} > 3$, 不满足题意, 因此丁地连续 5 天的日平均气温都低于 10°C , 所以丁地一定入冬. 故选 D.

9. ABC 解析: $\because$ 抽取的个体间的间隔是固定的, $\therefore A, B$ 不是简单随机抽样. $\because$ 总体的个体有明显的层次, $\therefore C$ 属于分层抽样. D 是简单随机抽样. 故选 ABC.

10. ABC 解析: 频率分布直方图中各小长方形的面积等于相应各组的频率, 故 A 错误. 一组数据的方差是这组数据的标准差的平方, B 错误. 数据 $2, 3, 4, 5$ 的平均数为 3.5 , 设其方差为 s^2 , $4, 6, 8, 10$ 在 $2, 3, 4, 5$ 的基础上扩大了 2 倍, $\therefore$ 方差将变为原来的 4 倍, $\therefore 4, 6, 8, 10$ 的方差为 $4s^2$, C 错误. 方差越大, 表示这组数据越不稳定, 波动越大, D 正确. 故选 ABC.

11. AC 解析: 设正确记录的数据为 $x_1, x_2, \dots, x_{48}$, 则 $x = \frac{50 \times 70 - 60 - 90 + 80 + 70}{50} = 70$, 因为 $\frac{1}{50} \times [(x_1 - 70)^2 + (x_2 - 70)^2 + \dots + (x_{48} - 70)^2 + (60 - 70)^2 + (90 - 70)^2] = 75$, 所以 $(x_1 - 70)^2 + (x_2 - 70)^2 + \dots + (x_{48} - 70)^2 = 3\,750$, 所以 $s^2 = \frac{1}{50} \times [(x_1 - 70)^2 + (x_2 - 70)^2 + \dots +$

$$(x_{48}-70)^2+(80-70)^2+(70-70)^2]=\frac{1}{50}\times$$

$$(3\,250+100)=67, \text{ 所以 } s^2 < 75, \text{ 故选 AC.}$$

12. AD 解析: 对于 A 选项, 由频率分布直方图可知 $(0.01+m+0.025+0.05)\times 10=1$, 解得 $m=0.015$, 则 A 正确. 对于 B 选项, 该市每个小学生被评为“计算小达人”的概率为 $10\times 0.01=0.1$, 故 B 错误. 对于 C 选项, 被抽取的 1 000 名小学生的平均分大约是 $65\times 0.25+75\times 0.5+85\times 0.15+95\times 0.1=76$ 分, 故 C 错误. 对于 D 选项, 现准备在这 1 000 名学生中, 用分层抽样的方法抽取一个容量为 20 的样本, 则从成绩在 $[80, 100]$ 内需抽取 $20\times (0.015+0.01)\times 10=5$ (人), 故 D 正确. 故选 AD.

13. 15 解析: 设样本容量为 x , 则根据题意, 得 $x\times \frac{350}{750}=7$, 解得 $x=15$.

14. 79% 解析: 学生对餐厅的好评率为 $75\%\times \frac{1\,200}{3\,000}+80\%\times \frac{1\,000}{3\,000}+85\%\times \frac{800}{3\,000}\approx 0.79=79\%$.

15. 210 解析: 10 个数据从小到大排列为 100, 120, 125, 165, 175, 186, 234, 310, 425, 430, $10\times \frac{60}{100}=6$, 因为第 6 个数为 186, 第 7 个数为 234, $\frac{186+234}{2}=210$, 所以第 60 百分位数为 210.

16. 1.6 解析: 设平均每天生产手套 $\bar{x}$, 依题意, 得 $(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2+(x_5-\bar{x})^2=5\times 1.44=7.2$. 则 $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)-2\bar{x}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+5\bar{x}^2=7.2$. 因为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=5\times 4=20$, $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5\bar{x}$, 所以 $20-5\bar{x}^2=7.2$, 解得 $\bar{x}=1.6$.

17. 解: (1) 在频率分布直方图中, 样本在 $[15, 18)$ 内的频率为 $\frac{4}{75}\times 3=\frac{4}{25}$,

$$\text{所以样本容量 } n=\frac{16}{\frac{4}{25}}=16\times \frac{25}{4}=100.$$

(2) 由题意可得, 样本在 $[12, 15)$ 内的频数为 $100\times 0.06=6$.

(3) 因为样本在 $[15, 18)$ 内的频率为 $\frac{4}{25}=0.16$,

在 $[12, 15)$ 内的频率为 0.06,

所以样本在 $[18, 33)$ 内的频率为 $1-0.06-0.16=0.78$.

18. 解: 第一步: 把 450 名同学的学号写在小纸片上, 揉成小球.

第二步: 放到一个不透明的袋子中, 充分搅拌.

第三步: 从中逐个抽出 20 个小球.

这样 20 个学号对应的 20 名学生就是所要抽取的 20 人.

19. 解: (1) 由题意可知, 第 5 组的频率为

$$\frac{2}{1+3+6+4+2}=\frac{1}{8}.$$

$$\text{则样本的容量为 } \frac{12}{\frac{1}{8}}=96.$$

$$(2) \text{ 因为 } [50, 60) \text{ 的频率为 } \frac{1}{1+3+6+4+2}=\frac{1}{16},$$

$$[60, 70) \text{ 的频率为 } \frac{3}{1+3+6+4+2}=\frac{3}{16},$$

$$[70, 80) \text{ 的频率为 } \frac{6}{1+3+6+4+2}=\frac{3}{8},$$

$$[80, 90) \text{ 的频率为 } \frac{4}{1+3+6+4+2}=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{8}=0.625<0.75,$$

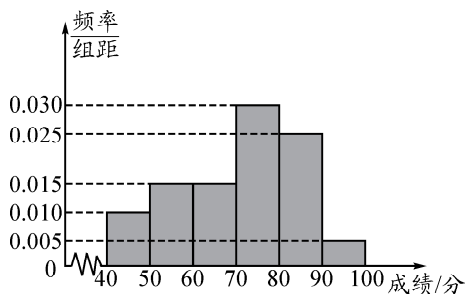
$$\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=0.875>0.75,$$

$\therefore$ 该样本的第 75 百分位数在第 4 组内.

20. 解: (1) 因为各组频率之和等于 1,

所以第四组的频率为 $1-(0.025+0.015\times 2+0.010+0.005)\times 10=0.3$.

补全的频率分布直方图如下:



(2) 依题意, 60 分及以上的分数频率之和为 $(0.015+0.030+0.025+0.005)\times 10=0.75$,

所以抽样学生成绩的及格率是 75%.

抽样学生的平均分为 $45\times 0.10+55\times 0.15+65\times 0.15+75\times 0.30+85\times 0.25+95\times 0.05=71$ 分.

综上, 估计这次考试的及格率是 75%, 平均分是 71 分.

21. 解: (1) 抽取的这 10 名退休职工问卷得分的平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\times (77+79+81+3\times 84+2\times 88+92+93)=85,$$

抽取的这 10 名退休职工问卷得分的方差为

$$s^2 = \frac{1}{10} \times [(77-85)^2 + (79-85)^2 + (81-85)^2 + 3 \times (84-85)^2 + 2 \times (88-85)^2 + (92-85)^2 + (93-85)^2] = 25.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } s = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{所以 } \bar{x} - s = 85 - 5 = 80,$$

$$\bar{x} + s = 85 + 5 = 90.$$

所以这 10 名退休职工问卷得分在 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间的有 6 人,所占的百分比为 60%.

$$22. \text{ 解: (1) 平均成绩为 } \frac{1}{60} \times (4 \times 6 + 5 \times 15 + 6 \times 21 + 7 \times 12 + 8 \times 3 + 9 \times 3) = 6.$$

$$\text{方差 } s^2 = \frac{1}{60} \times [6 \times (4-6)^2 + 15 \times (5-6)^2 + 21 \times (6-6)^2 + 12 \times (7-6)^2 + 3 \times (8-6)^2 + 3 \times (9-6)^2] = 1.5,$$

$$\text{所以标准差 } s = \sqrt{1.5} \approx 1.22.$$

故样本的平均成绩为 6 分,标准差约为 1.22 分.

(2) 因为在调阅的 60 名学生中,有 $12 + 3 + 3 = 18$ (名)学生的预赛成绩在 7 分或 7 分以上,

所以估计该市有 $\frac{18}{60} \times 210 = 63$ (名)学生的预赛成绩在 7 分或 7 分以上.

则估计该市有 63 名学生可以进入复赛.

第十章 概 率(A 卷)

1. C 解析:频率是指在相同条件下重复试验,事件 A 出现的次数除以总数,是变化的. 概率是指在大量重复进行同一个实验时,事件 A 发生的频率总是接近于某个常数,这个常数称为事件 A 的概率,是不变的. 故选 C.

2. C 解析:从 1, 2, 3, 4 这 4 个数中,任取 2 个数求和,则试验的样本空间为 $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. 其中“这 2 个数的和大于 4”包含的样本点有 $(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$, 共 4 个. 故选 C.

3. D 解析:由于只有 2 件次品,故抽出的 3 件产品不可能都是次品,即至少有 1 件正品.

4. B 解析:掷一枚质地均匀的正六面体骰子,共有 6 个基本事件,因为 A 表示事件“出现 2 点”,B 表示事件“出现奇数点”,所以 $A \cup B$ 表示事件“出现 2 点、1 点、3 点、5 点”这 4 个基本事件. 则 $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. 故选 B.

5. B 解析:由题可知,白球数为 $100 \times 0.23 = 23$ (个),则黑球数为 $100 - 32 - 23 = 45$ (个),则摸出黑球的

概率为 $P = \frac{45}{100} = 0.45$. 故选 B.

6. C 解析: $\because$ 事件 B 表示“出现小于 5 的点数”, $\therefore \bar{B}$ 的对立事件 $\bar{B}$ 是“出现大于或等于 5 的点数”. $\therefore \bar{B}$ 表示事件“出现点数为 5 或 6”. 又事件 A 表示“出现小于 5 的偶数点”,它包含的事件是出现点数为 2 或 4, $\therefore P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \therefore P(\bar{B}) =$

$$1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \therefore P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \text{ 故选 C.}$$

7. B 解析:设“第 1 次投进球”为事件 A,“第 2 次投进球”为事件 B,则得 2 分的概率为 $P = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 = 0.48$. 故选 B.

8. D 解析:设取出的三根木棒能搭成三角形为事件 A,任取三根木棒按长度不同共有 1, 3, 5; 1, 3, 7; 1, 3, 9; 1, 5, 7; 1, 5, 9; 1, 7, 9; 3, 5, 7; 3, 5, 9; 3, 7, 9; 5, 7, 9, 共 10 种情况,由于三角形两边之和大于第三边,构成三角形的只有 3, 5, 7; 3, 7, 9; 5, 7, 9 这 3 种情况,故所求概率为 $P(A) = \frac{3}{10}$.

9. ABD 解析:A 选项,若 A 是必然事件,则事件 A 与事件 B 的和事件的概率等于事件 A 的概率, A 选项说法不正确. B 选项,互斥事件不一定是对立事件,所以 B 选项说法不正确. C 选项,如果 A, B 相互独立,则 A, B 可以同时发生,故 A, B 不互斥, C 选项说法正确. D 选项,若事件 A, B 互斥,则 A, B 不能同时发生,所以 A, B 不是相互独立事件, D 选项说法不正确. 故选 ABD.

10. AB 解析:“都是红球”与“都是白球”不能同时发生,是互斥事件, A 正确. “至少有一个红球”与“都是白球”不能同时发生,且必有一个发生,是对立事件, B 正确. “恰有一个白球”与“恰有一个红球”能够同时发生(如 1 红 1 白),不是互斥事件, C 错误. “至少有一个红球”与“至少有一个白球”能够同时发生(如 1 红 1 白),不是互斥事件, D 错误. 故选 AB.

11. ABD 解析:由题意,知 A, B, C 为互斥事件, $\therefore P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$, 故 B 正确, C 错误. $\therefore$ 从 100 件中抽取产品符合古典概型的条件, $\therefore P(A) = \frac{2}{10}, P(B) = \frac{7}{10}, P(C) = \frac{1}{10}$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{9}{10}, \therefore A, D$ 正确. 故选 ABD.

12. ABD 解析:方案一:“选到 3 号球”的概率 $P_1 = \frac{1}{3}$. 方案二:“选到 3 号球”的概率 $P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} +$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 方案三:同时摸出两个球共有 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 共3个基本事件,“选到3号球”包含 $\{1, 3\}, \{2, 3\}$,共2个基本事件,则“选到3号球”的概率 $P_3 = \frac{2}{3}$. $\therefore P_1 < P_2 < P_3, P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3}{2}$. 故选 ABD.

13. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 解析:由分析可知取出的4件产品的次品个数可能为0, 1, 2, 3, 4, 所以样本空间为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

14. 0.7 解析:如果 $A \subseteq B$,那么 $P(A) \leq P(B)$,所以 $P(A \cup B) = P(B) = 0.7$.

15. 0.75 解析:设抽到一等品,二等品,三等品分别为事件 A, B, C ,则

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = 0.93, \\ P(A) + P(C) = 0.82, \\ P(A) + P(B) + P(C) = 1. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} P(A) = 0.75, \\ P(B) = 0.18, \text{所以抽到一等品的概率为 } 0.75. \\ P(C) = 0.07. \end{cases}$$

16. 0.936 解析: $\because$ 李明无法通过面试的概率为 $(1-0.6)^3 = 0.064$, $\therefore$ 李明最终通过面试的概率为 $1-0.064=0.936$.

17. 解:设“乘火车去”为事件 A ,“乘轮船去”为事件 B ,“乘汽车去”为事件 C ,“乘飞机去”为事件 D .

根据题意,得这四个事件是互斥事件.

(1)根据概率的基本性质公式,得 $P(A+D) = P(A) + P(D) = 0.3 + 0.4 = 0.7$.

即他乘火车或乘飞机去的概率为0.7.

(2)根据对立事件的概率公式,得他不乘飞机去的概率 $P=1-P(D)=1-0.4=0.6$.

即他不乘飞机去的概率为0.6.

18. 解:(1)这个试验的样本空间为 $\{(A, B), (A, C), (A, X), (A, Y), (A, Z), (B, C), (B, X), (B, Y), (B, Z), (C, X), (C, Y), (C, Z), (X, Y), (X, Z), (Y, Z)\}$,共15种.

(2)选出的2人来自不同年级且恰有1名男同学和1名女同学的所有可能结果为

$(A, Y), (A, Z), (B, X), (B, Z), (C, X), (C, Y)$,共6种.

因此事件 M 发生的概率 $P(M) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

19. 解:(1)事件 A 为“至少有一次正面向上”,包含“一次正面向上,两次反面向上”,“两次正面向上,一次反面向上”和“3次都正面向上”3个基本事件,所以 $B \subseteq A, C \subseteq A, E \subseteq A$,

$A = B + C + E$.

(2)“至少一次反面向上”为事件 D ,包含“一次正面向上,两次反面向上”,“两次正面向上,一次反面向上”和“3次都反面向上”3个基本事件,

可以看出事件 A 与事件 D 有相同的两个基本事件,即“一次正面向上,两次反面向上”,“两次正面向上,一次反面向上”,

故 $AD = \{\text{一次正面向上或两次正面向上}\}$,

$B+C = \{\text{一次正面向上或两次正面向上}\}$,

所以 $AD = B+C$.

20. 解:(1)设 $A = \text{“取出的两本是相同颜色”}$, $B = \text{“取出的两本是不同颜色”}$,则 A, B 为对立事件.

若取出的两本是相同颜色,则两本的颜色均为黑色或白色,均为白色时有 3×2 种情况,均为黑色时有 3×2 种情况,事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{3 \times 2 + 3 \times 2}{9 \times 6} = \frac{2}{9}$.

由于事件 A 与事件 B 是对立事件,

所以事件 B 发生的概率为 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

(2)随机模拟的步骤:

第1步:利用抓阄法或计算机(计算器)产生1~3和2~4两组取整数值的随机数,每组各有 N 个随机数.用“1”表示取到红皮笔记本,用“2”表示取到黑皮笔记本,用“3”表示取到白皮笔记本,用“4”表示取到黄皮笔记本;

第2步:统计两组对应的 N 对随机数中,每对中的两个数字不同的对数 n ;

第3步:计算 $\frac{n}{N}$ 的值,则 $\frac{n}{N}$ 就是取出的两本笔记本是不同颜色的概率的近似值.

21. 解:(1)“梦之队”在第一轮活动中猜对1个谜语分甲猜对乙猜错、甲猜错与乙猜对两种情况.

则 $\frac{1}{4}(1-p) + \left(1 - \frac{1}{4}\right)p = \frac{5}{12}$,

解得 $p = \frac{1}{3}$.

(2)由(1)知,“梦之队”每一轮活动中猜对1个谜语的的概率为 $\frac{5}{12}$.

每一轮活动中猜对2个谜语的的概率为 $\frac{1}{4} \times$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$,

“梦之队”在两轮活动中猜对3个谜语分为事件 A “第一轮猜对2个,第二轮猜对1个”;事件 B “第一轮猜对1个,第二轮猜对2个”.

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{144},$$

$$P(B) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{5}{144},$$

所以“梦之队”在两轮活动中猜对3个谜语的概率

$$\text{为 } P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{144} + \frac{5}{144} = \frac{5}{72}.$$

22. 解: (1) 分别记小枫的成绩“在90分及以上”“在80~89分之间”“在70~79分之间”“在60~69分之间”为事件 B, C, D, E , 这四个事件彼此互斥.

小枫的成绩在80分及以上的概率是 $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0.22 + 0.45 = 0.67$.

(2) 小枫考试及格(成绩不低于60分)的概率是 $P(B \cup C \cup D \cup E) = P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 0.22 + 0.45 + 0.21 + 0.05 = 0.93$.

第十章 概 率(B卷)

1. D 解析: 甲不输棋包含甲获胜或甲、乙两人下成和棋, 则甲、乙两人下成和棋的概率为 $90\% - 40\% = 50\%$.

2. B 解析: 因为 $P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} = P(A \cup B)$, 所以 A, B 之间的关系一定为互斥事件. 故选 B.

3. C 解析: 将一枚骰子先后抛掷两次, 样本点一共有36个; 方程有实数根, 需满足 $b^2 - 4c \geq 0$. 样本点中满足 $b^2 - 4c \geq 0$ 的有 $(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 6)$, 共19个. 故选 C.

4. C 解析: 从5个点中任取3个点, 有 $ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$, 共10个基本事件, 其中 ACE, BCD , 共2个基本事件中的点不能构成三角形. 故能构成三角形的概率为 $P = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

5. D 解析: 至少有1名男生包含2名全是男生、1名男生1名女生, 故 $A \subseteq D, A \cup C = D$, 故 A, C 正确. 事件 B 与 D 是互斥事件, 故 $B \cap D = \emptyset$, 故 B 正确. $A \cup B$ 表示的是2名全是男生或2名全是女生, $B \cup D$ 表示2名全是女生或至少有1名男生, 故 $A \cup B \neq B \cup D$, D 错误. 故选 D.

6. C 解析: 密码全部由奇数组成且按照递增顺序排列的结果有: $(1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 9), (1, 3, 7, 9), (1, 5, 7, 9), (3, 5, 7, 9)$, 共5个, 它们等可能出现, 设最多输入2次就能开锁的事件为 A , 分为事件 A_1

输入1次能开锁, 事件 A_2 第2次输入才能开锁, 则

$$P(A_1) = \frac{1}{5}, P(A_2) = \frac{1}{5}, \text{ 故 } P(A) = P(A_1) +$$

$$P(A_2) = \frac{2}{5}, \text{ 即最多输入2次就能开锁的概率是}$$

$$\frac{2}{5}. \text{ 故选 C.}$$

7. B 解析: 将3件一等品编号为1, 2, 3; 2件二等品编号为4, 5, 从中任取2件, 有10种取法: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$. 其中恰含有1件一等品的取法有6种: $(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$, 则恰有1件一等品的概率为 $P_1 = \frac{6}{10}$. 恰有2件一等品的取法有3种: $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$, 则恰有2件一等品的概率为 $P_2 = \frac{3}{10}$, 其对立事件是“至多有一件一等品”, 概率为 $P_3 = 1 - P_2 = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. 故选 B.

8. C 解析: 该电路正常工作的概率为 $P\{[(AB) \cup C] \cap D\} = P[(AB) \cup C]P(D) = [1 - P(\overline{AB})P(\overline{C})] \cdot P(D) = [1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})P(\overline{C})]P(D) = [1 - (1 - P(AB))(1 - P(C))]P(D) = [1 - (1 - p^2)(1 - p)]p$. 故选 C.

9. ABC 解析: A, B, C 三个事件发生的概率分别为0.2, 0.3, 0.5. 对于选项 A, B 与 C 有可能同时发生, 故不一定是互斥事件, 故 A 错误. 对于选项 B, $A \cup B$ 与 C 有可能同时发生, 故不一定是对立事件, 故 B 错误. 对于选项 C, A, B, C 不一定是互斥事件, 故 $A \cup B \cup C$ 不一定是必然事件, 故 C 错误. 对于选项 D, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$, $P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\} = 0.3$, 故 D 正确. 故选 ABC.

10. ABD 解析: 事件 A 包含的基本事件类型为: 1 张写有数字 1 张写有字母. 事件 B 包含的基本事件类型为: 1 张写有数字 1 张写有字母. 事件 C 包含的基本事件类型为: 1 张写有数字 1 张写有字母、2 张都写有数字. 事件 D 包含的基本事件类型为: 2 张都写有数字. 事件 E 包含的基本事件类型为: 1 张写有数字 1 张写有字母、2 张都写有数字. 所以 $B \subseteq C, A = B, D \cap E = D, D \subseteq C$. 故选 ABD.

11. BC 解析: 对于①, “取出2个球, 恰有1个白球”, 即为1红1白, “取出2个球, 恰有1个红球”, 即为1红1白, ①中两个事件为相等事件. 对于②, “取出2个球, 都是红球”, 即为2红, ②中的两个事件为互斥事件. 对于③, “取出2个球, 至少有1个白

球”,包含1红1白、2白,③中的两个事件为互斥事件.对于④,“取出2个球,至少有1个红球”,包含1红1白、2红,④中的两个事件不是互斥事件.故选BC.

12. BD 解析:设“从甲盒中摸出1个红球”为事件 A_1 ,“从乙盒中摸出1个红球”为事件 A_2 ,则 $P(A_1)=\frac{1}{3}, P(A_2)=\frac{1}{2}$,且 A_1, A_2 相互独立.对于A,小明得6分的概率为 $P=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$,A错误.对于B,小明得分低于6分的概率为 $P=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$,B正确.对于C,小明得分不少于3分的概率为 $P=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=1-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$,C错误.对于D,小明恰好得3分的概率为 $P=\frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,D正确.

13. $\frac{4}{7}$ 解析:从1,2,3,4,5,6,7这七个数字中随机抽取一个的试验有7个基本事件,其中事件 $A+B$ 含有的基本事件是:2,3,4,6,共4个,所以 $P(A+B)=\frac{4}{7}$.

14. $\frac{1}{2}$ 解析:安排甲、乙、丙三人在3天中值班,每人值1天,故甲在乙之前和乙在甲之前的机会相等, $\therefore$ 概率为 $\frac{1}{2}$.

15. $\frac{5}{6}$ 解析:从这7人中选出数学、物理、化学成绩优秀者各1名,所有可能的结果组成12个样本点: $(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_2, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_2), (A_3, B_2, C_1), (A_3, B_2, C_2)$.其中 A_1 和 B_1 全被选中2个样本点: $(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2)$,则 A_1 和 B_1 不全被选中共有 $12-2=10$ (个)样本点,概率为 $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

16. $\frac{11}{24}$ 解析:只有1人解出来分三种情况:只有甲解出来,概率为 $\frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$;只有乙解出来,概率为 $(1-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$;只有丙解出来,概率为 $(1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.三种情况相加得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$.即只有1人解出的概率为 $\frac{11}{24}$.

17. 解:每次取出一件,取后不放回地连续取两次,所有可能的结果组成的基本事件有6个: $(a_1, a_2), (a_1, b), (a_2, a_1), (a_2, b), (b, a_1), (b, a_2)$.

其中小括号内左边的字母表示第1次取出的产品,右边的字母表示第2次取出的产品,

用A表示“取出的两件产品中,恰好有一件次品”,则 $A=\{(a_1, b), (a_2, b), (b, a_1), (b, a_2)\}$,

即事件A由4个基本事件组成.

所以 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

18. 解:(1)样本空间 $\Omega=\{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2)\}$.

所以 $n(\Omega)=12$.

因为 $A=\{(1,0), (1,2), (1,3)\}$,

所以 $n(A)=3$.

从而 $P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

因为 $B=\{(0,2), (1,2), (3,2)\}$,

所以 $n(B)=3$.

从而 $P(B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

(2)因为 $A \cap B = \{(1,2)\}$,

所以A与B不是互斥事件.

又 $A \cup B = \{(1,0), (1,2), (1,3), (0,2), (3,2)\}$,

所以 $n(A \cup B)=5$.

从而 $P(A \cup B)=\frac{5}{12}$.

19. 解:(1)分别记小江的成绩在90分以上,在 $[80, 90]$, $[70, 80]$, $[60, 70]$ 为事件B,C,D,E.则这四个事件彼此互斥.

小江的成绩在80分及以上的概率 $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0.25 + 0.48 = 0.73$.

(2)方法一:小江在此次数学考试中及格(成绩不低于60分)的概率 $P(B \cup C \cup D \cup E) = P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 0.25 + 0.48 + 0.11 + 0.09 = 0.93$.

方法二:因为小江此次数学考试不及格(成绩在60分以下)的概率是0.07,

根据对立事件的概率公式,得小江在此次数学考试中及格(成绩不低于60分)的概率是 $1-0.07=0.93$.

20. 解: (1) 记比赛恰进行两局就结束为事件 A , 分两种可能,

事件 A_1 : 甲第一、二局都胜,

$$P(A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

事件 A_2 : 乙第一、二局都胜.

$$P(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25},$$

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}.$$

(2) 记这场比赛甲获胜为事件 B , 分两种可能, 事件 B_1 : 甲第一、二局都胜,

事件 B_2 : 第一、二局中甲胜一局, 第三局甲胜.

$$P(B_1) = \frac{9}{25},$$

$$P(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}.$$

$$\text{则 } P(B) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{9}{25} + \frac{36}{125} = \frac{81}{125}.$$

21. 解: (1) 甲、乙两人下车的所有可能的结果为 $(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$.

(2) 设甲、乙两人同在第 3 号车站下车的事件为 A ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{1}{9}.$$

(3) 设甲、乙两人在不同的车站下车的事件为 B ,

$$\text{则 } P(B) = 1 - 3 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}.$$

22. 解: (1) 由题意, 得 $m \in \{1, 2, 3, 4\}, n \in \{-1, 2, 4, 6, 8\}$,

数对 (m, n) 的样本空间为 $\Omega = \{(1, -1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, -1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, -1), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (4, -1), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8)\}$.

(2) 由题意可知二次函数 $f(x)$ 的开口向上.

若单调递增区间为 $[1, +\infty)$,

则二次函数 $f(x)$ 的对称轴 $x = \frac{n}{2m} = 1$, 则 $n = 2m$.

由(1)可得, 总的基本事件个数为 20,

符合 $n = 2m$ 的基本事件为: $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$, 共 4 个.

$$\therefore P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

(3) $\because m > 0$, 二次函数的图象开口向上,

方程 $|f(x)| = 2$ 有 4 个零点,

则方程 $f(x) = 2$ 和 $f(x) = -2$ 各有 2 个零点.

即二次函数 $f(x) = mx^2 - nx - 1$ 的最小值小于 -2 ,

$$\therefore \frac{-4m - n^2}{4m} < -2, \text{ 即 } n^2 > 4m.$$

样本空间中符合 $n^2 > 4m$ 的基本事件有: $(1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (4, 6), (4, 8)$, 共 11 个.

$$\therefore P(B) = \frac{11}{20}.$$

专题一 平面向量的综合运用(A 卷)

1. B 解析: $2(a - 3b) - 3(a + b) = 2a - 6b - 3a - 3b = -a - 9b$. 故选 B.

2. C 解析: 由向量的数量积的运算公式, 可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A < 0$, 即 $\cos A < 0$. 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 A 为钝角, 所以 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形. 故选 C.

3. C 解析: 将 $|a + b| = 5\sqrt{2}$ 两边平方, 得 $5 + 2 \times 10 + b^2 = 50$. $\therefore b^2 = 25$, 则 $|b| = 5$. 故选 C.

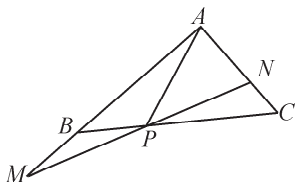
4. A 解析: $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别表示的是 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量, 由向量加法运算法则可知射线 AP 在 $\triangle ABC$ 角 A 的平分线上, 故射线 AP 经过 $\triangle ABC$ 的内心. 故选 A.

5. C 解析: 因为 $C = 120^\circ$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab$. 又 $(a + b)^2 - c^2 = 4$, 故 $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 4 = a^2 + b^2 + ab$, 故 $ab = 4$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times ab \times \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$. 故选 C.

6. B 解析: 设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{BP} = t \overrightarrow{BC}$, 因为 $\overrightarrow{BC} = b - a$, 则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = a + t(b - a)$. 故 $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = [a + t(b - a)] \cdot (a + b) = (1 - t)a^2 + a \cdot b + t b^2 = 4(1 - t) + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 4t = 6$. 故选 B.

7. A 解析: 设向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 θ . 由 $|\overrightarrow{AP}| \geq 2$, 得 $|\overrightarrow{AP}|^2 = (\lambda \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AD})^2 \geq 4$, 即 $\lambda^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 4 |\overrightarrow{AD}|^2 + 4\lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \geq 4$. 则 $\lambda^2 + 4\lambda \cos \theta + 3 \geq 0$ 关于 λ 恒成立. 所以 $(4 \cos \theta)^2 - 4 \times 3 \leq 0$, 即 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故向量 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影 $|\overrightarrow{AD}| \cos \theta = 2 \cos \theta \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. 故选 A.

8. A 解析:由题设,如图所示.



$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{3} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{3} = \frac{2\overrightarrow{AB}}{3} + \frac{\overrightarrow{AC}}{3}$. 又 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$ ($x > 0, y > 0$), $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AM}}{3x} + \frac{\overrightarrow{AN}}{3y}$. 由 M, P, N 三点共线, 得 $\frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = 1$. $\therefore 2x + y = (2x + y) \left(\frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} \right) = \frac{5}{3} + \frac{2x}{3y} + \frac{2y}{3x} \geq \frac{5}{3} + 2\sqrt{\frac{2x}{3y} \cdot \frac{2y}{3x}} = 3$, 当且仅当 $x = y$ 时等号成立. 故选 A.

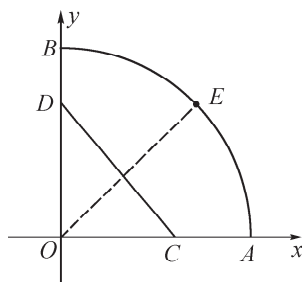
9. ABC 解析:因为向量 $\mathbf{a} = (4, 3 - m)$, $\mathbf{b} = (1, m)$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 所以 $4 \times 1 + (3 - m)m = 0$. 解得 $m = 4$ 或 $m = -1$, 故 A 正确. 当 $m = \frac{3}{5}$ 时, $\mathbf{a} = (4, \frac{12}{5})$, $\mathbf{b} = (1, \frac{3}{5})$, 因为 $4 \times \frac{3}{5} = 1 \times \frac{12}{5}$, 所以 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 故 B 正确. 因为 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (6, 3 + m)$, 所以 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{(m+3)^2 + 36}$, 当 $m = -3$ 时, $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$ 取最小值 6, 故 C 正确. 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为锐角, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ 且不同向, 所以 $\begin{cases} 4 \times 1 + (3 - m)m > 0, \\ m \neq \frac{3}{5}, \end{cases}$ 解得 $-1 < m < 4$ 且 $m \neq \frac{3}{5}$, 故 D 不正确. 故选 ABC.

10. BD 解析: $\because$ 点 A 为 BC 的中点, $\therefore \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. 又 O, E, A 三点共线, 则可设 $\overrightarrow{OE} = \lambda \overrightarrow{OA} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. $\because \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\therefore \overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$. $\therefore \overrightarrow{OE} = \frac{3\lambda}{4}\overrightarrow{OD} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$. 又 C, E, D 三点共线, $\therefore \frac{3\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 1$, $\therefore \lambda = \frac{4}{5}$. $\therefore \overrightarrow{OE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$, $\therefore OE = 4AE$, 故 C 错误. $\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CO}$, $\therefore$ A 错误. $\because \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) - \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} +$

$\frac{1}{5}\overrightarrow{CO}$, $\therefore$ B 正确. $\because S_{\triangle AEC} = \frac{1}{5}S_{\triangle OAC} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}S_{\triangle OBC} = \frac{1}{10}S_{\triangle OBC}$, $\therefore \triangle AEC$ 与 $\triangle OBC$ 的面积之比为 $1:10$, 故 D 正确. 故选 BD.

11. AC 解析: $\because \sqrt{3}(a \cos C + c \cos A) = 2b \sin B$, $\therefore \sqrt{3}(\sin A \cos C + \sin C \cos A) = 2 \sin B \cdot \sin B$. $\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\because B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$. 故 A 正确. 又 $\because \angle CAB = \frac{\pi}{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \angle ACB = \frac{\pi}{3}$, 故 B 错误. 设等边 $\triangle ABC$ 的边长为 x , $x > 0$, 在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理, 得 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos D$. $\because AD = 3, DC = 1$, $\therefore x^2 = 10 - 6 \cos D$. $\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}x \cdot x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 3 \times \sin D = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{2} \sin D = \frac{\sqrt{3}}{4}(10 - 6 \cos D) + \frac{3}{2} \sin D = 3 \sin(D - \frac{\pi}{3}) + \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $\therefore$ 四边形 ABCD 面积的最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2} + 3$, 此时 $D - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $D = \frac{5\pi}{6}$, 故 C 正确, D 错误. 故选 AC.

12. BCD 解析:建立平面直角坐标系, 连接 OE, 如图所示.



则 $B(0, 1)$, $A(1, 0)$, 设 $\angle EOA = \theta$, 则 $E(\cos \theta, \sin \theta)$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), $\overrightarrow{OE} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$. 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OE} = \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$. 因为 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\theta - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. 所以 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OE} \in [-1, 1]$, 则 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最小值为 -1 , 故 A 错误. 因为 $\overrightarrow{EA} = (1 - \cos \theta, -\sin \theta)$, $\overrightarrow{EB} = (-\cos \theta, 1 - \sin \theta)$, 所以 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 - \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$. 因为 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, 所以

$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. 所以 $1 - \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [1 - \sqrt{2}, 0]$, 即 $\vec{EA} \cdot \vec{EB} \in [1 - \sqrt{2}, 0]$. 所以 $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$ 的最小值为 $1 - \sqrt{2}$, 故 B 正确.

设 $C(t, 0) (t \in [0, 1])$, 又 $|CD| = 1$, 所以 $|OD| = \sqrt{1-t^2}$, 则 $D(0, \sqrt{1-t^2})$. 因为 $\vec{EC} = (t - \cos \theta, -\sin \theta)$, $\vec{ED} = (-\cos \theta, \sqrt{1-t^2} - \sin \theta)$, 所以 $\vec{EC} \cdot \vec{ED} = -t \cos \theta + \cos^2 \theta - \sqrt{1-t^2} \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 - (t \cos \theta + \sqrt{1-t^2} \sin \theta) = 1 - \sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \sqrt{1-t^2}$, $\sin \varphi = t$. 又 $t \in [0, 1]$, 所以 $\cos \varphi, \sin \varphi \in [0, 1]$. 所以 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi + \theta \in [0, \pi]$, $\sin(\varphi + \theta) \in [0, 1]$, $-\sin(\varphi + \theta) \in [-1, 0]$, 所以 $\vec{EC} \cdot \vec{ED} \in [0, 1]$. 则 $\vec{EC} \cdot \vec{ED}$ 的最小值为 0, 最大值为 1. 故 CD 正确. 故选 BCD.

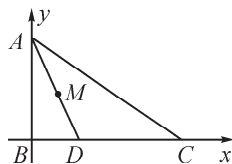
13. $(\frac{12}{5}, -\frac{1}{5})$ 或 $(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5})$ 解析: $b = (-3, 4)$, $|b| = 5$, 由向量的平移可知与 $b = (-3, 4)$ 平行的单位向量为: $\pm \frac{1}{5}(-3, 4)$. 设 a 的终点坐标是 (x, y) , 则 $(x-3, y+1) = \pm \frac{1}{5}(-3, 4)$. 所以 a 的终点坐标是 $(\frac{12}{5}, -\frac{1}{5})$ 或 $(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5})$.

14. $(\sqrt{6} - 1)$ 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = 3$, $|AC| = 2$, $\angle ACB = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$, 由余弦定理, 得 $9 = |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cos 120^\circ = 4 + |BC|^2 + 2|BC|$. 所以 $|BC|^2 + 2|BC| - 5 = 0$. 因为 $|BC| > 0$, 所以 $|BC| = \sqrt{6} - 1$.

15. $\{1\} \cup [2, +\infty)$ 解析: 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{1}{\sin B}$. 当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, $a = 1$, 此时 $\triangle ABC$ 有唯一解; 当 $\sin B \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, B 有两个值, $\triangle ABC$ 不唯一; 当 $\sin B \in (0, \frac{1}{2}]$ 时, $a \geq 2$, 即 $a \geq b, A \geq B$, 则 B 有唯一值, $\triangle ABC$ 唯一. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{1\} \cup [2, +\infty)$.

16. 7 解析: 由余弦定理, 得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cos A = 4 + 16 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 12$. $\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$. $\therefore AB \perp BC$. $\therefore$ 以 B 为原点,

BC 所在直线为 x 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $B(0, 0), C(2\sqrt{3}, 0), A(0, 2)$. 设 $D(2x, 0)$, 则 $M(x, 1), 0 \leq x \leq \sqrt{3}$. 易知 $\vec{MB} + \vec{MC} = (2\sqrt{3} - 2x, -2), \vec{AD} = (2x, -2)$. 则 $(\vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{AD} = 2x(2\sqrt{3} - 2x) + 4 = -4x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = -4(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 7$, 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $(\vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{AD}$ 取最大值 7.



17. 解: (1) 设 a 与 b 的夹角为 θ ,

由已知得 $|3a - 2b|^2 = 7$,

即 $9a^2 - 12a \cdot b + 4b^2 = 7$.

所以 $9 - 12a \cdot b + 4 = 7$.

则 $a \cdot b = \frac{1}{2}$.

所以 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{2}$.

因为 $\theta \in [0, \pi]$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 即 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(2) $|2a + 3b| = \sqrt{(2a + 3b)^2} = \sqrt{4a^2 + 12a \cdot b + 9b^2} = \sqrt{4 + 6 + 9} = \sqrt{19}$.

18. (1) 证明: 因为 $m \parallel n$,

所以 $a \sin A = b \sin B$,

即 $a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R}$, 其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

所以 $a = b$.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2) 解: 因为 $m \perp p$,

所以 $a(b-2) + b(a-2) = 0$.

所以 $a + b = ab$.

由余弦定理可知, $4 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab$,

即 $(ab)^2 - 3ab - 4 = 0$.

解得 $ab = 4$ 或 $ab = -1$ (舍去).

所以 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

19. 解: (1) $\because \vec{OA} = (1, 5), \vec{OB} = (7, 1), \vec{OM} = (1, 2)$,

$\vec{OP} = \lambda \vec{OM}$,

$\therefore \vec{OP} = \lambda \vec{OM} = (\lambda, 2\lambda)$,

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (7, 1) - (1, 5) = (6, -4)$,

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (\lambda, 2\lambda) - (1, 5) = (\lambda - 1, 2\lambda - 5)$.

当 A, B, P 三点共线时, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AP}$.

所以 $6(2\lambda - 5) - (-4)(\lambda - 1) = 0$.

解得 $\lambda = \frac{17}{8}$.

(2) $\because \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (1 - \lambda, 5 - 2\lambda)$,

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (7 - \lambda, 1 - 2\lambda)$,

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (1 - \lambda)(7 - \lambda) + (5 - 2\lambda)(1 - 2\lambda)$

$$= 5\lambda^2 - 20\lambda + 12$$

$$= 5(\lambda - 2)^2 - 8.$$

$\therefore$ 当 $\lambda = 2$ 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 取得最小值 -8 ,

此时 $\overrightarrow{OP} = (2, 4)$.

$\therefore \overrightarrow{PA} = (-1, 1)$, $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{2}$,

$\overrightarrow{PB} = (5, -3)$, $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{34}$.

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -5 - 3 = -8$,

$\therefore \cos \angle APB = \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} =$

$$\frac{-8}{\sqrt{2} \times \sqrt{34}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

20. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,

因为向量 n 与向量 m 共线,

则 $(2a - c) \cdot \cos B = b \cdot \cos C$,

由正弦定理, 得 $(2\sin A - \sin C) \cdot \cos B = \sin B \cdot \cos C$.

所以 $2\sin A \cdot \cos B = \sin(B + C) = \sin A$.

因为 $A, B \in (0, \pi)$,

所以 $\sin A > 0$.

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$, 则 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 且 $CD = 1, AD = \sqrt{7}$,

所以 $BD = 2$,

$BC = BD + CD = 3$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos B$,

即 $7 = AB^2 + 4 - 2AB \times 2 \cos \frac{\pi}{3}$.

所以 $AB^2 - 2AB - 3 = 0$,

解得 $AB = 3$ 或 $AB = -1$ (舍去).

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

21. 解: 在 $\triangle ABC$ 中, $4a \cos A = c \cos B + b \cos C$,

$\therefore 4 \sin A \cos A = \sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin(B + C) = \sin A$.

$\therefore \sin A > 0$,

$$\therefore \cos A = \frac{1}{4}, \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

(1) $\because a = 4$,

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}bc = 16. \quad ①$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}bc$.

$$\frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15},$$

$\therefore bc = 8. \quad ②$

由①②组成方程组,

解得 $b = 4, c = 2$ 或 $b = 2, c = 4$.

(2) $\because \sin B = k \sin C (k > 0)$,

$\therefore b = kc$.

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = (kc)^2 + c^2 - 2kc \cdot c \cdot$

$$\frac{1}{4} = (k^2 - \frac{1}{2}k + 1)c^2.$$

又 C 为钝角, 则 $a^2 + b^2 < c^2$.

所以 $(k^2 - \frac{1}{2}k + 1) + k^2 < 1$.

解得 $0 < k < \frac{1}{4}$.

所以 k 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4})$.

22. 解: (1) $\because b \cos C + c \cos B = 2a \cos A$,

$\therefore \sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin A \cos A$,

即 $\sin(B + C) = \sin A = 2 \sin A \cos A$.

则 $\sin A = 2 \sin A \cos A$.

又在 $\triangle ABC$ 中, $0 < A < \pi, \sin A > 0$,

$\therefore \cos A = \frac{1}{2}$,

则 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由题意可知 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

设 $DC = x$, 则 $BD = 2x$.

由正弦定理, 得 $\frac{AD}{\sin C} = \frac{DC}{\sin \angle CAD}$,

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{\sin C} = \frac{x}{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2x}{\frac{1}{2}},$$

所以 $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} = 2$.

由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{c^2 + (2x)^2 - 3}{2c \cdot 2x} =$

$$\frac{c^2 + (3x)^2 - b^2}{2c \cdot 3x},$$

解得 $c^2 - 6x^2 + 2b^2 - 9 = 0$.

又 $c=2b$,

所以 $x^2=b^2-\frac{3}{2}$.

由余弦定理,得 $\cos \angle BAC=\frac{b^2+c^2-(3x)^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

即 $\frac{b^2+4b^2-9b^2+\frac{27}{2}}{2b \cdot 2b}=\frac{1}{2}$.

解得 $b=\frac{3}{2}$.

所以 $c=3, x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 \times$

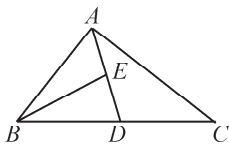
$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

专题一 平面向量的综合运用(B卷)

1. D 解析: 因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$, 即 $AD=BC$ 且 $AD \parallel BC$. 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 故选 D.

2. A 解析: 若 $a+b=0$, 则 $a=-b$, 则 $a \parallel b$, 即充分性成立. 若 $a \parallel b$, 则 $a=-b$ 不一定成立, 所以必要性不成立. 即“ $a+b=0$ ”是“ $a \parallel b$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

3. A 解析: 如图所示.



由题意, 得 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. 故选 A.

4. B 解析: 设 a 与 b 的夹角为 θ , $\because a \perp (a-b)$, $\therefore a \cdot (a-b)=|a|^2-a \cdot b=|a|^2-|a| \cdot |b| \cos \theta=0$. $\therefore \cos \theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore$ 向量 a 在 b 方向上的投影为 $|a| \cdot \cos \theta=1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

5. B 解析: 因为 $a\overrightarrow{BA}+(b-2c)\overrightarrow{BC}+c\overrightarrow{AC}=0$, 所以 $(a-c)\overrightarrow{BA}+(b-c)\overrightarrow{BC}=0$. 所以 $a-c=0, b-c=0$. 所以 $a=b=c$. 故 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 故选 B.

6. C 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, $\because \sin A:\sin B:\sin C=2:3:\sqrt{7}$, $\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:3:\sqrt{7}$. 设 $a=2x, b=3x, c=\sqrt{7}x$, 又 $a+b+c=10+$

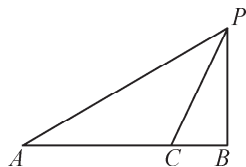
$2\sqrt{7}$, 则 $2x+3x+\sqrt{7}x=10+2\sqrt{7}$, 解得 $x=2$. 则

$a=4, b=6, c=2\sqrt{7}$, 且 $p=\frac{a+b+c}{2}=5+\sqrt{7}$.

$\therefore S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$\sqrt{(5+\sqrt{7}) \times (5+\sqrt{7}-4) \times (5+\sqrt{7}-6) \times (5+\sqrt{7}-2\sqrt{7})}$
 $=6\sqrt{3}$. 故选 C.

7. C 解析: 如图所示.



因为 $\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|}$, 所以 $\angle APC=\angle BPC$, 即

PC 平分 $\angle APB$. 由 $AB=4, \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{CB}$, 得 $AC=3$,

$BC=1$. 易知 $\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=3$. 设 $PB=x$, 则 $PA=3x$,

由 $PA+PB>AB, PA-PB<AB$, 得 $1<x<2$. 因

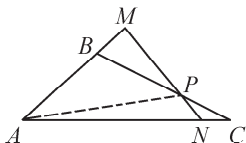
为 $\cos \angle PAB=\frac{16+9x^2-x^2}{2 \times 3x \times 4}=\frac{2}{3x}+\frac{x}{3} \geq 2\sqrt{\frac{2}{9}}=$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 当且仅当 $\frac{2}{3x}=\frac{x}{3}$, 即 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立, 即

$\cos \angle PAB$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以 $\sin \angle PAB$ 的最

大值是 $\frac{1}{3}$. 故选 C.

8. B 解析: 连接 AP , 如图所示.



$\because \overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PC}, \therefore \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}), \therefore \overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. $\because \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,$

$\mu>0)$, $\therefore \overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}=\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AN}$. $\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{4\mu}\overrightarrow{AN}$. $\because P, M, N$ 三点共线, $\therefore \frac{1}{4\lambda}+\frac{3}{4\mu}=$

$1, \therefore \lambda+\mu=(\lambda+\mu)(\frac{1}{4\lambda}+\frac{3}{4\mu})=1+\frac{\mu}{4\lambda}+\frac{3\lambda}{4\mu} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}+$

1 , 当且仅当 $\frac{\mu}{4\lambda}=\frac{3\lambda}{4\mu}$, 即 $\mu=\sqrt{3}\lambda$ 时等号成立, $\therefore \lambda+\mu$

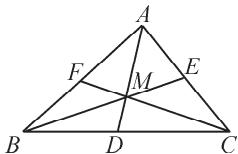
的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$. 故选 B.

9. ABD 解析: 如图所示, 连接 BM, CM 并延长分别

交 AC, AB 于 E, F . 因为 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, D 为边 BC 的中点, 所以 E, F 分别是边 AC, AB 的中点.

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-$

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 故 A 选项正确. $\because D$ 为 BC 的中点, $\therefore \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$. 又 $\because M$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\therefore |MA| = 2|MD|$. $\therefore \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} = \mathbf{0}$. 即 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$, 故 B 选项正确. 根据三角形重心的性质, 可得 $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, 故 C 选项不正确. 由重心的性质, 可得 $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, 故 D 选项正确. 故选 ABD.



10. CD 解析: 对于 A, $\because \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} =$

$$\frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi], \therefore \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \text{ 为锐角,}$$

故 A 错误. 对于 B, 向量 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的投影为

$$|\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 B 错误. 对于}$$

C, $\because \mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2)$, 又 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \parallel \mathbf{c}$, $\therefore -n = 2(m-2)$, 即 $2m+n=4$, 故 C 正确. 对于 D, $\because m, n$

均为正数, 又 $2m+n=4$, $\therefore 2mn \leq \left(\frac{2m+n}{2}\right)^2 = 4$

(当且仅当 $2m=n=2$ 时取等号), $\therefore mn \leq 2$, 即 mn 的最大值为 2, 故 D 正确. 故选 CD.

11. AD 解析: $\because A+B+C=\pi, A+3C=\pi, \therefore B=2C$.

$$\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } 2\sqrt{3} \sin C = 3 \times 2 \sin C \cos C,$$

$$\sin C \neq 0, \therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin C = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin B = \sin 2C =$$

$$2 \sin C \cos C = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \therefore$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0. \text{ 解得 } a = 3 \text{ 或 } a = 1. \text{ 若 } a = 3, \text{ 则 } A = C = \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } B = \frac{\pi}{2}, \text{ 不满足题意, 故 } a = 1. \therefore$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}. \text{ 故}$$

选 AD.

12. BCD 解析: 由 G 是 $\triangle ABC$ 的重心可得 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$$

$$\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = -4, \text{ 故 A 选项错误.}$$

过 $\triangle ABC$ 的外心 O 分别作 AB, AC 的垂线, 垂足为 D, E , 如图 1, 易知 D, E 分别是 AB, AC 的中点, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle OAE - |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}| \cos \angle OAD = |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = -6$, 故 B 选项正确.

因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以有 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG}$.

由欧拉线定理可得 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, 故 C 选项正确.

如图 2, 由 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ 可得 $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$,

$$\text{即 } \overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HM}, \text{ 则 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} =$$

$$6\overrightarrow{GM} = 6 \times \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HM}\right) = 4\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{HM}, \text{ 故}$$

D 选项正确.

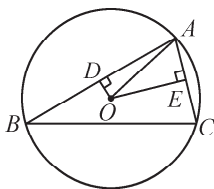


图 1

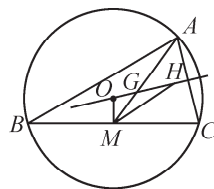


图 2

故选 BCD.

13. $\sqrt{3}$ 解析: 因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为单位向量, 所以 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, 所以 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2} = \sqrt{2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = 1$. 解得 $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$. 所以 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2} = \sqrt{3}$.

14. $\frac{28}{29}$ 解析: 由 $|2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2 \leq 2$, 解

$$\text{得 } \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \geq \frac{3}{4}. \therefore \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} =$$

$$\frac{(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)}{\sqrt{(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^2} \times \sqrt{(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^2}} =$$

$$\frac{4 + 4\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\sqrt{2 + 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2} \times \sqrt{10 + 6\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}}, \text{ 设 } \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = x,$$

$$\text{则 } \cos^2 \theta = \frac{16(x+1)^2}{(2+2x)(10+6x)} = \frac{16(x+1)^2}{12x^2 + 32x + 20} =$$

$$\frac{4(x+1)^2}{3x^2 + 8x + 5} = \frac{4(x+1)^2}{3(x+1)^2 + 2(x+1)} = \frac{4}{3 + \frac{2}{x+1}}, \text{ 当}$$

$$x \geq \frac{3}{4} \text{ 时, } \cos^2 \theta \in \left[\frac{28}{29}, 1\right], \therefore \cos^2 \theta \text{ 的最小值}$$

是 $\frac{28}{29}$.

15. $\frac{18}{5}$ 或 0 解析: $\because A, D, P$ 三点共线, $\therefore$ 可设 $\overrightarrow{PA} =$

$$\lambda \overrightarrow{PD} (\lambda > 0). \because \overrightarrow{PA} = m \overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right) \overrightarrow{PC}, \therefore$$

$$\lambda \overrightarrow{PD} = m \overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right) \overrightarrow{PC}, \text{ 即 } \overrightarrow{PD} = \frac{m}{\lambda} \overrightarrow{PB} +$$

$$\left(\frac{3}{2} - m\right) \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{PC}. \text{ 若 } m \neq 0 \text{ 且 } m \neq \frac{3}{2}, \therefore B, D, C \text{ 三点}$$

$$\text{共线, } \therefore \frac{m}{\lambda} + \frac{\left(\frac{3}{2} - m\right)}{\lambda} = 1, \text{ 即 } \lambda = \frac{3}{2}. \therefore AP = 9,$$

$$\therefore AD = 3. \because AB = 4, AC = 3, \angle BAC = 90^\circ, \therefore$$

$$BC = 5. \text{ 设 } CD = x, \angle CDA = \theta, \text{ 则 } BD = 5 - x,$$

$$\angle BDA = \pi - \theta. \therefore \cos \theta = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{x}{6},$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{(5-x)^2 - 7}{6 \times (5-x)}.$$

$$\therefore \cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0, \therefore \frac{x}{6} + \frac{(5-x)^2 - 7}{6 \times (5-x)} = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{18}{5}, \therefore CD \text{ 的长度为 } \frac{18}{5}.$$

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时, } \overrightarrow{PA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{PC}, C, D \text{ 两点重合, 此时}$$

$$PC = 6, AC = 3, CD \text{ 的长度为 } 0,$$

$$\text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{PA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{PB}, B, D \text{ 重合, 此时 } PB = 6,$$

$$AB = 3, \text{ 不合题意, 舍去.}$$

16. $\frac{9}{8}$ 解析: $\because S = \frac{1}{2} ac \sin B$, 则 $2abcsin B = a(b^2 +$

$$c^2 - a^2), \therefore \sin B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right). \text{ 又 } B \text{ 为钝角, } \therefore A \text{ 为锐角. } \therefore B +$$

$$\frac{\pi}{2} - A = \pi, \text{ 即 } B = \frac{\pi}{2} + A. \text{ 又 } C = \pi - (A + B), \therefore$$

$$\cos B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = -\sin A \text{ 且 } \sin B =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = \cos A. \because \sin A + \sin C = \sin A +$$

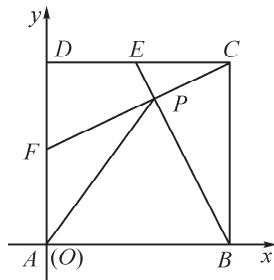
$$\sin(A + B) = \sin A(1 + \cos B) + \cos A \sin B =$$

$$\sin^2 B - \cos^2 B - \cos B = 1 - \cos B - 2 \cos^2 B =$$

$$-2\left(\cos B + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}, \therefore \text{ 当 } \cos B = -\frac{1}{4} \text{ 时,}$$

$$\sin A + \sin C \text{ 取最大值 } \frac{9}{8}.$$

17. 证明: 如图, 建立平面直角坐标系 xOy , 其中 A 为坐标原点, 不妨设 $AB = 2$,



则 $A(0,0), B(2,0), C(2,2), E(1,2), F(0,1)$.

$$(1) \because \overrightarrow{BE} = (-1, 2),$$

$$\overrightarrow{CF} = (-2, -1),$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF} = (-1) \times (-2) + 2 \times (-1) = 0.$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CF},$$

$$\text{即 } BE \perp CF.$$

$$(2) \text{ 设 } P(x, y), \text{ 则 } \overrightarrow{FP} = (x, y-1).$$

$$\because \overrightarrow{CF} = (-2, -1),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{FP} \parallel \overrightarrow{CF},$$

$$\therefore -x = -2(y-1),$$

$$\text{即 } x = 2y - 2.$$

$$\text{同理由 } \overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{BE}, \text{ 得 } y = -2x + 4,$$

$$\text{代入 } x = 2y - 2 \text{ 中,}$$

$$\text{解得 } x = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore y = \frac{8}{5}, \text{ 即 } P\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 4 = \overrightarrow{AB}^2.$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|,$$

$$\text{即 } AP = AB.$$

18. 解: (1) $\because \sin(A + C) = 8 \sin^2 \frac{B}{2},$

$$\therefore \sin B = 4(1 - \cos B).$$

$$\therefore \sin^2 B + \cos^2 B = 1.$$

$$\therefore 16(1 - \cos B)^2 + \cos^2 B = 1,$$

$$\therefore (17 \cos B - 15)(\cos B - 1) = 0.$$

$$\therefore \cos B = \frac{15}{17}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } \sin B = \frac{8}{17}.$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = 2,$$

$$\therefore ac = \frac{17}{2}.$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 2 \times \frac{17}{2} \times \frac{15}{17} =$$

$$a^2 + c^2 - 15 = (a + c)^2 - 2ac - 15 = 36 - 17 - 15 = 4.$$

$$\therefore b = 2.$$

19. 解: (1) 因为 $b \cos A = c - \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$\text{所以 } b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c - \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\text{所以 } b^2 + c^2 - a^2 = 2c^2 - \sqrt{3}ac,$$

$$\text{即 } c^2 + a^2 - b^2 = \sqrt{3}ac.$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{ 在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } c = \frac{AH}{\sin B} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2.$$

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}a = 2\sqrt{3}, \text{ 解得 } a = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{由余弦定理可得, } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 48 + 4 - 2 \times 2 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28,$$

$$\text{则 } b = 2\sqrt{7}.$$

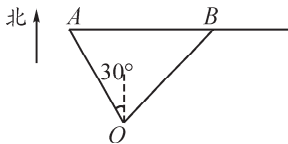
20. 解: (1) 设相遇时小艇航行的距离为 S n mile, 则

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{900t^2 + 400 - 2 \times 30t \times 20 \times \cos(90^\circ - 30^\circ)} \\ &= \sqrt{900t^2 - 600t + 400} \\ &= \sqrt{900\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 300}. \end{aligned}$$

$$\text{故当 } t = \frac{1}{3} \text{ 时, } S_{\min} = 10\sqrt{3},$$

$$\text{此时 } v = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}} = 30\sqrt{3} \text{ (n mile/h)},$$

即小艇以 $30\sqrt{3}$ n mile/h 的速度航行, 相遇时小艇的航行距离最小.



(2) 设小艇与轮船在 B 处相遇, 小艇的航行速度为 v , 则

$$v^2 t^2 = 400 + 900t^2 - 2 \times 20 \times 30t \times \cos(90^\circ - 30^\circ),$$

$$\text{则 } v^2 = 900 - \frac{600}{t} + \frac{400}{t^2}.$$

$$\because 0 < v \leq 30,$$

$$\therefore 900 - \frac{600}{t} + \frac{400}{t^2} \leq 900,$$

$$\text{即 } \frac{2}{t^2} - \frac{3}{t} \leq 0, \text{ 解得 } t \geq \frac{2}{3}.$$

$$\text{又当 } t = \frac{2}{3} \text{ 时, } v = 30 \text{ n mile/h,}$$

故当 $v = 30$ n mile/h 时, t 取最小值, 且最小值为 $\frac{2}{3}$,

此时, 在 $\triangle OAB$ 中, 有 $OA = OB = AB = 20$ n mile, 故可设计方案如下:

小艇航行方向为北偏东 30° , 航行速度为 30 n mile/h, 则小艇能以最短时间与轮船相遇.

21. 解: (1) 由 $\sin B - \cos C = \frac{c^2 - a^2}{2ab}$, 得

$$2ab \sin B - 2ab \cos C = c^2 - a^2.$$

$$\text{由余弦定理, 得 } 2ab \sin B + c^2 - a^2 - b^2 = c^2 - a^2.$$

$$\text{所以 } 2a \sin B = b.$$

$$\text{由正弦定理, 得 } 2 \sin A \sin B = \sin B.$$

因为 B 是三角形的一个内角,

$$\text{所以 } \sin B \neq 0.$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{1}{2}.$$

又 A 为锐角,

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = \frac{3}{16}c^2 +$$

$$c^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}c \cdot c \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{7}{16}c^2.$$

$$\text{所以 } a = \frac{\sqrt{7}}{4}c.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \times \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4}c \times 2\sqrt{3}.$$

$$\text{解得 } c = 4\sqrt{7}.$$

$$\text{则 } b = \frac{\sqrt{3}}{4}c = \sqrt{21}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{21} \times 4\sqrt{7} \times \frac{1}{2} = \\ &7\sqrt{3}. \end{aligned}$$

22. 解: (1) 因为 $\cos B + \sqrt{3} \sin B = 2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \cos B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B = 1,$$

$$\text{则 } \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

因为角 B 是锐角,

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{因为 } \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{2 \sin A}{\sqrt{3} \sin C},$$

$$\text{所以 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} = \frac{2a}{\sqrt{3}c}.$$

整理,得 $\frac{2a^2}{2abc} = \frac{2\sqrt{3}a}{3c}$.

解得 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 1$,

所以 $a = \sin A, c = \sin C$.

因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}, 0 < C < \frac{\pi}{2}, A + C = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sin A \times \sin C \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{4} \sin A \sin (\frac{2\pi}{3} - A) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin A (\sin \frac{2\pi}{3} \cos A -$

$\cos \frac{2\pi}{3} \sin A) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin A (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A) =$

$\frac{3}{8} \sin A \cos A + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin^2 A = \frac{3}{16} \sin 2A + \frac{\sqrt{3}}{16} (1 -$

$\cos 2A) = \frac{3}{16} \sin 2A - \frac{\sqrt{3}}{16} \cos 2A + \frac{\sqrt{3}}{16} =$

$\frac{\sqrt{3}}{8} \sin (2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{16}$,

因为 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$,

所以 $2A - \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

则 $\sin (2A - \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$,

$\frac{\sqrt{3}}{8} \sin (2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{16} \in (\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{16}]$.

则 $S_{\triangle ABC} \in (\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{16}]$.

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

专题二 复数

1. D 解析: 因为 $z = 1 - (1-i)^2(1-i) = 1 + 2i(1-i) = 1 + 2 + 2i = 3 + 2i$, 所以 $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. 故选 D.

2. D 解析: 因为复数 $z = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2}$, 则 $\bar{z} = \frac{3-i}{2}$, 则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, 位于第四象限. 故选 D.

3. A 解析: $(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$, 若要使复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是实数, 则 $ad+bc = 0$; 反之若 $ad+bc = 0$, 则复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是

实数. 所以 $ad+bc=0$ 是复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是实数的充要条件. 故选 A.

4. B 解析: 因为 $(-1+2i)x = y-1-6i$, 所以 $\begin{cases} 2x = -6, \\ -x = y-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -3, \\ y = 4. \end{cases}$ 所以 $|x-yi| =$

$|-3-4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$. 故选 B.

5. C 解析: 因为 $(z-i)(2+i) = 6-2i$, 所以 $z = \frac{6-2i}{2+i} + i = \frac{(6-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + i = 2-2i+i = 2-i$. 所以 $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. 故选 C.

6. B 解析: $\frac{5}{i-2} = \frac{5(-i-2)}{5} = -2-i$, 故 $\frac{5}{i-2}$ 的共轭复数为 $-2+i$. 故选 B.

7. B 解析: $z_1 = -2+i$ 所对应的点为 $(-2, 1)$, $z_2 = \frac{z_1}{i} = \frac{-i(-2+i)}{-i^2} = 1+2i$ 所对应的点为 $(1, 2)$. 所以复数 z_1 和 z_2 在复平面内所对应的两点之间的距离为 $\sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$. 故选 B.

8. C 解析: 设 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = \frac{7}{4} + 6i$, 则 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{7}{4}, \\ 2ab = 6. \end{cases}$ $\therefore a < 0, b < 0, \therefore$

$a = -2, b = -\frac{3}{2}$. $\therefore z = -2 - \frac{3}{2}i$. $\therefore \bar{z} = -2 + \frac{3}{2}i$. 故选 C.

9. ABD 解析: $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$. 对于 A, $\because z^{2021} = i^{2021} = i^{4 \times 505 + 1} = i$, $\therefore z^{2021}$ 为纯虚数, A 正确; 对于 B, $|z+i| = |2i| = 2$, B 正确; 对于 C, $z \cdot \bar{z} = i \cdot (-i) = -i^2 = 1$, C 错误; 对于 D, $\because \bar{z} + z \cdot i = -i + i^2 = -1 - i$, $\therefore \bar{z} + z \cdot i$ 对应的点为 $(-1, -1)$, 位于第三象限, D 正确. 故选 ABD.

10. AC 解析: 对于选项 A, 复数 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 是实数的充要条件是 $b=0$, 显然成立, 故 A 正确; 对于选项 B, 若复数 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 是纯虚数, 则 $a=0$ 且 $b \neq 0$, 故 B 错误; 对于选项 C, 若 z_1, z_2 互为共轭复数, 设 $z_1 = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z_2 = a-bi (a, b \in \mathbf{R})$, 所以 $z_1 z_2 = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ 是实数, 故 C 正确; 对于选项 D, 若 z_1, z_2 互为共轭复数, 设 $z_1 = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z_2 = a-bi (a, b \in \mathbf{R})$, 在复平面内所对应的点的坐标分别为 $(a, b), (a, -b)$, 这两点关于 x 轴对称, 故 D 错误. 故选 AC.

11. AB 解析: 对于选项 A, 由根与系数的关系知, $x_1 + x_2 = -a$, 正确; 对于选项 B, 若 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 由 $x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = b$, 即 $a, b \in \mathbf{R}$, 正确; 对于选项

C, 仅当 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 才有 $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$, 而方程的根不一定为实数, 错误; 对于选项 D, $\because a \in \mathbf{C}$, 而 $x_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}, x_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$, 仅当 $a \in \mathbf{R}$ 时 x_1, x_2 是共轭虚数, 错误. 故选 AB.

12. BC 解析: 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$. 对于选项 A, 若复数 $z = i$, 满足 $z^2 = -1 \in \mathbf{R}$, 但 $z \notin \mathbf{R}$, 故 A 不正确. 对于选项 B, 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. 由 $z^2 < 0$, 则 $a^2 - b^2 < 0$ 且 $ab = 0$, 所以 $a = 0$ 且 $b \neq 0$. 故复数 $z = bi (b \neq 0)$ 为虚数, 故 B 正确. 对于选项 C, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \in \mathbf{R}$, 所以 $\bar{z} = a - bi \in \mathbf{R}$, 所以 $b = 0$, 所以 $z \in \mathbf{R}$, 故 C 正确. 对于选项 D, 设 $z_1 = -1 + i, z_2 = 2 + 2i$, 则 $z_1 \cdot z_2 = -4 \in \mathbf{R}$, 但 $z_1 \neq z_2$, 故 D 不正确. 故选 BC.

13. $9 + i$ 解析: $\because$ 复数 $6 + 5i$ 与 $-3 + 4i$ 分别表示向量 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$, 又 $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$, $\therefore$ 表示向量 $\vec{BA}$ 的复数为 $(6 + 5i) - (-3 + 4i) = 9 + i$.

14. 5 解析: 因为 $z = 1 + 2i$, 所以 $\bar{z} = 1 - 2i$. 因此 $z \cdot \bar{z} = 1^2 + 2^2 = 5$.

15. $\sqrt{2}$ 解析: 设 $z = (1 - i)(a + i) = a + i - ai + 1 = (1 + a) + (1 - a)i$, $\because$ 复数 z 的实部与虚部相等, $\therefore 1 + a = 1 - a$. 又 $a \in \mathbf{R}$, 则 $a = 0$. $\therefore |1 - a + i| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

16. 1 解析: $\because$ 复数 z 满足 $|z| = 1$, 设 $z = \cos \theta + i \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$. 则 $|z - 2i| = |\cos \theta + i \sin \theta - 2i| = \sqrt{\cos^2 \theta + (\sin \theta - 2)^2} = \sqrt{5 - 4 \sin \theta} \geq 1$, 当且仅当 $\sin \theta = 1$ 则取等号. 故 $|z - 2i|$ 的最小值为 1.

17. 解: (1) 当 $m = 2$ 时, $z = 2 + 5i$,
故 $z \cdot \bar{z} = (2 + 5i)(2 - 5i) = 29$.
(2) 若点 Z 在直线 $y = x$ 上,
则 $m^2 - m = m + 3$.
解得 $m = 3$ 或 $m = -1$.

18. 解: (1) 将 $z = 3 + bi$ 代入 $(1 + 3i) \cdot z$, 得
 $(1 + 3i) \cdot z = (1 + 3i)(3 + bi) = 3 - 3b + (b + 9)i$.
因为 $(1 + 3i) \cdot z$ 为纯虚数,
所以 $\begin{cases} 3 - 3b = 0, \\ b + 9 \neq 0. \end{cases}$
解得 $b = 1$,
所以复数 $z = 3 + i$.
(2) 由 (1) 知 $z = 3 + i$,
所以 $\omega = \frac{z}{2 + i} = \frac{3 + i}{2 + i} = \frac{(3 + i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} =$

$$\frac{7 - i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{i}{5}.$$

$$\text{所以 } |\omega| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

19. 解: (1) 设 $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$,

$$\text{则 } z + 2i = x + (y + 2)i.$$

$$\because z + 2i \in \mathbf{R},$$

$$\therefore y = -2.$$

$$\text{又 } \frac{z}{2 - i} = \frac{x - 2i}{2 - i} = \frac{2x + 2}{5} + \frac{x - 4}{5}i \in \mathbf{R},$$

$$\therefore x = 4.$$

$$\text{综上所述, } z = 4 - 2i,$$

$$\therefore \bar{z} = 4 + 2i.$$

$$(2) \because m \text{ 为实数, 且 } (z + mi)^2 = [4 + (m - 2)i]^2 = (12 + 4m - m^2) + 8(m - 2)i,$$

$$\therefore \text{由题意, 得 } \begin{cases} 12 + 4m - m^2 > 0, \\ 8(m - 2) < 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } -2 < m < 2.$$

$$\text{故实数 } m \text{ 的取值范围是 } (-2, 2).$$

20. 解: (1) $\because z_1 = (a + i)^2, z_2 = 4 - 3i, z_1 = iz_2$,

$$\therefore (a + i)^2 = a^2 - 1 + 2ai = 3 + 4i.$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 1 = 3, \\ 2a = 4, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = 2,$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的值为 } 2.$$

(2) 依题意, 得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + i)^2}{4 - 3i} = \frac{(a^2 + 2ai - 1)(4 + 3i)}{25} = \frac{(4a^2 - 6a - 4) + (3a^2 + 8a - 3)i}{25},$$

$$\because \frac{z_1}{z_2} \text{ 是纯虚数,}$$

$$\therefore \begin{cases} 4a^2 - 6a - 4 = 0, \\ 3a^2 + 8a - 3 \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = 2 \text{ 或 } a = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } \because a \text{ 是正实数,}$$

$$\therefore a = 2.$$

$$21. \text{ 解: (1) } \frac{(2 - 2i)^4}{(1 + \sqrt{3}i)^3} = \frac{(2 - 2i)^2 (2 - 2i)^2}{(1 + \sqrt{3}i)^2 (1 + \sqrt{3}i)} = \frac{(-8i)^2}{(2\sqrt{3}i - 2)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{-64}{-8} = 8.$$

(2) 设 $z = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } z \cdot \bar{z} - 3i \cdot \bar{z} = 1 + 3i,$$

$$\text{即 } (a + bi)(a - bi) - 3i(a - bi) = 1 + 3i,$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - 3b - 3ai = 1 + 3i,$$

$$\text{所以} \begin{cases} a^2 + b^2 - 3b = 1, \\ -3a = 3. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$$

$$\text{所以 } z = -1 + 3i \text{ 或 } z = -1.$$

22. 解: (1) 由 $\bar{z}_2 - z_1 = 2i$, 得 $z_2 = \bar{z}_1 - 2i$,

代入已知方程, 得

$$z_1 \cdot (\bar{z}_1 - 2i) + 2iz_1 - 2i(\bar{z}_1 - 2i) + 1 = 0,$$

$$\text{即 } |z_1|^2 - 2iz_1 - 3 = 0,$$

$$\text{令 } z_1 = a + bi (a, b \in \mathbf{R}),$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2i(a - bi) - 3 = 0,$$

$$\text{即 } (a^2 + b^2 - 2b - 3) - 2ai = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 + b^2 - 2b - 3 = 0, \\ -2a = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 0, \\ b = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 0, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} z_1 = -i, \\ z_2 = -i \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} z_1 = 3i, \\ z_2 = -5i. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 由已知, 得 } z_1 = \frac{2iz_2 - 1}{z_2 + 2i}.$$

$$\text{又 } |z_1| = \sqrt{3},$$

$$\therefore \left| \frac{2iz_2 - 1}{z_2 + 2i} \right| = \sqrt{3}.$$

$$\therefore |2iz_2 - 1|^2 = 3|z_2 + 2i|^2,$$

$$\text{即 } |2z_2 + i|^2 = 3|z_2 + 2i|^2.$$

$$\therefore (2z_2 + i)(2\bar{z}_2 - i) = 3(z_2 + 2i)(\bar{z}_2 - 2i),$$

$$\text{整理, 得 } |z_2|^2 + 4iz_2 - 4i\bar{z}_2 - 11 = 0.$$

$$\text{即 } z_2\bar{z}_2 + 4iz_2 - 4i\bar{z}_2 - 11 = 0.$$

$$\therefore z_2(\bar{z}_2 + 4i) - 4i\bar{z}_2 - (4i)^2 = 27.$$

$$\text{故 } (z_2 - 4i)(\bar{z}_2 + 4i) = 27,$$

$$\therefore |z_2 - 4i|^2 = 27,$$

$$\text{即 } |z_2 - 4i| = 3\sqrt{3}.$$

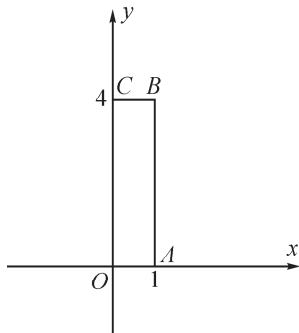
$\therefore$ 存在常数 $k = 3\sqrt{3}$, 使得等式 $|z_2 - 4i| = k$ 恒成立.

专题三 立体几何(A卷)

1. C 解析: 对于 A, 当球面上的两点恰好是直径的两个端点时, 这三点共线, 此时过这三点有无数个平面, 故 A 错误; 对于 B, 用一个平行于底面的平面截圆锥, 底面与截面之间的部分叫作圆台, 故 B 错误; 对于 C, 根据正棱锥的定义: 底面是正多边形, 顶点在底面的射影是底面正多边形的中心. 所以底面是正多边形且侧棱与底面成等角的棱锥是正棱锥, 符合定义, 是正棱锥, 故 C 正确; 对于 D, 两个底面平

行且相似, 其余各面都是梯形的多面体中, 侧棱延长不一定会相交于同一点, 所以不一定是棱台, 故 D 错误. 故选 C.

2. D 解析: 根据斜二测画法的规则可知该平面图形是矩形, 如图所示, 且长 $AB = 4$, 宽 $OA = 1$.



故该平面图形的周长为 $2(OA + AB) = 10$. 故选 D.

3. D 解析: 设三棱锥 $B - A'B'C'$ 的高为 h , 则

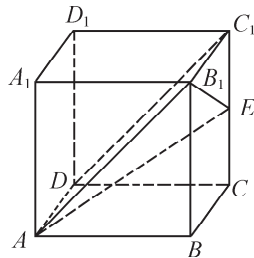
$$V_{B-A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'B'C'} \cdot h = \frac{1}{3} V_{ABC-A'B'C'} = \frac{1}{3} \times 6 =$$

2. 故选 D.

4. D 解析: 设圆柱的底面半径为 r , 则高为 $\frac{4}{2r}$. 所以

圆柱的侧面积为 $2\pi r \cdot \frac{4}{2r} = 4\pi$. 故选 D.

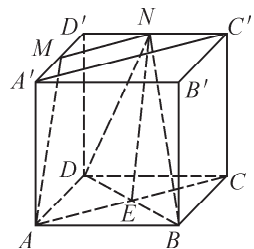
5. A 解析: 如图, 平移 C_1D 到 B_1A , 再连接 AE , 则 $\angle AB_1E$ (或其补角) 为异面直线 B_1E 与 C_1D 所成的角.



设正方体的棱长为 2, 易得 $C_1D = B_1A = 2\sqrt{2}$, $AE = 3$, $B_1E = \sqrt{5}$. 由余弦定理, 得 $\cos \angle AB_1E =$

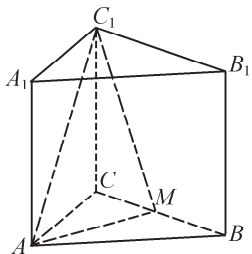
$$\frac{AB_1^2 + B_1E^2 - AE^2}{2|AB_1| |B_1E|} = \frac{8 + 5 - 9}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. \text{ 故选 A.}$$

6. B 解析: 连接 AC 交 BD 于点 E , 连接 MN , EN , $A'C'$, 如图所示.



因为 M, N 分别是 $A'D', D'C'$ 的中点, 所以 $MN \parallel A'C' \parallel AC$, 即 $MN \parallel AE$, 且 $2MN = A'C' = AC = 2AE$, 即 $MN = AE$. 则四边形 $AENM$ 为平行四边形, 故 $AM \parallel EN$. 由 $AM \not\subset$ 平面 BND , $EN \subset$ 平面 BND , 则 $AM \parallel$ 平面 BND . 故选 B.

7. A 解析: 如图, 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 连接 C_1M .



在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 因为 $B_1B \perp AM$, $BC \cap BB_1 = B$, 所以 $AM \perp$ 平面 BB_1C_1C . 故 AC_1 在平面 BB_1C_1C 上的射影为 MC_1 . 所以 $\angle AC_1M$ 为直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角. 设 $AB = AC = AA_1 = a$, 又 $\angle BAC = 60^\circ$, 所以 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AC_1 =$

$\sqrt{2}a$. 所以 $\sin \angle AC_1M = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. 故选 A.

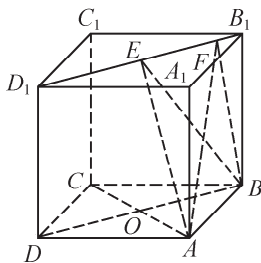
8. D 解析: 因为 M, N 分别为 VA, VC 的中点, 所以 $MN \parallel AC$. 在平面 ABC 中, $AB \cap AC = A$, 所以 MN 不与 AB 平行. 因为 $AC \cap BC = C$, 所以 MN 与 BC 所成的角为 $\angle BCA = 90^\circ$. 因为 $OC \cap$ 平面 $VAC = C$, 所以 OC 与平面 VAC 内交线 AC, VC 都不垂直, 所以 OC 不与平面 VAC 垂直. 由 $VA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $VA \perp BC$. 又 $\angle BCA = 90^\circ$, 所以 $AC \perp BC$. 由 $AC \cap VA = A$, 则 $BC \perp$ 平面 VAC . 又 $BC \subset$ 平面 VBC , 所以平面 $VAC \perp$ 平面 VBC . 故选 D.

9. ABD 解析: 因为圆心和直径的两个端点共线时, 则不能确定平面, A 不正确; 平行于同一条直线的两个不同平面还可能相交, B 不正确; 若两条平行直线中的一条与已知直线垂直, 由平行线的性质可知, 另一条也与已知直线垂直, C 正确; 如果两个平面垂直, 在其中一个平面内作交线的垂线, 则此垂线必垂直于另一平面, 过其中一个平面内一点作交线的垂线, 则不一定垂直于另一平面, D 不正确. 故选 ABD.

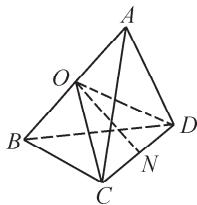
10. CD 解析: 对于 A, 平面 α, β 可能相交, 所以选项 A 错误; 对于 B, 平面 α, β 可能平行或斜交, 所以选项 B 错误; 对于 C, 因为 $l \subset \alpha$ 且 $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$, 所以

选项 C 正确; 对于 D, 因为 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \parallel \beta$, 所以选项 D 正确. 故选 CD.

11. ABD 解析: 对于 A, 由正方体的结构特征可知, $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$. 而 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $DD_1 \perp AC$. 如图, 连接 BD , 交 AC 于 O . $\because ABCD$ 为正方形, $\therefore AC \perp BD$. $\because D_1D \cap BD = D$, 且 $D_1D, BD \subset$ 平面 DD_1B_1B , $\therefore AC \perp$ 平面 DD_1B_1B . $\because BE \subset$ 平面 DD_1B_1B , $\therefore AC \perp BE$, 故 A 正确. 对于 B, $\because B_1D_1 \parallel BD, BD \subset$ 平面 $ABCD, B_1D_1 \not\subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore B_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$. 而 EF 在 B_1D_1 上, $\therefore EF \parallel$ 平面 $ABCD$, 故 B 正确. 对于 C, 点 B 到 EF 的距离为正方体的棱长, 点 A 到 EF 的距离大于棱长, 则 $\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积不相等, 故 C 错误. 对于 D, 易知 AO 为三棱锥 $A-BEF$ 的高, $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$, $V_{A-BEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle BEF} \cdot AO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{24}$, 则 $V_{E-ABF} = V_{A-BEF} = \frac{\sqrt{2}}{24}$ 为定值, 故 D 正确. 故选 ABD.



12. ACD 解析: 画出图形, 如图所示.



$\because AB$ 是球 O 的一条直径, $\therefore AC \perp BC, AD \perp BD$. $\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, 球 O 的半径为 $\frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{13}}{2}$, 球 O 的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = 13\pi$, 故 A 选项正确. 若 AC 上找到一点 M , 使得 $AD \parallel BM$, 又 $AD \not\subset$ 平面 $ABC, BM \subset$ 平面 ABC , $\therefore AD \parallel$ 平面 ABC . 而 AD 与平面 ABC 相交, 故 B 选项错误. 连接 OC, OD , $\because OC = OD, N$ 为 CD 的中点, $\therefore ON \perp CD$, 故 C 选项正确. 易知点 C 到平面 ABD 的距离的最大值为球 O 的半径 R ,

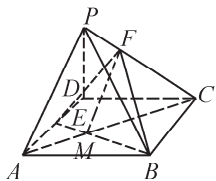
∴四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 $V_{\max} = \frac{1}{3}$.

$$S_{\triangle ABD} \cdot R = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \text{故 D}$$

选项正确. 故选 ACD.

13. 135° 解析: 由空间中的等角定理可知 $\beta = 180^\circ - \alpha = 135^\circ$.

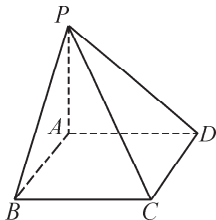
14. $\frac{1}{2}$ 解析: 连接 AC 交 BE 于点 M , 连接 FM , 如图所示.



∵ $PA \parallel$ 平面 EBF , $PA \subset$ 平面 PAC , 平面 $PAC \cap$ 平面 $EBF = FM$, ∴ $PA \parallel FM$. 又 $AE \parallel BC$, ∴ $\frac{PF}{FC} = \frac{AM}{MC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}$.

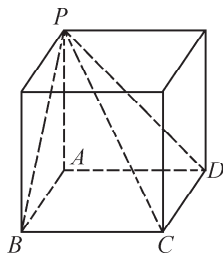
15. $\frac{\pi}{4}$ 解析: 以 $ABCD$ 为圆柱的一个底面时, 挖去的圆柱最大体积为: $V_1 = \pi \times 2^2 \times 3 = 12\pi$. 以 ABB_1A_1 为圆柱的一个底面时, 挖去的圆柱最大体积为: $V_2 = \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 = 9\pi$. 以 ADD_1A_1 为圆柱的一个底面时, 挖去的圆柱最大体积为: $V_3 = \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 = 9\pi$. ∵ 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $4 \times 4 \times 3 = 48$, ∴ 在长方体中挖去一个体积最大的圆柱, 此圆柱与原长方体的体积之比为 $\frac{12\pi}{48} = \frac{\pi}{4}$.

16. 6π 解析: 如图, 因为 $AB \parallel CD$, 故 $\angle PBA$ (或其补角) 为异面直线 PB 与 CD 所成的角.



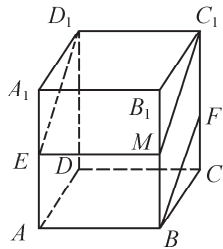
因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AB$. 所以 $\angle PBA$ 为锐角. 所以 $\cos \angle PBA = \frac{AB}{PB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $PB = \frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}$, 故 $PA = 1$. 将该四

棱锥补成如图所示的长方体:



则该长方体的外接球即为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球, 其直径为 $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. 故外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \pi(2R)^2 = 6\pi$.

17. 证明: (1) 如图, 取 BB_1 的中点 M , 连接 EM, C_1M .



在矩形 ABB_1A_1 中, 易得 $EM \parallel A_1B_1$, $EM = A_1B_1$.

因为 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $A_1B_1 = C_1D_1$,

所以 $EM \parallel C_1D_1$, $EM = C_1D_1$.

所以四边形 EMC_1D_1 为平行四边形.

所以 $D_1E \parallel MC_1$.

在矩形 BCC_1B_1 中, 易得 $MB \parallel C_1F$, $MB = C_1F$.

所以四边形 $MBFC_1$ 为平行四边形.

所以 $BF \parallel MC_1$.

所以 $D_1E \parallel BF$.

(2) 因为 $D_1E \parallel BF$, $BB_1 \parallel EA_1$,

又 $\angle B_1BF$ 与 $\angle A_1ED_1$ 的对应边方向相同,

所以 $\angle B_1BF = \angle A_1ED_1$.

18. 证明: (1) ∵ G, H 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点,

∴ $GH \parallel B_1C_1$.

又 $B_1C_1 \parallel BC$,

∴ $GH \parallel BC$.

∴ B, C, H, G 四点共面.

(2) ∵ E, G 分别是 AB, A_1B_1 的中点,

∴ A_1G, EB 平行且相等.

∴ 四边形 A_1EBG 为平行四边形.

∴ $A_1E \parallel GB$.

又 $A_1E \not\subset$ 平面 $BCHG$, $GB \subset$ 平面 $BCHG$,

∴ $A_1E \parallel$ 平面 $BCHG$.

19. (1) 证明: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$AB \parallel C_1D_1$, 且 $AB = C_1D_1$,

∴ 四边形 ABC_1D_1 为平行四边形.

$\therefore D_1A \parallel C_1B$.

又 $\because D_1A \not\subset \text{平面 } C_1BD, C_1B \subset \text{平面 } C_1BD$,

$\therefore D_1A \parallel \text{平面 } C_1BD$.

(2) 解: $\because D_1A \parallel C_1B$,

$\therefore \angle C_1BD$ (或其补角) 即为异面直线 D_1A 与 BD 所成的角.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ,

则易得 $C_1B=BD=C_1D=\sqrt{2}a$,

$\therefore \triangle C_1BD$ 为等边三角形.

$\therefore$ 异面直线 D_1A 与 BD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$.

20. 解: (1) 因为 $V_{A_1-ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot A_1A = \frac{1}{3} \times$

$$\frac{1}{2} AB \times AD \times A_1A = \frac{1}{6} a^3,$$

所以剩余部分的体积为 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} -$

$$V_{A_1-ABD} = a^3 - V_{A_1-ABD} = a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3.$$

(2) 由(1)知 $V_{A_1-ABD} = V_{A-A_1BD} = \frac{1}{6} a^3$,

设三棱锥 $A-A_1BD$ 的高为 h ,

由正方体的性质可知 $\triangle A_1BD$ 为等边三角形, 且边长为 $\sqrt{2}a$,

$$\text{则 } S_{\triangle A_1BD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$

$$\text{所以三棱锥 } V_{A-A_1BD} \text{ 的高为 } \frac{\frac{1}{6} a^3}{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

21. (1) 证明: $\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $BDEF$,

平面 $ABCD \cap$ 平面 $BDEF = BD$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore AC \perp BD$.

又 $AC \subset \text{平面 } ABCD$,

$\therefore AC \perp \text{平面 } BDEF$.

$\because AC \subset \text{平面 } ACF$,

$\therefore \text{平面 } ACF \perp \text{平面 } BDEF$.

(2) 解: 连接 BG , 如图所示.

$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $BDEF$,

平面 $ABCD \cap$ 平面 $BDEF = BD$,

又四边形 $BDEF$ 是矩形,

$\therefore BF \perp BD$.

$\therefore BF \perp \text{底面 } ABCD$.

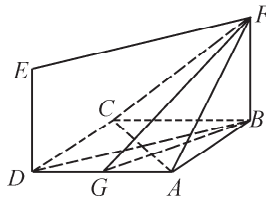
$\therefore \angle FGB$ 即为直线 FG 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\text{Rt} \triangle BAG$ 中, $BG^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = 5 + 2 = 7$,

$$\therefore BG = \sqrt{7}, FG = \sqrt{BF^2 + BG^2} = 4.$$

在 $\text{Rt} \triangle BFG$ 中, $\cos \angle FGB = \frac{BG}{FG} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

故直线 FG 与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$.



22. (1) 证明: $\because AC$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore AC \perp AB$.

由圆锥的性质知, $PO \perp \text{平面 } ABC$,

$\therefore PO \perp AC$.

$\because PO \cap AB = O$,

$\therefore AC \perp \text{平面 } PAB$.

$\therefore AC \perp PB$.

$\because PA = PB = \sqrt{2}, AB = 2$,

$$\therefore PA^2 + PB^2 = AB^2.$$

$\therefore PB \perp PA$.

又 $AC \cap PA = A$,

$\therefore PB \perp \text{平面 } PAC$.

(2) 解: $\because OP \perp \text{平面 } ABC$,

$\therefore OP \perp OD, OP \perp OC$.

$\therefore \angle COD$ 为二面角 $C-PO-D$ 的平面角.

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle ABC = 30^\circ$.

$\because OB = OD$,

$\therefore \angle BDO = 30^\circ$,

$\angle AOD = 60^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle AOC$ 中, $\tan \angle AOC = \frac{AC}{AO} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \tan \angle COD = \tan (\angle AOD - \angle AOC) =$$

$$\frac{\tan \angle AOD - \tan \angle AOC}{1 + \tan \angle AOD \tan \angle AOC} = \frac{\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

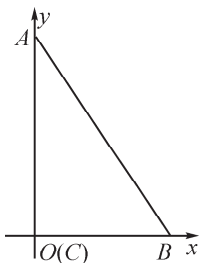
即二面角 $C-PO-D$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

专题三 立体几何(B卷)

1. D 解析: 选项 A, 有一个面是多边形, 其余各面是三角形, 如果其余各面没有一个共同的顶点的几何体就不是棱锥, 错误; 选项 B, 有两个面平行且相似, 其余各面都是梯形, 如果侧棱不相交于同一点的多面体不是棱台, 错误; 选项 C, 当长方体有一组相对

面是正方形时是正四棱柱,错误;选项 D,四个面都是等边三角形的四面体是正四面体,正确. 故选 D.

2. D 解析:因为斜二测画法得到的直观图 $\triangle A'B'C'$ 是面积为2的等腰直角三角形,所以 $A'C'=A'B'=2$, $C'B'=2\sqrt{2}$, $\angle A'C'B'=45^\circ$. 将直观图还原,如图所示. 则 $CB=C'B'=2\sqrt{2}$, $AC=2A'C'=4$, $\angle ACB=2\angle A'C'B'=90^\circ$. 故 $\triangle ABC$ 为直角三角形,面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$. 故选 D.



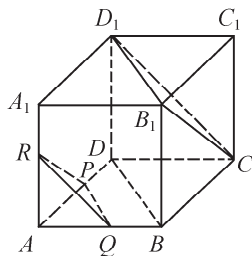
3. A 解析:设球O的半径为R,则 $R^2 - \frac{R^2}{4} = (\sqrt{3})^2$,解得 $R=2$, $\therefore$ 球O的体积 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{32\pi}{3}$. 故选 A.

4. B 解析:因为正方体中 $\angle CBC_1 = \frac{\pi}{4}$,所以BC与直线 BC_1 所成角均为 $\frac{\pi}{4}$. 又 $BC \parallel AD \parallel A_1D_1 \parallel B_1C_1$,所以AD, A_1D_1 , B_1C_1 与直线 BC_1 所成角均为 $\frac{\pi}{4}$. 同理可得 BB_1 , CC_1 , DD_1 , AA_1 与直线 BC_1 所成角均为 $\frac{\pi}{4}$,所以与直线 BC_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$ 的棱有8条. 故选 B.

5. D 解析:设圆锥底面圆的半径为r,母线长为l,由侧面积 $\pi rl = 2\pi$,底面积 $\pi r^2 = \pi$,解得 $r=1$, $l=2$. 所以圆锥的高为 $\sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}$,则圆锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. 故选 D.

6. A 解析:如图,过点P作DB, A_1D 的平行线,分别交棱AB, AA_1 于点Q, R,连接QR, BD. 因为 $BD \parallel B_1D_1$,所以 $PQ \parallel B_1D_1$. 又 $B_1D_1 \subset$ 平面 B_1D_1C , $PQ \not\subset$ 平面 B_1D_1C ,所以 $PQ \parallel$ 平面 B_1D_1C . 因为 $A_1D \parallel B_1C$,所以 $PR \parallel B_1C$. 又 $B_1C \subset$ 平面 B_1D_1C , $PR \not\subset$ 平面 B_1D_1C ,所以 $PR \parallel$ 平面 B_1D_1C . 又 $PQ \cap PR = P$, $PQ, PR \subset$ 平面PQR,所以平面PQR $\parallel$ 平面 B_1D_1C ,则PQR为截面. 易知 $\triangle PQR$ 是等边三角形,则 $\frac{1}{2} PQ^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,解得 $PQ=2$. 所以 $AP=$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} PQ = \sqrt{2}. \text{ 故选 A.}$$



7. B 解析:因为 $AB=1$, $BD=\sqrt{2}$, $AD=\sqrt{3}$,所以 $AB^2 + BD^2 = AD^2$,所以 $AB \perp BD$. 又 $AB \perp CD$, $BD \cap CD = D$, $BD \subset$ 平面BCD, $CD \subset$ 平面BCD,所以 $AB \perp$ 平面BCD. 又 $AB \subset$ 平面ABC, $AB \subset$ 平面ABD,所以平面ABC $\perp$ 平面BCD,平面ABD $\perp$ 平面BCD. 因为 $CD=1$, $BD=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{3}$,所以 $CD^2 + BD^2 = BC^2$,所以 $CD \perp BD$. 又 $CD \perp AB$, $BD \cap AB = B$, $BD \subset$ 平面ABD, $AB \subset$ 平面BAD,所以 $CD \perp$ 平面ABD. 又 $CD \subset$ 平面ACD,所以平面ACD $\perp$ 平面ABD. 综上可知有3对. 故选 B.

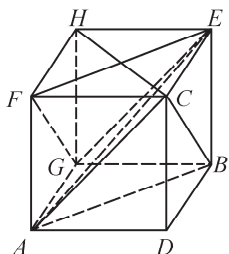
8. A 解析:对于A,由 $C_1D_1 \perp$ 平面 AA_1D_1D ,当点P分别在点A或 D_1 时,线面角不相等,故A错误. 对于B,由 $AD_1 \parallel BC_1$, $BC_1 \subset$ 平面 C_1BD , $AD_1 \not\subset$ 平面 C_1BD ,所以 $AD_1 \parallel$ 平面 C_1BD . 所以点P到平面 C_1BD 的距离为直线 AD_1 上任意一点到平面 C_1BD 的距离,故B正确. 对于C,因为 $CB_1 \perp BC_1$, $CB_1 \perp AB$, $AB \cap BC_1 = B$, $AB, BC_1 \subset$ 平面 ABC_1D_1 . 所以 $CB_1 \perp$ 平面 ABC_1D_1 ,所以 $CB_1 \perp C_1P$,故C正确. 对于D,因为 $CD \parallel C_1D_1$, $C_1D_1 \subset$ 平面 ABC_1D_1 , $CD \not\subset$ 平面 ABC_1D_1 ,所以 $CD \parallel$ 平面 ABC_1D_1 ,即 $CD \parallel$ 平面 BPC_1 ,所以D正确. 故选 A.

9. BD 解析:A选项,若a与b是异面直线,则c至少与a, b中的一条相交,故A正确;B选项,当 $\alpha \perp \beta$ 时,若 $b \perp c$,则 $b \perp \alpha$,此时不论a, c是否垂直,均有 $a \perp b$,故B错误;C选项,当 $a \parallel b$ 时,则 $a \parallel \beta$,由线面平行的性质定理可得 $a \parallel c$,故C正确;D选项,若 $b \parallel c$,则 $a \perp b, a \perp c$ 时, a与平面 β 不一定垂直,此时平面 α 与平面 β 也不一定垂直,故D错误. 故选 BD.

10. BC 解析:由题意可得, $AH \perp HE, AH \perp HF$.
 $\therefore AH \perp$ 平面EFH. $\because AH \cap AG = A, \therefore AG$ 与平面EFH不垂直, $\therefore$ B正确, A不正确. 又 $HF \perp HE, HF \perp AH, \therefore HF \perp$ 平面AHE,故C正确.
 $\because HG$ 与AG不垂直, $\therefore HG$ 与平面AEF不垂直.

故 D 不正确, 故选 BC.

11. BCD 解析: 如图, 把正方体的平面展开图还原成正方体 $ADBG-FCEH$.



在正方体 $ADBG-FCEH$ 中, 可知 $AC \parallel EG$, $AC=EG=EF=FG$, 故异面直线 AC 与 EF 所成的角即为 EG 与 EF 所成的角, 为 60° , 故 A 选项错误. 同理, EF 与 BC 所成的角即为 FG 与 EF 所成的角, 为 60° , 故 B 选项正确. 在正方体 $ADBG-FCEH$ 中, $AC=CH$, $HC \perp EF$, $HC \perp EB$, $EF \cap EB=E$, 故 $HC \perp$ 平面 $ABEF$, 则点 C 到平面 ABE 的距离为 $\frac{1}{2}HC = \frac{1}{2}AC$. 设直线 AC 与平面 ABE

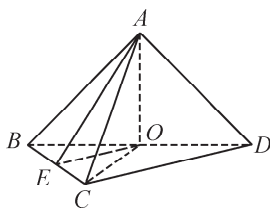
所成的角为 θ , 故 $\sin \theta = \frac{\frac{1}{2}HC}{AC} = \frac{1}{2}$, 故 $\theta = 30^\circ$, 故 C 选项正确. 在正方体 $ADBG-FCEH$ 中, $AC \parallel EG$, $AB \parallel EF$, $AC \cap AB=A$, $EG \cap EF=E$, 则平面 $ABC \parallel$ 平面 EFG . 又平面 $EFG \cap$ 平面 $CEF=EF$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $CEF=l$, 故直线 $EF \parallel$ 直线 l , 故 D 选项正确. 故选 BCD.

12. AC 解析: 因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 其交线为 BD , 且 $CO \perp BD$, 故 $CO \perp$ 平面 ABD . 所以 $CO \perp AO$, 由 $CO=AO=\frac{1}{2}BD=1$, 所以 $AC=\sqrt{2}$, 故 A 正确. 假设 $AB \perp CD$, 又因为 $AB \perp AD$, 则 $AB \perp$ 平面 ACD , 所以 $AB \perp AC$. 而 $AB=AC=BC=\sqrt{2}$, $\angle BAC=60^\circ$, 这与 $AB \perp AC$ 矛盾, 故 $AB \perp CD$ 不可能成立, 故 B 错误. 取 BC 的中点为 E , 连接 OE, AE , 如图所示. 因为 $OE \perp BC$, $AO \perp$ 平面 BCD , 故可得 $AO \perp BC$, 进而可得 $BC \perp$ 平面 AOE , 所以 $BC \perp AE$, 故 $\angle AEO$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角, 则 $\tan \angle AEO = \frac{AO}{\frac{1}{2}CD} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$, 故 C 正

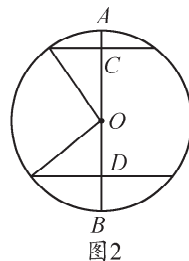
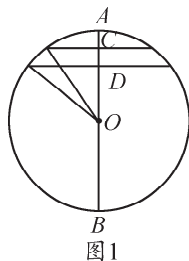
确. $V_{B-ACD} = V_{A-BCD} \Rightarrow S_{\triangle ACD} \cdot h = S_{\triangle BCD} \cdot AO \Rightarrow$

$$h = \frac{S_{\triangle BCD} \cdot AO}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot AO}{\frac{1}{2}CD \cdot AD \sin 60^\circ} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}$$



13. 1 或 7 解析: 由题意, 得两个截面圆半径分别为 3 和 4, 如图 1 所示, 两个平行平面在球心同侧,



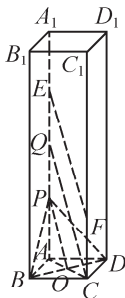
则 $CD=OC-OD=\sqrt{5^2-3^2}-\sqrt{5^2-4^2}=4-3=1$.

如图 2 所示, 两个平行截面在球心两侧,

则 $CD=OC+OD=\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{5^2-4^2}=4+3=7$.

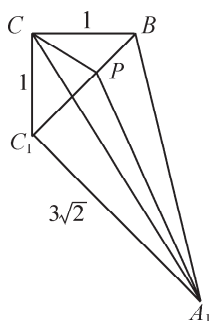
14. 5π 解析: 几何体是一个圆柱挖去半球个后剩余的部分, 且圆柱的底面半径是 1, 高是 1, 球的半径是 1, 所以该几何体的表面积为 $\pi \times 1^2 + 2\pi \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 1^2 = 5\pi$.

15. 2 解析: 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 PO . 因为 $EF \parallel$ 平面 PBD , $EF \subset$ 平面 $EACF$, 平面 $EACF \cap$ 平面 $PBD=PO$, 所以 $EF \parallel PO$. 在 PA_1 上截取 $PQ=AP=2$, 连接 QC , 则 $QC \parallel PO$, 所以 $EF \parallel QC$. 所以四边形 $EFCQ$ 为平行四边形. 所以 $CF=EQ$. 又因为 $AE+CF=8$, $AE+A_1E=8$, 所以 $A_1E=CF=EQ=\frac{1}{2}A_1Q=2$.



16. 5 解析: 由题设可知 $\triangle CC_1B$ 为等腰直角三角形,

且 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 故 $\angle A_1C_1B = 90^\circ$. 将二面角 A_1-BC_1-C 沿 BC_1 展开成平面图形, 得四边形 A_1C_1CB , 如图所示,



若要 $CP+PA_1$ 取得最小值, 当且仅当 C, P, A_1 三点共线, $\because CC_1 = 1, A_1C_1 = AC = 3\sqrt{2}, \angle CC_1B = 45^\circ, \angle BC_1A_1 = 90^\circ, \therefore \angle CC_1A_1 = 135^\circ. \therefore$ 当 $CP+PA_1$ 取最小值时, 由余弦定理, 得 $A_1C^2 = (3\sqrt{2})^2 + 1 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos 135^\circ = 25, \therefore A_1C = 5$, 即 $CP+PA_1$ 的最小值为 5.

17. 证明: (1) 因为 $EF \parallel$ 平面 ACD , 平面 $CEF \cap$ 平面 $ACD = l, EF \subset$ 平面 CEF ,

所以 $EF \parallel l$.

又平面 $ABD \cap$ 平面 $ACD = AD, EF \subset$ 平面 ABD , 所以 $EF \parallel AD$.

所以 $AD \parallel l$.

(2) 因为 $AD \perp BD, EF \parallel AD$,

所以 $EF \perp BD$.

因为 $CB = CD, F$ 是 BD 的中点,

所以 $CF \perp BD$.

又 $EF \cap CF = F, EF, CF \subset$ 平面 EFC ,

所以 $BD \perp$ 平面 EFC .

又 $BD \subset$ 平面 BCD ,

所以平面 $EFC \perp$ 平面 BCD .

18. 证明: (1) 因为 $B_1C_1 \perp C_1C$, 平面 $A_1C_1CA \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

平面 $A_1C_1CA \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = C_1C$,

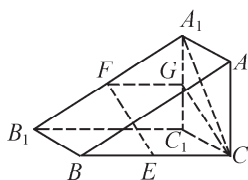
$B_1C_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

又因为 $A_1C \subset$ 平面 A_1C_1CA ,

所以 $B_1C_1 \perp A_1C$.

(2) 取 A_1C_1 的中点 G , 连接 FG, GC , 如图所示.



在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 因为 F, G 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点,

所以 $FG \parallel B_1C_1$, 且 $FG = \frac{1}{2} B_1C_1$.

在平行四边形 BCC_1B_1 中, 因为 E 是 BC 的中点,

所以 $EC \parallel B_1C_1$, 且 $EC = \frac{1}{2} B_1C_1$.

所以 $EC \parallel FG$, 且 $EC = FG$.

所以四边形 $FECG$ 是平行四边形.

所以 $EF \parallel GC$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 $A_1C_1CA, GC \subset$ 平面 A_1C_1CA ,

所以 $EF \parallel$ 平面 A_1C_1CA .

19. (1) 证明: 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱, 所以 $BB_1 \perp$ 平面 ABC .

因为 $AD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AD \perp BB_1$.

因为 $AB = AC, D$ 为 BC 的中点,

所以 $AD \perp BC$.

又因为 $BC \cap BB_1 = B, BC \subset$ 平面 $BCC_1B_1, BB_1 \subset$

平面 BCC_1B_1 ,

所以 $AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 解: 因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,

所以 $V_{B-ACC_1} = V_{C_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot CC_1$,

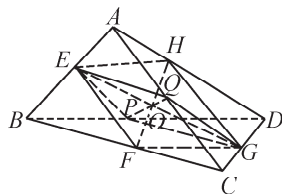
又 $AB = AC = \sqrt{5}, D$ 为 BC 中点, $BC = 2$.

所以 $BD = CD = 1, AD = 2$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 2$.

所以 $V_{B-ACC_1} = \frac{1}{3} \times 2 \times 4 = \frac{8}{3}$.

20. (1) 证明: 如图, 连接 EF, FG, GH, HE , 如图所示.



$\because E, F$ 分别是 AB, BC 的中点,

则 $EF \parallel AC$ 且 $EF = \frac{1}{2} AC$.

同理可得, $HG \parallel AC$ 且 $HG = \frac{1}{2} AC$.

$\therefore EF \parallel HG$ 且 $EF = HG$,

即 $EFGH$ 为平行四边形.

设 $EG \cap FH = O$, 则 O 为 EG, FH 的中点.

连接 EP, PG, GQ, QE ,

同理可证, $EPGQ$ 为平行四边形,

则 $EG \cap PQ = O$,

即 EG, FH, PQ 相交于同一点.

(2) 解: 由(1)可得, $EF \parallel AC, EF = 2$.

$\because F, G$ 分别为 BC, CD 的中点,

$\therefore FG \parallel BD$, 且 $FG = \frac{1}{2}BD = 3$.

则 $\angle EFG$ (或其补角) 为异面直线 AC 与 BD 所成的角.

在 $\triangle EFG$ 中, $\cos \angle EFG = \frac{EF^2 + FG^2 - EG^2}{2EF \cdot FG} = \frac{1}{2}$,

则异面直线 AC 与 BD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$.

21. (1) 证明: $\because \triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 都是等腰直角三角形, $AD = DC, AC = BC$,

$\therefore AD \perp CD, AC \perp BC$.

又 $\because$ 平面 $ADC \perp$ 平面 ABC ,

平面 $ADC \cap$ 平面 $ABC = AC, BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore BC \perp$ 平面 ADC .

$\because AD \subset$ 平面 ADC ,

$\therefore BC \perp AD$.

$\because BC \cap CD = C$,

$\therefore AD \perp$ 平面 BCD .

(2) 解: $\because AC$ 的中点为 $M, AD = CD$,

$\therefore DM \perp AC$.

$\because$ 平面 $ADC \perp$ 平面 ABC , 平面 $ADC \cap$ 平面 $ABC = AC, DM \subset$ 平面 ADC ,

$\therefore DM \perp$ 平面 ABC .

$\therefore DM \perp CM, DM \perp MB$.

$\therefore \angle BMC$ 为二面角 $B-DM-C$ 的平面角.

设 $MC = a$,

则 $BC = 2a, MB = \sqrt{MC^2 + BC^2} = \sqrt{5}a$.

$\therefore \cos \angle BMC = \frac{MC}{MB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $B-DM-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

22. 解: (1) 过点 A 作 $AD \perp PB$ 交 PB 于点 D ,

如图所示.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PA \perp BC$.

又平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , 且平面 $PAB \cap$ 平面 $PBC = PB$,

所以 $AD \perp$ 平面 PBC , 又 $BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $AD \perp BC$.

又 $AD \cap PA = A, AD, PA \subset$ 平面 PAB ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

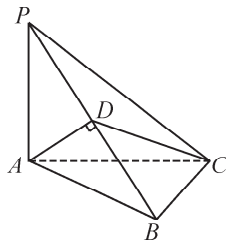
所以 $BC \perp BP, BC \perp BA$.

又 $PA \perp$ 平面 ABC ,

所以 $PA \perp AB, PA \perp AC$.

故四面体 $P-ABC$ 的四个面都为直角三角形,

则四面体 $P-ABC$ 为“鳖臑”.



(2) 连接 CD , 如图所示. 由(1)可知, 二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 $\angle BAC$,

二面角 $A-BC-P$ 的平面角为 $\angle ABP$,

则 $\angle BAC = \angle ABP = \frac{\pi}{4}$.

故 $\triangle BAC, \triangle ABP$ 均为等腰直角三角形.

设 $AB = BC = AP = 1$,

则 $AC = BP = \sqrt{2}, CP = \sqrt{3}$.

又 $AD \perp$ 平面 BCP ,

所以 AC 与平面 BCP 所成角为 $\angle ACD$.

又 $\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 且 $\angle ACD$ 为锐角,

所以 $\angle ACD = \frac{\pi}{6}$,

即 AC 与平面 BCP 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.

专题四 统计与概率(A卷)

1. C 解析: 由于样本中年龄分为三个层次: 老年, 中年, 青年, 因此采取分层抽样方法. 故选 C.

2. D 解析: 依题意, 总体是 36 个篮球, 样本是 4 个篮球, 样本容量是 4, 选项 A, B, C 都正确. 甲箱抽 3 个, 每个球被抽到的概率为 $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$, 乙箱抽 1 个, 每个球被抽到的概率为 $\frac{1}{9}$, 则每个篮球被抽到的可能性相同, D 不正确. 故选 D.

3. A 解析: 从题中给出的随机数表第 1 行第 3 列开始从左往右开始读取, 依次抽出 36, 36 (舍去), 33, 26, 16, 11. 故选出来的第 1 个零件的编号是 36.

4. A 解析: 设第 4 个小矩形对应的频率为 x , 则其余 $(n-1)$ 个小矩形对应的频率为 $1-x$, 所以 $x = \frac{3}{7}(1-x)$, 解得 $x = 0.3$. 故选 A.

5. A 解析: 因为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均值为 2, 方差为 1, 由数据 $ax_1+1, ax_2+1, \dots, ax_n+1 (a>0)$ 的平均值为 b , 方差为 4, 所以 $\begin{cases} a \cdot 2 + 1 = b, \\ a^2 \cdot 1 = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$ 故选 A.

6. A 解析: 将 2 个红球编号为 a_1, a_2 , 3 个黄球编号为 b_1, b_2, b_3 . 则从中不放回地依次随机摸出 2 个球有 $(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, a_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_2, b_1), (b_2, b_3), (b_3, a_1), (b_3, a_2), (b_3, b_1), (b_3, b_2)$, 共 20 种. 第 1 次摸到红球有 8 种, 所以摸到的第 1 个球是红球的概率为 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

7. B 解析: 因为感染人群中 O 型血、A 型血、B 型血、AB 型血的人数比为 $4:3:3:2$, 所以抽取的样本中 O 型血的人数为 $\frac{4n}{4+3+3+2} = \frac{n}{3}$, AB 型血的人数为 $\frac{2n}{4+3+3+2} = \frac{n}{6}$. 所以 $\frac{n}{3} - \frac{n}{6} = 20$. 解得 $n=120$.

8. C 解析: 由直方图可得, $(0.005+0.010+0.015+x+0.040) \times 10 = 1$, 解得 $x=0.03$, 故 A 错误; 在被抽取的学生中, 成绩在区间 $[70, 80)$ 的学生人数为 $10 \times 0.015 \times 400 = 60$, 故 B 错误; 估计全校学生的平均成绩为 $55 \times 0.05 + 65 \times 0.1 + 75 \times 0.15 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.4 = 84$ 分, 故 C 正确; 全校学生成绩的样本数据的 80% 分位数约 $90 + \frac{0.2}{0.4} \times 10 = 95$ 分, 故 D 错误. 故选 C.

9. ABD 解析: 对于 A, $D_3 = \text{"点数大于 3"} \supseteq D_1 = \text{"点数大于 2"}$, 显然 $D_3 \supseteq D_1$, A 正确; 对于 B, $D_4 = \text{"点数为 4"} \subseteq D_3 = \text{"点数大于 3"}$, $D_4 \subseteq D_3$, B 正确; 对于 C, 由 A 选项知, $D_3 \supseteq D_1$, 则 $D_1 \cup D_3 = D_1$, C 错误; 对于 D, $D_1 = \text{"点数大于 2"} \supseteq D_2 = \text{"点数不大于 2"}$, 显然不能同时发生, 则 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, D 正确. 故选 ABD.

10. ACD 解析: 对于 A, 因为每次抛掷硬币都是随机事件, 所以不一定有 500 次“正面向上”, 故 A 错误; 对于 B, 因为方差越小越稳定, 故 B 正确; 对于 C, 为了解我国中学生的视力情况, 应采取抽样调查的方式, 故 C 错误; 对于 D, 数据 1, 2, 5, 5, 5, 3, 3 按从小到大排列后为 1, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 则其中位数为 3, 众数为 5, 故 D 错误, 故选 ACD.

11. BC 解析: 将 2 名男同学分别记为 x, y , 3 名女同学分别记为 a, b, c , 则从 5 名同学中任选 2 人参加

社区服务的所有可能情况有 $(x, y), (x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c), (a, b), (a, c), (b, c)$, 共 10 种, 则 $P_1 = \frac{3}{10}, P_2 = \frac{1}{10}, P_3 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. 因为 $2P_1 = P_3, P_1 > 2P_2, P_1 + P_2 \neq P_3, P_1 \neq P_2 P_3$. 故选 BC.

12. BD 解析: 对于 A, 当掷骰子出现的结果为 1, 2, 3, 3, 6 时, 满足中位数为 3, 众数为 3, 所以 A 不可以判断; 对于 B, 若平均数为 3, 且出现点数为 6, 则其余 4 个数的和为 9, 当众数为 4 时, 其余 4 个数的和不可能为 9, 所以 B 可以判断一定不会出现点数 6; 对于 C, 当掷骰子出现的结果为 1, 1, 3, 4, 6 时, 满足平均数为 3, 中位数为 3, 可以出现点数 6, 所以 C 不能判断; 对于 D, 若平均数为 2, 且出现点数 6, 则方差 $S^2 > \frac{1}{5} \times (6-2)^2 = 3.2 > 2.4$, 所以当平均数为 2, 方差为 2.4 时, 一定不会出现点数 6. 故选 BD.

13. 15 解析: 设样本容量为 x , 则根据题意, 得 $x \times \frac{350}{750} = 7$, 解得 $x=15$.

14. 297 解析: 由题意, 得 $a=125, b=125, c=148-101=47$, 故 $a+b+c=125+125+47=297$.

15. $\frac{2}{5}$ 解析: 由题意任取两个不同的数字组成 1 个两位数, 共有: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54, 共 20 个. 其中偶数有: 12, 14, 24, 32, 34, 42, 52, 54, 共 8 个. 故所求概率 $P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

16. 0.968 解析: 设甲、乙、丙三名教师某天使用 1 号录播教室上课分别为事件 A, B, C , 则 $P(A)=0.6, P(B)=0.6, P(C)=0.8$, 则所求事件的概率 $P = 1 - P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 1 - 0.4 \times 0.4 \times 0.2 = 0.968$.

17. 解: 甲、乙两人进行围棋比赛, 所有的可能基本事件有: 甲获得胜利, 乙获得胜利, 甲、乙平局, 分别记为事件 I_1, I_2, I_3 , 且 I_1, I_2, I_3 彼此互斥, 则“甲获得比赛胜利或者平局”为事件 I_1, I_3 的和事件, “乙获得比赛胜利或者平局”为事件 I_2, I_3 的和事件. $\therefore P(A) = P(I_1 \cup I_3) = P(I_1) + P(I_3) = 0.7$, $P(B) = P(I_2 \cup I_3) = P(I_2) + P(I_3) = 0.4$. 又 $P(I_1) + P(I_2) + P(I_3) = 1$, $\therefore P(I_1) = 0.6$, $P(I_2) = 0.3$, $P(I_3) = 0.1$.

(1)甲获得比赛胜利的概率为 $P(I_1)=0.6$.

(2)甲、乙两人获得平局的概率为 $P(I_3)=0.1$.

18. 解: (1) 设事件“电话响第 k 声时被接”为 $A_k (k \in \mathbf{N})$,

则事件 A_k 彼此互斥.

设“打进的电话在响 5 声之前被接”为事件 A ,

则 $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.35 = 0.95$.

(2) 事件“打进的电话响 4 声而不被接”是事件 A “打进的电话在响 5 声之前被接”的对立事件, 记为 $\bar{A}$.

则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.95 = 0.05$.

19. 解: (1) 根据频率分布直方图可估计平均数

$\bar{x} = (5 \times 0.01 + 15 \times 0.02 + 25 \times 0.01 + 35 \times 0.04 + 45 \times 0.02) \times 10 = 29$.

(2) 由频率分布直方图可知, 违章车次在 $[30, 40)$ 的路口有 4 个, 记为 A, B, C, D ; 违章车次在 $[40, 50]$ 的路口有 2 个, 记为 a, b .

从“重点关注路口”中随机抽取两个路口, 则有 $AB, AC, AD, Aa, Ab, BC, BD, Ba, Bb, CD, Ca, Cb, Da, Db, ab$, 共 15 种情况.

其中抽出的路口中有且仅有一个违章车次在 $[40, 50]$ 的情况有 $Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb, Da, Db$, 共 8 种情况,

$\therefore$ 所求概率 $P = \frac{8}{15}$.

20. 解: (1) 根据抽样数据可知,

A 生产线合格产品数量的平均数为 $\frac{1}{5} \times (91 + 89 + 93 + 95 + 92) = 92$,

B 生产线合格产品数量的平均数为 $\frac{1}{5} \times (94 + 91 + 87 + 92 + 96) = 92$.

(2) A 生产线合格产品数量的方差为

$S_A^2 = \frac{1}{5} \times [(91-92)^2 + (89-92)^2 + (93-92)^2 + (95-92)^2 + (92-92)^2] = 4$,

B 生产线合格产品数量的方差为

$S_B^2 = \frac{1}{5} \times [(94-92)^2 + (91-92)^2 + (87-92)^2 + (92-92)^2 + (96-92)^2] = 9.2$,

因为 $S_A^2 < S_B^2$,

所以 A 生产线的产品质量更为稳定.

21. 解: (1) 因为 $(0.02 + 0.04 + 0.06 + 0.07 + 0.09 + 0.10 + x) \times 2 = 1$,

解得 $x = 0.12$.

(2) 由题意可得, 这批产品中优等品有 $3000 \times (0.18 + 0.20) = 1140$ (件),

这批产品中不合格品有 $3000 \times 0.04 = 120$ (件),

这批产品中合格品有 $3000 - 1140 - 120 = 1740$ (件),

因为 $1140 \times 5 + 1740 \times 3 - 120 \times 2 = 10680$ (元),

即该工厂生产的产品一个月所获得的总利润为 10680 元,

因为 $10680 < 11000$,

所以需要对该工厂设备实施升级改造.

22. 解: (1) 设甲在第 i 局获胜为事件 $A_i (i=1, 2, 3)$, 事件 B = “甲获得本场比赛胜利”,

则 $B = A_1 A_2 \cup (A_1 \bar{A}_2 A_3) \cup (\bar{A}_1 A_2 A_3)$,

所以 $P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} + (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$.

(2) 若甲在第二场与乙比赛, 则甲胜乙, 且在甲与丙, 甲与丁的比赛中, 甲只胜一场. 此时, 甲恰好连胜两场的概率 $P_1 = \frac{1}{2} \times \left[\frac{2}{3} \times (1 - \frac{3}{4}) + (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} \right] \times 2 = \frac{5}{12}$.

若甲在第二场与丙比赛, 则甲胜丙, 且在甲与乙, 甲与丁的比赛中, 甲只胜一场. 此时, 甲恰好连胜两场的概率 $P_2 = \frac{2}{3} \times \left[\frac{3}{4} \times (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{3}{4}) \times \frac{1}{2} \right] \times 2 = \frac{2}{3}$.

若甲在第二场与丁比赛, 则甲胜丁, 且在甲与乙, 甲与丙的比赛中, 甲只胜一场. 此时, 甲恰好连胜两场的概率 $P_3 = \frac{3}{4} \times \left[\frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{2}{3} \right] \times 2 = \frac{3}{4}$.

因为 $P_1 < P_2 < P_3$,

所以甲在第二场与丁比赛时, 甲在三场比赛中恰好连胜两场的概率最大.

专题四 统计与概率(B卷)

1. C 解析: 由于 $98 > 55$, 所以 98 不能作为编号. 故选 C.

2. D 解析: 由题意可得, $\frac{9}{n-1} = \frac{1}{4}$, 则 $n = 37$, 所以每个个体被抽到的机会为 $\frac{10}{37}$. 故选 D.

3. B 解析:由题意,得 $\frac{n}{960+480} = \frac{24}{960}$,解得 $n=36$.

故选 B.

4. B 解析:由题意,甲、乙两人下棋,两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$,甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$,则甲不输的概率为

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \text{ 故选 B.}$$

5. D 解析: $\because$ 一个公司有 8 名员工,其中 6 名员工的月工资分别为 6 200, 6 300, 6 500, 7 100, 7 500, 7 600. $\therefore$ 当另外 2 名员工的工资都小于 6 300 时,中位数为 $(6\ 300+6\ 500)\div 2=6\ 400$,当另外 2 名员工的工资都大于 7 500 时,中位数为 $(7\ 100+7\ 500)\div 2=7\ 300$, $\therefore$ 这 8 名员工月工资的中位数的取值区间为 $[6\ 400, 7\ 300]$, $\therefore$ 这 8 位员工月工资的中位数不可能是 7 400. 故选 D.

6. D 解析:对于选项 A, $n(AB) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 6 + 4 - 8 = 2$, 所以 $P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, 故 A 正确;对于选项 B, $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, 故 B 正确;对于选项 C, $n(\bar{A}B) = n(B) - n(AB) = 4 - 2 = 2$, 所以 $P(\bar{A}B) = \frac{n(\bar{A}B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, 故 C 正确;对于选项 D, $n(\bar{A}\bar{B}) = n(\Omega) - n(A \cup B) = 12 - 8 = 4$, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{n(\bar{A}\bar{B})}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, 故 D 错误. 故选 D.

7. D 解析: $\because$ 一组数据的平均数为 a , 方差为 b , 将这组数据的每个数都乘以 $m(m>0)$ 得到一组新数据, 则新数据的平均值 $\bar{x} = ma$, 方差 $S^2 = m^2b$. 故选 D.

8. C 解析:设 A_i 表示第 i 次通过第一类检验, B_i 表示第 i 次通过第二类检验($i=1, 2$),

由题意, 得 $P(A_1B_1 + \bar{A}_1A_2B_1 + A_1\bar{B}_1B_2 + \bar{A}_1A_2\bar{B}_1B_2) = \frac{5}{6}$, 即 $\frac{3}{4}p + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}p + \frac{3}{4} \times (1-p)p + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times (1-p)p = \frac{5}{6}$, 解得 $p = \frac{2}{3}$ 或 $p = \frac{4}{3}$ (舍). 故选 C.

9. BC 解析:事件 Ω_1 = “只选择甲兴趣班”; Ω_2 = “至少选择一个兴趣班”, 包含只选择甲兴趣班, 只选择乙兴趣班, 选择甲、乙两种兴趣班; Ω_3 = “至多选择一个兴趣班”, 包含选择甲兴趣班, 选择乙兴趣班, 两种兴趣班都不选择; Ω_4 = “一个兴趣班都不选”;

所以 Ω_1 与 Ω_2 不是互斥事件, 故 A 错误; Ω_2 与 Ω_4 既是互斥事件也是对立事件, 故 B 正确; Ω_2 与 Ω_3 不是互斥事件, 故 C 正确; Ω_3 与 Ω_4 不是互斥事件, 故 D 错误. 故选 BC.

10. ABC 解析:依题意, $P(A) = \frac{55}{100} = 0.55$, $P(B) =$

$\frac{18}{100} = 0.18$, 显然事件 A, B 互斥, $P(C) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) = 0.27$, 事件 B, C 互斥, 则 $P(B+C) = P(B) + P(C) = 0.45$, 则选项 A, B, C 都正确, 选项 D 不正确. 故选 ABC.

11. BCD 解析:对于 A, 2 个球不都是红球的概率为 $1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, 故 A 不正确;对于 B, 2 个球都是

红球的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 故 B 正确;对于 C, 至

少有 1 个红球的概率为 $1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, 故 C 正

确;对于 D, 2 个球中恰好有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. ACD 解析:甲的 10 次成绩中, 最大值为 10, 最小值为 6, 极差等于 4, 故 A 正确;因为 $10 \times 75\% = 7.5$, 所以将甲的 10 次成绩从小到大排列后, 第 8 个数为 75% 分位数, 即 75% 分位数为 9, 故 B 不正确;经计算, 甲的 10 次成绩的平均数等于 8, 又已知乙的 10 次成绩的平均数等于 8, 则甲和乙的 20 次成绩的平均数为 8, 故 C 正确; $s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{10} \times [(6-8)^2 + 3 \times (7-8)^2 + 3 \times (8-8)^2 + (9-8)^2 + 2 \times (10-8)^2] = 1.6$,

则甲、乙 20 次成绩的方差为

$$s^2 = \frac{10 \times (1.6+0) + 10 \times (0.4+0)}{10+10} = \frac{1}{20} \times (10 \times$$

$1.6 + 10 \times 0.4) = 1$, 故 D 正确. 故选 ACD.

13. 800 解析:设该校的女生人数为 x 人. 依题意, 得 $\frac{200}{2\ 000} = \frac{200-120}{x}$. 解得 $x=800$.

14. $\frac{1}{3}$ 解析:依题意, a 的值可以为 1, 2, 3, 4, 5, 6. 若方程 $ax^2 - 4x + 1 = 0$ 无实数解, 则 $\Delta = (-4)^2 - 4a < 0$, 即 $a > 4$, 即当 $a=5$ 或 $a=6$ 时满足方程无实数根. $\therefore$ 使方程 $ax^2 - 4x + 1 = 0$ 无实数解的概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

15. 60 解析:因为甲实得 80 分, 记为 60 分, 少记 20 分, 乙实得 70 分, 记为 90 分, 多记 20 分, 所以总分

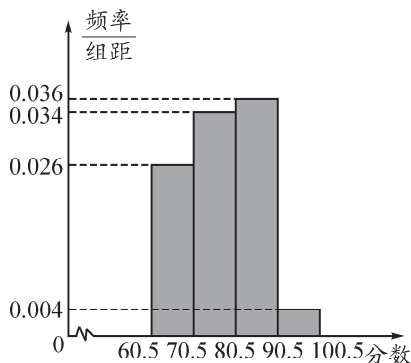
没有变化,因此更正前后的平均分没有变化,都是 80 分. 设甲、乙以外的其他同学的成绩分别为 $a_3, a_4, \dots, a_{40}$, 因为更正前的方差为 70, 所以 $(60-80)^2 + (90-80)^2 + (a_3-80)^2 + \dots + (a_{40}-80)^2 = 70 \times 40$, 所以 $(a_3-80)^2 + \dots + (a_{40}-80)^2 = 2800 - 400 - 100 = 2300$. 故更正后的方差为 $s^2 = \frac{1}{40} \times [(80-80)^2 + (70-80)^2 + (a_3-80)^2 + \dots + (a_{40}-80)^2] = \frac{100+2300}{40} = 60$.

16. $\frac{9}{35}$ 解析: 由题意知, 连续依次摸出的 4 个球分别是白白红红, 白红白红, 红白白红, 共 3 种情况, 第一种摸出“白白红红”的概率为 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$, 第二种摸出“白红白红”的概率为 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$, 第三种摸出“红白白红”的概率为 $\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$, 所以连续摸 4 次停止的概率为 $\frac{3}{35} + \frac{3}{35} + \frac{3}{35} = \frac{9}{35}$.

17. 解: (1) 频率分布表如下:

	分组	频数	频率
第 1 组	60.5~70.5	13	0.26
第 2 组	70.5~80.5	17	0.34
第 3 组	80.5~90.5	18	0.36
第 4 组	90.5~100.5	2	0.04
合计		50	1

频率分布直方图如图.



- (2) 因为获一等奖的概率约为 0.04, 所以估计全校获一等奖的人数为 $150 \times 0.04 = 6$.

18. 解: (1) 由题意知, $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

则 (m, n) 所有可能的取法共 36 种.

当 $a \perp b$ 时, 得 $m-3n=0$, 即 $m=3n$.

满足条件的共有 2 种: $(3, 1), (6, 2)$,

所以事件 $a \perp b$ 发生的概率为 $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

(2) 当 $|a| \leq |b|$ 时, 可得 $m^2 + n^2 \leq 10$,

有 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$,

共 6 种情况.

故 $|a| \leq |b|$ 发生的概率为 $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

19. 解: (1) 由 A, B 两名同学 8 次测验的成绩可知, B 同学的平均成绩高于 A 同学的平均成绩,

所以选派 B 同学参加数学竞赛更好.

(2) 设 B 同学的平均分为 $\bar{x}$,

因为 $\bar{x} = \frac{1}{8} \times (73 + 84 + 75 + 73 + 70 + m + 80 + n + 76 + 85) = 78$,

所以 $m+n=8$. ①

因为 $S^2 = \frac{1}{8} \times [5^2 + 6^2 + 3^2 + 5^2 + (m-8)^2 + (n+2)^2 + 2^2 + 7^2] = 19$,

所以 $(m-8)^2 + (n+2)^2 = 4$. ②

联立①②解得, $m=8, n=0$.

20. 解: (1) 记甲家庭回答正确这道题, 乙家庭回答正确这道题, 丙家庭回答正确这道题分别为事件 A, B, C,

则 $P(A) = \frac{3}{4}$,

$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{12}$,

$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$.

所以 $[1-P(A)] \cdot [1-P(C)] = \frac{1}{12}$,

$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$.

所以 $P(B) = \frac{3}{8}, P(C) = \frac{2}{3}$.

(2) 无家庭回答正确的概率为

$P_0 = P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{4} \times$

$\frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{96}$,

有一个家庭回答正确的概率为

$P_1 = P(A \bar{B} \bar{C} + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} +$

$\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{24}$.

所以甲、乙、丙三个家庭中不少于两个家庭回答正确这道题的概率 $P = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{5}{96} - \frac{7}{24} = \frac{21}{32}$.

21. 解: (1) 从袋中一次性摸出 2 个球, 所包含的基本事件有: $(1, 2), (1, 3), (1, a), (2, 3), (2, a), (3, a)$, 共 6 个基本事件.

摸出的 2 个球都是白球, 所包含的基本事件有: $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$, 共 3 个基本事件.

则从中一次性摸出 2 个球, 摸出的 2 个球都是白球的概率为 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(2) 从袋中连续取两次, 每次取一球后放回, 则所包含的基本事件有: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, a), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, a), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, a), (a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, a)$, 共 16 个基本事件.

则取出的 2 个球中至少有 1 个黑球, 所包含的基本事件有: $(1, a), (2, a), (3, a), (a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, a)$, 共 7 个基本事件.

因此取出的 2 个球中至少有 1 个黑球的概率为 $P = \frac{7}{16}$, 即甲胜的概率为 $\frac{7}{16}$.

则乙胜的概率为 $\frac{9}{16}$,

因为 $\frac{9}{16} > \frac{7}{16}$, 所以此游戏不公平.

22. 解: (1) 由题意可知, 当日需求量 $n < 30$ 时,

当日的利润 $y = 8n + 5(30 - n) - 6 \times 30 = 3n - 30$,

当日需求量 $n \geq 30$ 时,

当日的利润 $y = 8 \times 30 - 6 \times 30 = 60$ (元).

故当日的利润 y 关于当日需求量 n 的函数解析式

$$y = \begin{cases} 3n - 30, & n < 30, \\ 60, & n \geq 30, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}.$$

由题意可得,

日需求量 n /个	28	29	30	31	32	33
日利润/元	54	57	60	60	60	60
频数	3	4	6	6	7	4

则当天的利润不少于 60 元的概率 $P = \frac{6+6+7+4}{30} = \frac{23}{30}$.

(2) 由(1)可得, 甲的方案 30 天的日平均利润为 $\frac{54 \times 3 + 57 \times 4 + 60 \times 23}{30} = 59$ (元),

同理可得, 乙方案的日利润 y 关于当日需求量 n

$$\text{的函数解析式为 } y = \begin{cases} 3n - 31, & n < 31, \\ 62, & n \geq 31, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}.$$

由题意可得,

日需求量 n /个	28	29	30	31	32	33
日利润/元	53	56	59	62	62	62
频数	3	4	6	6	7	4

则乙的方案 30 天的日平均利润为 $\frac{53 \times 3 + 56 \times 4 + 59 \times 6 + 62 \times 17}{30} = \frac{1791}{30} = 59.7$

(元).

因为 $59.7 > 59$,

所以乙的方案收益更好.

期中检测卷(A卷)

1. C 解析: $\frac{1+3i}{1-2i} = \frac{(1+3i) \cdot (1+2i)}{(1-2i) \cdot (1+2i)} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i$, 故选 C.

2. C 解析: 根据题意, 设 a 与 b 的夹角为 θ , $|b| = t$, 则 $|a| = 3|b| = 3t$. 若 $(2a+3b) \perp b$, 则 $(2a+3b) \cdot b = 2a \cdot b + 3b^2 = 6t^2 \cos \theta + 3t^2 = 0$, 即 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

又由 $0 \leq \theta \leq \pi$, 则 $\theta = \frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

3. D 解析: 只有 B_1C_1 与 EF 在同一平面内, 是相交的, 其他 A, B, C 选项中的直线与 EF 都是异面直线. 故选 D.

4. D 解析: 设 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 的夹角为 θ , $\because A(-3, 2), B(2, 3), \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3 \times 2 + 2 \times 3 = 0, \therefore \vec{OA} \perp \vec{OB}, \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin \theta = 1$. 则 $|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \sin \theta = \sqrt{13} \times \sqrt{13} \times 1 = 13$. 故选 D.

5. B 解析: 由正弦定理, 得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. 则 $\sin B =$

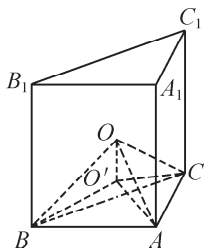
$$\frac{AC \sin A}{BC} = \frac{4\sqrt{2} \sin 60^\circ}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 因为 } BC > AC, \text{ 所以 } A >$$

B . 又 $A = 60^\circ$, 所以 $B = 45^\circ$. 故选 B.

6. D 解析: 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$ 或 m, n 相交, 或 m, n 异面, 故 A 错误; 若 $l \parallel \alpha, m \subset \alpha$, 则 $l \parallel m$ 或 l, m 异面, 故 B 错误; 若 $\alpha \perp \beta, l \subset \alpha$, 则 $l \perp \beta$ 或 l 与 β 斜交或 $l \parallel \beta$, 故 C 错误; 过 l 作平面 $\gamma \cap \alpha = b$, 则 $l \parallel b$. 又 $l \perp \beta$, 则 $b \perp \beta$, 又 $b \subset \alpha$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故 D 正确. 故选 D.

7. A 解析: 如图, 设底面三角形 ABC 的外心是 O' ,

$$O'A = O'B = O'C = r.$$



在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$, 由余弦定理, 得 $BC = \sqrt{4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$.

由正弦定理, 可得 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $r = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ} = 2$. 设球心为 O , 则 $OO' \perp$ 平面 ABC , $O'B \subset$ 平面 ABC , 所以 $OO' \perp O'B$. 在 $\text{Rt}\triangle OBO'$ 中, $OO' = \frac{1}{2}AA_1 = 1$, $R = OB = \sqrt{OO'^2 + O'B^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 故此球的表面积为 $4\pi R^2 = 20\pi$. 故选 A.

8. D 解析: 因为 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, 由正弦定理, 得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}. \text{ 则 } b =$$

$2\sin B$, $c = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$. 因为 $\triangle ABC$ 的内角 A ,

$$B, C \text{ 为锐角, 所以 } \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \text{ 所以 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < 2B - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$2 < 4\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \leq 4. \text{ 由余弦定理, 得 } a^2 = b^2 +$$

$$c^2 - 2bccos A \Rightarrow 3 = b^2 + c^2 - bc, \text{ 则 } b^2 + c^2 + bc =$$

$$2bc + 3 = 8\sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) + 3 = 4\sqrt{3}\sin B \cos B +$$

$$4\sin^2 B + 3 = 2\sqrt{3}\sin 2B - 2\cos 2B + 5 = 5 +$$

$$4\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in (7, 9]. \text{ 故选 D.}$$

9. BD 解析: 对于选项 A, $\vec{AB} + \vec{MB} + \vec{BO} + \vec{OM} = \vec{AB}$, 选项 A 不正确; 对于选项 B, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0}$, 选项 B 正确; 对于选项 C, $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{BO} + \vec{CO} = \vec{BA}$, 选项 C 不正确; 对于选项 D, $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD} - \vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BD}) - (\vec{AC} + \vec{CD}) = \vec{AD} - \vec{AD} = \vec{0}$. 选项 D 正确.

10. ABC 解析: 对于选项 A, 因为 O 为 BD 的中点, M 为 PB 的中点, 则 $OM \parallel PD$, A 选项正确; 对于

选项 B, 因为 $OM \parallel PD$, $OM \not\subset$ 平面 PCD , $PD \subset$ 平面 PCD , 所以 $OM \parallel$ 平面 PCD , 故 B 选项正确; 对于选项 C, 因为 $OM \parallel PD$, $OM \not\subset$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $OM \parallel$ 平面 PAD , 故 C 选项正确; 对于选项 D, 因为 $M \in$ 平面 PAB , 所以 OM 不平行于平面 PAB , 故 D 选项错误. 故选 ABC.

11. AD 解析: 对于选项 A, 设 $z_1 = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$,

$$z_2 = c + di, c, d \in \mathbf{R}, \text{ 则 } |z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = 0, \therefore \begin{cases} a-c=0, \\ b-d=0, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\begin{cases} a=c, \\ b=d, \end{cases} \therefore z_1 = z_2, \text{ A 正确;}$$

对于选项 B, 令 $z_1 = 1$, $z_2 = i$, 则 $|z_1| = |z_2| = 1$, 此时 $z_1^2 \neq z_2^2$, B 错误;

对于选项 C, 令 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i$, 则 $z_1 + z_2 = 1 > 0$, 此时 $z_2 \neq \bar{z}_1$, C 错误;

对于选项 D, 设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, 则 $z_1 z_2 =$

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 0, \therefore \begin{cases} ac - bd = 0, \\ ad + bc = 0, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\begin{cases} ac = bd, \\ ad = -bc, \end{cases} \text{ 则 } a^2 cd = -b^2 cd.$$

若 $c = d = 0$, 则 $a^2 cd = -b^2 cd$ 成立, 此时 $z_2 = 0$;

若 $c = 0, d \neq 0$, 由 $ac = bd$ 知, $b = 0$; 由 $ad = -bc$ 知, $a = 0$, 此时 $z_1 = 0$;

同理可知, 当 $c \neq 0, d = 0$ 时, $z_1 = 0$;

若 $c \neq 0, d \neq 0$, 由 $a^2 cd = -b^2 cd$ 得, $a^2 = -b^2$,

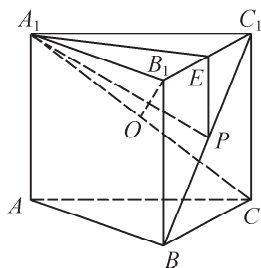
$\therefore a = b = 0$, 此时 $z_1 = 0$;

综上所述, 若 $z_1 z_2 = 0$, 则 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$, D 正确.

故选 AD.

12. ABD 解析: 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = BB_1$.

对于选项 A, 当点 P 运动到 BC_1 的中点时, 取 B_1C_1 的中点 E , 连接 A_1E, EP , 如图所示.

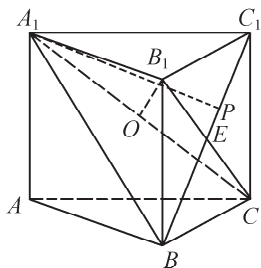


易得 $EP \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\therefore$ 直线 A_1P 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角的正切值为 $\tan \angle PA_1E = \frac{EP}{A_1E}$.

$$\because EP = \frac{1}{2}BB_1, A_1E = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1E^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}BB_1,$$

$$\therefore \tan \angle PA_1E = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{故 A 选项正确.}$$

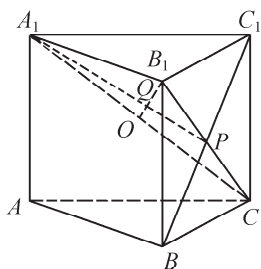
对于选项 B, 连接 B_1C , 与 BC_1 相交于点 E , 并连接 A_1B , 如图所示.



由题意知, B_1BCC_1 为正方形, 即有 $B_1C \perp BC_1$.

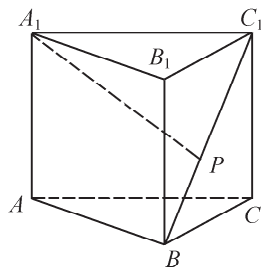
又 $AB \perp BC$ 且三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore A_1B_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1 . $\because BC_1 \subset$ 平面 B_1BCC_1 , $\therefore A_1B_1 \perp BC_1$. 又 $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$, $\therefore BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C . $\because OB_1 \subset$ 平面 A_1B_1C , $\therefore BC_1 \perp OB_1$. 同理可证, $A_1B \perp OB_1$. 又 $A_1B \cap BC_1 = B$, $\therefore OB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1 . $\because A_1P \subset$ 平面 A_1BC_1 , $\therefore A_1P \perp OB_1$, 故 B 正确.

对于选项 C, 当点 P 运动到 BC_1 的中点时, 即在 $\triangle A_1B_1C$ 中, A_1P, OB_1 均为中线, 则 A_1P 与 OB_1 相交于点 Q , $\therefore Q$ 为 $\triangle A_1B_1C$ 的重心. $\therefore \frac{PQ}{QA_1} = \frac{1}{2}$, 故 C 错误;



对于选项 D, $\because A_1B_1 \parallel AB$, $\therefore$ 直线 A_1P 与 AB 所成的角即为 A_1B_1 与 A_1P 所成的角, 为 $\angle B_1A_1P$. 如图, 点 P 在 BC_1 上运动, 当 P 在点 B 或 C_1 处时, $\angle B_1A_1P$ 最大, 为 45° ;

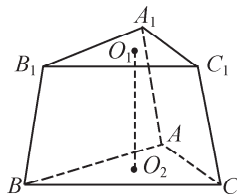
当 P 在 BC_1 的中点时, $\angle B_1A_1P$ 最小, 此时 $\tan \angle B_1A_1P = \frac{B_1P}{A_1B_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \angle B_1A_1P$ 不可能是 30° , 故 D 选项正确. 故选 ABD.



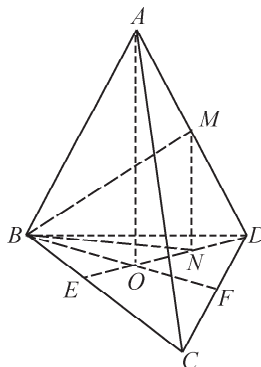
13.3 解析: $\because$ 复数 $z = \frac{1}{m+5} + (m^2 + 2m - 15)i$ 为实数, $\therefore \begin{cases} m^2 + 2m - 15 = 0, \\ m + 5 \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m = 3 \text{ 或 } m = -5, \\ m \neq -5, \end{cases} \therefore m = 3.$

14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: 由题意可得, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times 1 \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $(k\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$, 即 $k\mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = k - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, 解得 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 100π 解析: 由题意, 设正三棱台为 $ABC-A_1B_1C_1$, O_1 为上底面截面圆的圆心, O_2 为下底面截面圆的圆心. 易知上底面 $A_1B_1C_1$ 所在平面截球所得圆的半径是 $O_1A_1 = 3$, 下底面 ABC 所在平面截球所得圆的半径是 $OA = 4$. 由正三棱台的性质可知, 其外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上. 当 O 在线段 O_1O_2 上时, 则 $\sqrt{R^2 - 3^2} + \sqrt{R^2 - 4^2} = 7$, 解得 $R^2 = 25$. 当 O 在 O_1O_2 的延长线上时, 则 $\sqrt{R^2 - 3^2} - \sqrt{R^2 - 4^2} = 7$, 无解. 因此该球的表面积是 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 25 = 100\pi$.



16. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 解析: 取 BC 的中点 E , DC 的中点 F , 连接 DE, BF , 如图所示.



由题意,得 $DE \cap BF = O$. 取 OD 的中点 N , 连接 MN, BN , 则 $MN \parallel AO$. $\therefore \angle BMN$ (或其补角) 是异面直线 BM 与 AO 所成角. 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2, 则 $BM = DE = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, $OD = \frac{2}{3}DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. $\therefore AO = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. $\therefore MN = \frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{6}}{3}$. $\therefore O$ 是点 A 在底面 BCD 内的射影, $MN \parallel AO$, $\therefore MN \perp$ 平面 BCD . $\therefore \angle BNM = 90^\circ$.

$$\therefore \cos \angle BMN = \frac{MN}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \therefore \text{异面直线 } BM$$

与 AO 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

17. 解: (1) 因为 $a = \sqrt{7}, b = 2, A = 60^\circ$,

$$\text{由正弦定理, 得 } \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin B},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(2) 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$,

$$\text{即 } \sqrt{7}^2 = 2^2 + c^2 - 2 \times 2ccos 60^\circ.$$

解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去),

所以 $c = 3$.

18. 证明: (1) 取 CE 的中点 G , 连接 FG, BG , 如图所示.

因为 F 为 CD 的中点,

$$\text{所以 } FG \parallel DE, FG = \frac{1}{2}DE.$$

因为 $AB \perp$ 平面 $ACD, DE \perp$ 平面 ACD ,

所以 $AB \parallel DE$.

所以 $FG \parallel AB$.

$$\text{因为 } AB = \frac{1}{2}DE,$$

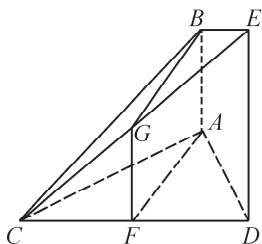
所以 $FG = AB$.

所以四边形 $GFAB$ 为平行四边形.

所以 $AF \parallel BG$.

因为 $AF \not\subset$ 平面 $BCE, BG \subset$ 平面 BCE ,

所以 $AF \parallel$ 平面 BCE .



(2) 因为 $\triangle ACD$ 为等边三角形, F 为 CD 的中点,

所以 $AF \perp CD$.

因为 $DE \perp$ 平面 $ACD, AF \subset$ 平面 ACD ,

所以 $DE \perp AF$.

因为 $CD \cap DE = D$,

所以 $AF \perp$ 平面 CDE .

因为 $AF \parallel BG$,

所以 $BG \perp$ 平面 CDE .

因为 $BG \subset$ 平面 BCE ,

所以平面 $BCE \perp$ 平面 CDE .

19. 解: (1) $\therefore \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

$$\therefore AB = 2, AC = 3, \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times$$

$$\frac{1}{2} = 3.$$

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} \times 2^2 - \frac{2}{3} \times 3 + 3^2}$$

$$= \frac{\sqrt{67}}{3},$$

即 CD 的长为 $\frac{\sqrt{67}}{3}$.

$$(2) \therefore \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} +$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 +$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 3 = \frac{7}{3}.$$

20. (1) 证明: 设 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k (k > 0)$.

则 $a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$.

$$\text{代入 } \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ 中,}$$

$$\text{得 } \frac{\cos A}{k \sin A} + \frac{\cos B}{k \sin B} = \frac{\sin C}{k \sin C}.$$

整理, 得 $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B)$.

在 $\triangle ABC$ 中,由 $A+B+C=\pi$,
得 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,
所以 $\sin A \sin B = \sin C$.

(2)解:因为 $b^2+c^2-a^2=\frac{6}{5}bc$,

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{4}{5}.$$

因为 $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

$$\text{所以 } \frac{4}{5} \sin B = \frac{4}{5} \cos B + \frac{3}{5} \sin B.$$

$$\text{则 } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 4.$$

$$21. \text{解: (1)} \because a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A,$$

$$\therefore \sin A \sin \frac{A+C}{2} = \sin B \sin A.$$

$$\because 0 < A < \pi,$$

$$\therefore \sin A > 0.$$

$$\therefore \sin \frac{A+C}{2} = \sin B.$$

$$\therefore \frac{A+C}{2} = B \text{ 或 } \frac{A+C}{2} + B = \pi.$$

$$\because A+B+C=\pi,$$

$$\therefore \frac{A+C}{2} + B = \pi \text{ 不成立.}$$

$$\therefore \frac{A+C}{2} = B.$$

$$\text{又 } \because A+B+C=\pi,$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

(2) $\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

由(1)知, $B=\frac{\pi}{3}$, $A+B+C=\pi$, 得 $A+C=\frac{2}{3}\pi$.

$$\text{则 } \begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}.$$

$$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, c=1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \sin B$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \cos C - \cos \frac{2\pi}{3} \sin C}{\sin C}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sin \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\tan C} - \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{3}{8} \frac{1}{\tan C} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\because \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}, \therefore \tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{8} < \frac{3}{8} \frac{1}{\tan C} + \frac{\sqrt{3}}{8} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$22. \text{解: (1)} f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x) - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 则 } \frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3},$$

$$\therefore -1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

$\therefore f(x)$ 的取值范围为 $[-2, 1]$.

(2) $\because g(x) = f(x+t) = 2\cos\left(2x+2t+\frac{\pi}{3}\right)$ 为偶函数,

$$\therefore 2t + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\therefore t = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}).$$

因此当 $k=0$ 时, $|t|_{\min} = \frac{\pi}{6}$.

期中检测卷(B卷)

1. C 解析: 因为 $a-1+(a-2)i$ 为实数, 所以 $a-2=0$. 所以 $a=2$. 故选 C.

2. C 解析: 由题意可得 $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = -6\mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2^2 = -6 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{7}{2}.$$

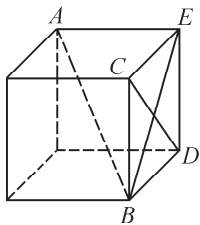
$$\text{又 } |\mathbf{a}| = \sqrt{(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^2} = \sqrt{4\mathbf{e}_1^2 + 4\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^2} = \sqrt{7},$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)^2} = \sqrt{9\mathbf{e}_1^2 - 12\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_2^2} =$$

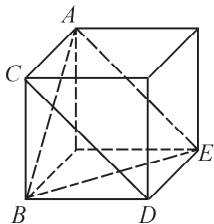
$$\sqrt{7}, \text{ 所以 } \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = -\frac{1}{2}.$$

因为 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 120^\circ$. 故选 C.

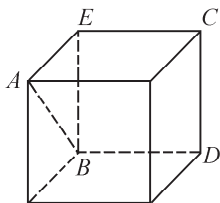
3. A 解析: 对于选项 A, 如图, 连接 BE, 则在正方体中, $CD \perp BE$, 因为 $AE \perp$ 平面 BCED, $CD \subset$ 平面 BCED, 则 $AE \perp CD$. 又 $AE \cap BE = E$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABE. 因为 $AB \subset$ 平面 ABE, 所以 $CD \perp AB$, 故 A 正确.



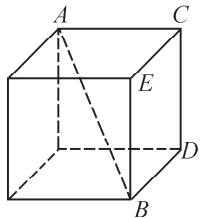
对于选项 B, 如图, 连接 AE, BE , 易得 $CD \parallel AE$, 则 $\angle BAE$ (或其补角) 为异面直线 AB, CD 所成的角. 因为 $\angle BAE = 60^\circ$, 所以 AB, CD 不垂直, 故 B 错误.



对于选项 C, 如图, $CD \parallel BE$, 则 $\angle ABE$ (或其补角) 为异面直线 AB, CD 所成的角, 易得 $\angle ABE = 45^\circ$, 故 AB, CD 不垂直, 故 C 错误.



对于选项 D, 如图, $CD \parallel BE$, 则 $\angle ABE$ (或其补角) 为异面直线 AB, CD 所成角, 显然 $\angle ABE \neq 90^\circ$, 故 AB, CD 不垂直, 故 D 错误.

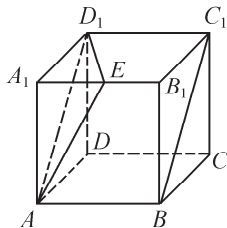


故选 A.

4. B 解析: 两个不同的平面 α, β , 直线 $m \perp$ 平面 β , 当 $\alpha \perp \beta$ 时, $m \subset \alpha$ 或 $m \parallel \alpha$, 不充分; 当 $m \parallel \alpha$ 时, $\alpha \perp \beta$, 必要. 故选 B.

5. B 解析: 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 AD_1, AE , 可得 $AD_1 \parallel BC_1$, 所以异面直线 D_1E 与 BC_1 所成的角即为直线 D_1E 与 AD_1 所成的角, 即 $\angle AD_1E$ (或其补角) 为异面直线 D_1E 与 BC_1 所成的角. 不妨设 $AA_1 = 2$, 则 $AD_1 = 2\sqrt{2}$, $D_1E = AE = \sqrt{5}$, 所以 $\cos \angle AD_1E = \frac{8+5-5}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} =$

$\frac{\sqrt{10}}{5}$. 故选 B.



6. A 解析: 因为 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin A$, 又 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A$. 所以 $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin A$, 所以 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 则 $A = 30^\circ$. 故选 A.

7. D 解析: 由题意, 得 $\frac{1}{2} \sin A - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = 0$, 则 $\tan A = \sqrt{3}$. 因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. 由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{64+c^2-49}{2 \times 8c} = \frac{1}{2}$. 解得 $c = 3$ 或 $c = 5$.

当 $c = 3$ 时, 最大角为 B , 又 $\cos B = \frac{49+9-64}{2 \times 7 \times 3} < 0$, 故 B 为钝角, 不合题意, 舍去;

当 $c = 5$ 时, 最大角为 B , 又 $\cos B = \frac{49+25-64}{2 \times 7 \times 5} > 0$, 故 B 为锐角, 符合题意.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

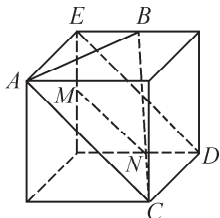
故选 D.

8. B 解析: 设 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 由 $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$ 知, $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD}$. $\therefore \overrightarrow{AP} = 3x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AC}$. $\because D, P, C$ 三点共线, $\therefore 3x + y = 1$. ① 由 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ 知, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$. $\therefore \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + 2y\overrightarrow{AE}$. $\because B, P, E$ 三点共线, $\therefore x + 2y = 1$. ② 由 ①② 得, $x = \frac{1}{5}, y = \frac{2}{5}$. $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. 又 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = (\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{5} (\overrightarrow{AB}^2 - 4\overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{5} \times (6^2 - 4 \times 2^2) = 4$. 故选 B.

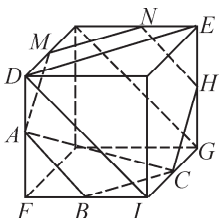
9. ABD 解析: 对于选项 A, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 时, $\overrightarrow{AB}$ 所在的直线与 $\overrightarrow{CD}$ 所在的直线可能重合, 故 A 不正确; 对于选项 B, 长度相等且方向相同的向量叫作相等向量, 故 B 不正确; 对于选项 C, 按定义, 零向量的长度等于

0, C 正确; 对于选项 D, 非零的共线向量是方向相同或相反的向量, 可以在同一直线上, 也可以不在同一直线上, 故 D 不正确. 故选 ABD.

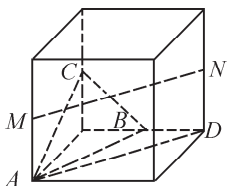
10. AD 解析: 对于选项 A, 如图, 连接 ED . 由图可知 $MN \parallel DE \parallel AC$, $MN \not\subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC , A 正确.



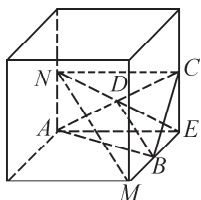
对于选项 B, 设 H 是 EG 的中点, 连接 AM, CH, NH , 如图. 结合正方体的性质可知, $AB \parallel NH$, $MN \parallel BC$, $AM \parallel CH$, 所以 A, B, C, H, N, M 六点共面, B 错误.



对于选项 C, 连接 AD , 如图所示, 根据正方体的性质可知 $MN \parallel AD$, 又 $AD \not\subset$ 平面 ABC , 所以 MN 不平行于平面 ABC . 所以 C 错误.



对于选项 D, 连接 NE, NC , 设 $AC \cap NE = D$, 连接 DB , 如图. 因为四边形 $AECN$ 是矩形, 所以 D 是 NE 的中点, 又 B 是 ME 的中点, 所以 $MN \parallel BD$. 又 $MN \not\subset$ 平面 ABC , $BD \subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC , 故 D 正确.



11. ACD 解析: 由题意, 设 $a+b=9x, a+c=10x, b+c=11x$, 解得 $a=4x, b=5x, c=6x$, 所以 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$, 故 A 正确. 由以上可知 C 最大, $\cos C =$

$$\frac{(4x)^2 + (5x)^2 - (6x)^2}{2 \times 4x \times 5x} = \frac{1}{8} > 0, \text{ 所以 } C \text{ 为锐角,}$$

$\triangle ABC$ 是锐角三角形, 故 B 错误. 由以上可知 A 最小, $\cos A = \frac{(5x)^2 + (6x)^2 - (4x)^2}{2 \times 5x \times 6x} = \frac{3}{4},$

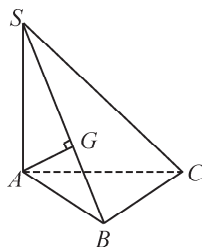
$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$, 即 $\cos C = \cos 2A$. 因为 C 为锐角, $2A$ 为锐角, 所以 $C = 2A$, 故 C 正确. 因为 $\cos C = \frac{1}{8}$, 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r ,

则 $2r = \frac{c}{\sin C} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$. 所以 $r = \frac{8\sqrt{7}}{7}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

12. AD 解析: 对于选项 A, 因为平面 $SAB \perp$ 平面 ABC , $\angle SAB = 90^\circ$, 平面 $SAB \cap$ 平面 $ABC = AB$, $SA \subset$ 平面 SAB , 所以 $SA \perp$ 平面 ABC . 又因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $SA \perp BC$, 故 A 正确. 对于选项 B, 因为 $SA \perp BC$, $AB \perp BC$, $SA \cap AB = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 SAB . 因为 $SB \subset$ 平面 SAB , 所以 $BC \perp SB$. 又 $SA \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $SA \perp AC$, 即 $\angle SAC = \angle SBC = 90^\circ$. 所以三棱锥 $S-ABC$ 外接球的直径为 SC . 因为 $SA = AC = 2$, 所以 $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}$. 所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积 $S = 4\pi \left(\frac{SC}{2}\right)^2 =$

$4\pi(\sqrt{2})^2 = 8\pi$, 故 B 错误. 对于选项 C, 因为 $BC \perp$ 平面 SAB , $BC \subset$ 平面 SBC , 所以平面 $SAB \perp$ 平面 SBC . 过点 A 作 $AG \perp SB$, 交 SB 于点 G , 如图所示. 所以 $AG \perp$ 平面 SBC . 故点 A 到平面 SBC 的距离为 AG . 由 $\angle ABC = 3\angle BAC = 90^\circ$, $AC = 2$, 得 $AB = \sqrt{3}$. 则 $SB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$, 则 $AG = \frac{AB \times SA}{SB} = \frac{\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$, 故 C 错误. 对于选项

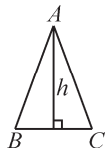
D, 因为 $SB \perp BC$, $AB \perp BC$, 所以 $\angle SBA$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角. 在 $\text{Rt} \triangle SAB$ 中, $\tan \angle SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确. 故选 AD.



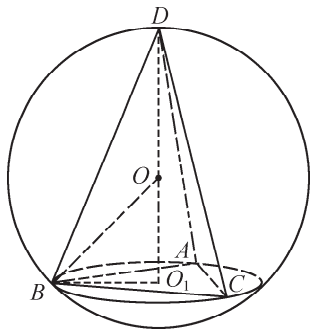
13. $\sqrt{2}$ 解析: $\left| \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^{2022} + \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2022} \right| = \left| \left(\frac{2}{-2i} \right)^{1011} + \left(\frac{2i}{-2i} \right)^{1011} \right| = |i^{1011} + (-1)^{1011}| = |-i-1| = \sqrt{2}.$

14. 1 解析: 由题意, 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向共线, 所以存在实数 $\lambda < 0$, 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 即 $(m, -4) = \lambda(-1, m+3)$, 可得 $\begin{cases} m = -\lambda, \\ -4 = \lambda(m+3). \end{cases}$ 解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 4$ (舍去), 所以 $m = 1$.

15. $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 解析: 如图所示, 作出 $\triangle ABC$ 底边上的高 h , 则 $h = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{7}$. 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} = \sqrt{7}$, 所以该直观图的面积 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{7} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.



16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 解析: 设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O_1 , 由 $\triangle ABC$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形, 得 $\frac{1}{2} \cdot |AB|^2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, 解得 $AB = 2$. 则 $|O_1B| = \frac{1}{2} \times \frac{|AB|}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时, 球心 O 在 DO_1 上, 因此有 $|OO_1| = \sqrt{|OB|^2 - |O_1B|^2} = \frac{2}{3}$, 所以 $|DO_1|$ 的最大值为 $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$, 三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot |DO_1| = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



17. 解: (1) 设 $\mathbf{c} = (x, y)$, $\therefore \mathbf{a} \parallel \mathbf{c}, \mathbf{a} = (-2, 1)$,

$$\therefore x = -2y.$$

$$\text{又 } |\mathbf{c}| = 25,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 625.$$

$$\therefore y^2 = 125.$$

$$\therefore y = \pm 5\sqrt{5}.$$

$$\therefore \begin{cases} x = -10\sqrt{5}, \\ y = 5\sqrt{5} \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = 10\sqrt{5}, \\ y = -5\sqrt{5}. \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{c} = (-10\sqrt{5}, 5\sqrt{5}) \text{ 或 } \mathbf{c} = (10\sqrt{5}, -5\sqrt{5}).$$

(2) 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ ,

$$\therefore \mathbf{a} = (-2, 1), \mathbf{b} = (3, 2).$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6 + 2 = -4.$$

$$\therefore |\mathbf{a}| \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -\frac{4}{\sqrt{13}} = -\frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

$$\therefore \mathbf{a} \text{ 在 } \mathbf{b} \text{ 方向上的投影向量为 } \left(-\frac{12}{13}, -\frac{8}{13} \right).$$

18. 证明: (1) $\because$ 点 D, E 分别是 AB, PB 的中点,

$$\therefore DE \parallel PA.$$

$$\text{又 } \because DE \not\subset \text{平面 } PAC, PA \subset \text{平面 } PAC,$$

$$\therefore DE \parallel \text{平面 } PAC.$$

(2) $\because PC \perp$ 底面 $ABC, AB \subset$ 底面 ABC ,

$$\therefore PC \perp AB.$$

$$\because AB \perp BC, PC \cap BC = C, PC, BC \subset \text{平面 } PBC,$$

$$\therefore AB \perp \text{平面 } PBC.$$

$$\text{又 } \because PB \subset \text{平面 } PBC,$$

$$\therefore AB \perp PB.$$

19. 解: (1) $\because z_1 = (a+i)^2, z_2 = 4-3i, z_1 = iz_2$,

$$\therefore (a+i)^2 = a^2 - 1 + 2ai = 3 + 4i.$$

$$\text{则 } \begin{cases} a^2 - 1 = 3, \\ 2a = 4, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = 2.$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的值为 } 2.$$

(2) 依题意, 得

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a+i)^2}{4-3i} \\ &= \frac{(a+i)^2(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} \\ &= \frac{(a^2+2ai+i^2)(4+3i)}{4^2-(3i)^2} \\ &= \frac{4a^2+8ai+4i^2+3a^2i+6ai^2+3i^3}{16-(-9)} \\ &= \frac{(4a^2-6a-4)+(3a^2+8a-3)i}{25}. \end{aligned}$$

$$\because \frac{z_1}{z_2} \text{ 是纯虚数,}$$

$$\therefore \begin{cases} 4a^2 - 6a - 4 = 0, \\ 3a^2 + 8a - 3 \neq 0. \end{cases}$$

解得 $a=2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

$\because a$ 是正实数,

$$\therefore a=2.$$

当 $a=2$ 时, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{25i}{25} = i$,

$$\because i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots, i^{4n+1} = i,$$

$$i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} = 1, n \in \mathbf{N},$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022}$$

$$= i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2022}$$

$$= 505 \times (i + i^2 + i^3 + i^4) + i + i^2$$

$$= i + i^2$$

$$= -1 + i.$$

20. (1) 证明: $\because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, 且 $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB .

$\therefore BC \perp AP$.

又 $\angle APB = 90^\circ$,

$\therefore AP \perp BP$.

又 $BP \cap BC = B$,

$\therefore PA \perp$ 平面 PBC .

(2) 解: 由 (1), 得 $BC \perp PB$, $AP \perp BP$, $AP \perp PC$.

$\because PA = PB$, $AB = 2$, $BC = CD = 1$,

$\therefore PA = PB = \sqrt{2}$,

$$PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

又平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$\therefore$ 点 P 到平面 $ABCD$ 的距离即为点 P 到直线 AB 的距离.

设点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 h_1 , 易得 $h_1 = 1$.

设点 D 到平面 PAC 的距离为 h_2 ,

$$\because V_{P-ADC} = V_{D-PAC},$$

$$\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle ADC} \cdot h_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle APC} \cdot h_2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times h_2.$$

$$\text{解得 } h_2 = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

即点 D 到平面 PAC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

21. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,

$$\because c = 2, a \sin A - a \sin B = 2 \sin C - b \sin B,$$

$$\therefore a \sin A - a \sin B = c \sin C - b \sin B.$$

$$\text{则 } a^2 - ab = c^2 - b^2.$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\text{由余弦定理, 得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } 0 < C < \pi,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

$$\because \sin C + \sin(B - A) = \sin 2A,$$

$$\therefore \sin(A + B) + \sin(B - A) = 2 \sin A \cdot \cos A.$$

$$\therefore \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B - \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = 2 \sin A \cdot \cos A.$$

$$\therefore 2 \cos A \cdot \sin B = 2 \sin A \cdot \cos A.$$

$$\therefore \cos A = 0 \text{ 或 } \sin B = \sin A.$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } A = B.$$

$$\text{① 当 } A = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } B = \frac{\pi}{6},$$

$$b = c \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{② 当 } A = B \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 为正三角形, } a = b = c = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 由余弦定理可知 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

$$\because c = 2, C = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore a^2 + b^2 = ab + 4.$$

$\because$ 边 AB 的中点为 M ,

$$\therefore \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

$$\therefore |\overrightarrow{CM}|^2 = \frac{1}{4} (|\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 + 2 \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{4} (b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos C) = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + ab).$$

$$\therefore |\overrightarrow{CM}|^2 = \frac{1}{4} (2ab + 4) = \frac{1}{2} ab + 1.$$

$$\because a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$\therefore ab + 4 \geq 2ab,$$

$$\therefore ab \leq 4.$$

$$\therefore |\overrightarrow{CM}|^2 \leq 3,$$

$$\therefore |\overrightarrow{CM}| \leq \sqrt{3}.$$

故 $|CM|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

22. 解: (1) 由题可知在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$,

$AB=BC=CD=DA=4, DE \perp AB$,

所以 $AE=EB=2, ED=2\sqrt{3}$.

因为在四棱锥 $A'-EBCD$ 中, $A'E \perp ED$,

$A'E \perp EB$.

又 $ED \cap EB=E$,

所以 $A'E \perp$ 平面 $EBCD$, 且 $A'E=AE=2$.

连接 BD , 如图所示.

因为 $BC=CD=4, \angle BCD=60^\circ$,

所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

所以 $V_{C-A'BD} = V_{A'-BCD} = \frac{1}{3} \times A'E \times S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

故三棱锥 $C-A'BD$ 的体积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

(2) 设线段 $A'D$ 的中点为 F , 线段 $A'C$ 的中点为 G , 连接 EF, FG, GB , 如图所示.

因为点 F 为 $A'D$ 的中点, 点 G 为 $A'C$ 的中点,

所以 $FG \parallel DC, FG = \frac{1}{2} DC = 2$.

又由(1), 得 $EB \parallel DC, EB=2$.

所以 $FG \parallel EB, FG=EB$.

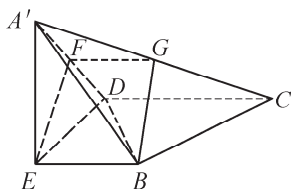
所以四边形 $EBGF$ 为平行四边形.

所以 $EF \parallel BG$.

又 $EF \not\subset$ 平面 $A'BC, BG \subset$ 平面 $A'BC$,

所以 $EF \parallel$ 平面 $A'BC$, 此时点 F 为 $A'D$ 的中点.

则 $\frac{DF}{FA'} = 1$.



期末检测卷

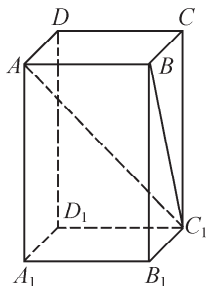
1. A 解析: 守株待兔是随机事件, 故 A 选项正确; 瓮中捉鳖是必然事件, 故 B 选项错误; 水中捞月是不可能事件, 故 C 选项错误; 水滴石穿是必然事件, 故 D 选项错误. 故选 A.

2. D 解析: 由直线 $m \parallel$ 平面 α , 直线 $n \subset$ 平面 α 可知, m 与 n 平行或异面. 故选 D.

3. C 解析: $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}, \therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 又 $\because (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \therefore \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \therefore BD \perp AC. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形.

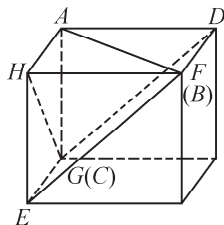
4. D 解析: 两人被随机分到三个客运站, 一共有 $3 \times 3 = 9$ 种分法, 其中两人被分到同一个客运站的分法有 3 种, 所以所求概率为 $\frac{1}{3}$. 故选 D.

5. C 解析: 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 BC_1 , 如图所示



根据线面角的定义可知 $\angle AC_1B = 30^\circ$. 因为 $AB=2$, 所以 $BC_1=2\sqrt{3}$, 则 $CC_1=2\sqrt{2}$. 所以该长方体的体积为 $V=2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. 故选 C.

6. B 解析: 还原为正方体, 如图所示, 由图可知, 点 C 与点 G 重合, 故 A 错误.

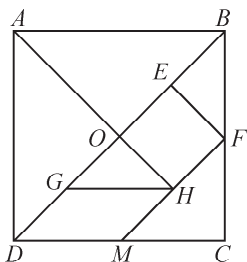


$\because$ 在四边形 $CEBD$ 中, $CE=BD$, 且 $CE \parallel BD, \therefore$ 四边形 $CDBE$ 是平行四边形. $\therefore CD \parallel EF. \therefore$ 直线 CD 与直线 EF 是共面直线, 故 B 正确. $\because AB \cap EF = B, \therefore AB$ 与 EF 共面, 故 C 错误. $\because$ 直线 EF, GH 不在同一个平面内, 且 EF 与 GH 既不平行也不相交, $\therefore EF, GH$ 是异面直线, 故 D 错误. 故选 B.

7. D 解析: 如图所示, $\triangle ADO, \triangle ABO, \triangle GHO, \triangle BEF, \triangle MCF$ 的面积分别为 $S_{\triangle ADO} = S_{\triangle ABO} = \frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 4(\text{dm}^2), S_{\triangle GHO} = S_{\triangle BEF} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 1(\text{dm}^2), S_{\triangle MCF} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 2(\text{dm}^2)$.

将 $\triangle ADO, \triangle ABO, \triangle GHO, \triangle BEF, \triangle MCF$ 的面积分别记为 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 . 从这 5 个等腰直角三角形中任意取出 2 个, 则样本空间 $\Omega = \{(S_1, S_2), (S_1, S_3), (S_1, S_4), (S_1, S_5), (S_2, S_3), (S_2, S_4), (S_2, S_5), (S_3, S_4), (S_3, S_5), (S_4, S_5)\}$, 共有 10 个样本点. 记事件 N 表示“从 5 个等腰直角三角形中任意取出 2 个, 这 2 个三角形的面积之和不小于另外 3 个三角形面积之和”, 则事件 N 包含的样

本点为 $(S_1, S_2), (S_1, S_5), (S_2, S_5)$, 共 3 个, 所以
 $P(N) = \frac{3}{10}$, 故选 D.



8. B 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} =$

$\frac{b}{\sin B}$, 又 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$, $\therefore \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B}$, 即 $\tan A = \tan B$. 又 $\because A, B$ 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\therefore A = B$. 又 $\because c^2 = a^2 + b^2 - ab$, $\therefore ab = a^2 + b^2 - c^2$. $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$. $\therefore C = \frac{\pi}{3}$. $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形. 故选 B.

9. AD 解析: 利用复数的相关概念可判断 A 正确; 对于选项 B, $z_1 - z_2 = 2 - 3i$ 对应的点位于第四象限, 故 B 错误; 对于选项 C, $z_1 + z_2 = 2 + i$, 则 $|z_1 + z_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, 故 C 错误; 对于选项 D, $z_1 \cdot z_2 = (2 - i) \cdot 2i = 2 + 4i$, 则 $|z_1 z_2| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 故 D 正确. 故选 AD.

10. AC 解析: 由图知, 及格率为 $1 - 8\% = 92\% > 90\%$, 故 A 正确. 该次测试满分同学所占百分比为 $1 - 8\% - 32\% - 48\% = 12\%$, 即有 $12\% \times 150 = 18$ (名), B 错误. 由图知, 中位数为 80 分, 平均数为 $40 \times 8\% + 60 \times 32\% + 80 \times 48\% + 100 \times 12\% = 72.8$ (分), 故 C 正确. 由题意, 1 500 名学生成绩能得优秀的同学大约有 $1\,500 \times (48\% + 12\%) = 900$ (名), 故 D 错误. 故选 AC.

11. BD 解析: 对于选项 A, 若 $a \cdot b = b \cdot c$, 即有 $b \cdot (a - c) = 0$, 则 $b = 0$ 或 $a - c = 0$ 或 $b \perp (a - c)$, 故 A 错误.

对于选项 B, $a = (2, 1), b = (-3, 1)$, 则 $a \cdot b = -5, |b| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, 所以向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{-5}{10} b = -\frac{1}{2} b$, 故 B 正确.

对于选项 C, 非零向量 a 和 b 满足 $|a| = |b| = |a - b|$, 则以 a, b 为边对应的四边形为菱形, 且 a, b 夹角为 60° , 则 a 与 $a + b$ 的夹角为 30° , 故 C 错误.

对于选项 D, 点 $A(1, 3), B(4, -1)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, 故 D 正确. 故选 BD.

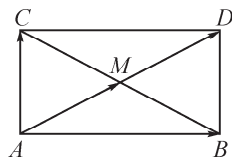
12. ABD 解析: $\because$ 底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为“堑堵”, $\therefore$ 在“堑堵” $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, 侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC . 对于选项 A, $\therefore AA_1 \perp BC, AA_1 \perp AC$. 又 $AC \perp BC$, 且 $AA_1 \cap AC = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 A_1ACC_1 . $\therefore$ 四棱锥 $B - A_1ACC_1$ 为“阳马”, A 正确.

对于选项 B, 由 $AC \perp BC$, 得 $A_1C_1 \perp BC$. 又 $A_1C_1 \perp C_1C, BC \cap C_1C = C$, $\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C . $\therefore A_1C_1 \perp BC_1$, 则 $\triangle A_1BC_1$ 为直角三角形. 又由 $BC \perp$ 平面 AA_1C_1C , 得 $BC \perp A_1C$, $\therefore \triangle A_1BC$ 为直角三角形. 由“堑堵”的定义可得 $\triangle A_1C_1C$ 为直角三角形, $\triangle CC_1B$ 为直角三角形. $\therefore$ 四面体 A_1C_1CB 为“鳖臑”, B 正确.

对于选项 C, $\because AB^2 = 4 = AC^2 + BC^2 \geq 2AC \cdot BC$, 即 $AC \cdot BC \leq 2$, 当且仅当 $AC = BC = \sqrt{2}$ 时取等号, $V_{B-A_1ACC_1} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形} A_1ACC_1} \times BC = \frac{1}{3} AA_1 \times AC \times BC = \frac{2}{3} AC \times BC \leq \frac{4}{3}$, C 错误.

对于选项 D, $\because BC \perp$ 平面 AA_1C_1C , $\therefore BC \perp AF$. 又 $AF \perp A_1C, A_1C \cap BC = C$, 则 $AF \perp$ 平面 A_1BC . $\therefore AF \perp A_1B$. 又 $AE \perp A_1B, AF \cap AE = A$, 则 $A_1B \perp$ 平面 AEF , $\therefore A_1B \perp EF$, D 正确. 故选 ABD.

13. 2 解析: 以 AB, AC 为邻边作平行四边形 $ACDB$, 如图所示, 由向量加减法的几何意义, 可知 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. 因为 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, 所以 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$. 又由 $|\overrightarrow{BC}| = 4$, 且 M 为线段 BC 的中点, 所以 $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| = 2$.

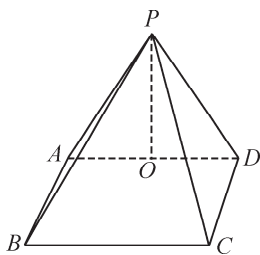


14. 105 解析: 由题意可知, 抽样的比例为 $\frac{300}{1\,050 + 1\,000 + 950} = \frac{1}{10}$, 所以应从高一年级学生中抽取的人数为 $1\,050 \times \frac{1}{10} = 105$.

15. $\frac{2}{3}$ 解析: 因为甲、乙 2 人中至少有 1 人购买到冰

墩墩的概率为 $\frac{1}{2}$, 所以甲、乙 2 人均购买不到冰墩墩的概率 $P_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 同理, 丙购买不到冰墩墩的概率 $P_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 所以甲、乙、丙 3 人都购买不到冰墩墩的概率 $P_3 = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. 所以甲、乙、丙 3 人中至少有 1 人购买到冰墩墩的概率 $P = 1 - P_3 = \frac{2}{3}$.

- 16.2 解析:** 如图, 取 AD 的中点 O , 连接 PO . 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a . 因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形, 所以 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 且 $PO \perp AD$. 又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$. 则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$. 以 $\triangle PAD$ 为底面, CD 为高作直三棱柱, 则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与该直三棱柱的外接球相同. 易知底面 $\triangle PAD$ 的外接圆直径 $d = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}a$. 故外接球的半径满足 $R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2$, 故外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$. 则 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a^3}{\frac{7}{3}\pi a^2} = \frac{\sqrt{3}}{7\pi}$, 解得 $a = 2$. 即正方形 $ABCD$ 的边长为 2.



- 17. 解:** (1) 因为 $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.
 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2\sqrt{2} \times 1 \times \cos \frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$.
 (2) 因为 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 = 8 + 4 \times (-2) + 4 = 4$,
 所以 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$.
18. 解: (1) $\because$ 每 1 000 张奖券中设特等奖 1 个, 一等奖

10 个, 二等奖 50 个,

$$\therefore P(A) = \frac{1}{1\,000},$$

$$P(B) = \frac{1}{100},$$

$$P(C) = \frac{1}{20}.$$

(2) 设“抽取 1 张奖券中奖”为事件 D ,

$$\text{则 } P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{100} +$$

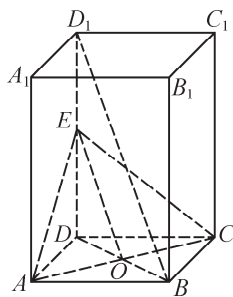
$$\frac{1}{20} = \frac{61}{1\,000}.$$

(3) 设“抽取 1 张奖券不中特等奖和一等奖”为事件 E ,

$$\text{则 } P(E) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{1\,000} -$$

$$\frac{1}{100} = \frac{989}{1\,000}.$$

- 19. 证明:** (1) 连接 BD , 交 AC 于点 O , 连接 OE , 如图所示.



$\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形,
 $\therefore O$ 为 BD 的中点.
 又 $\because E$ 是 DD_1 的中点,
 $\therefore OE \parallel D_1B$.
 $\because OE \subset$ 平面 ACE , $BD_1 \not\subset$ 平面 ACE ,
 $\therefore BD_1 \parallel$ 平面 ACE .
 (2) $\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形,
 $\therefore AC \perp BD$.
 $\because DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AC \subset$ 底面 $ABCD$,
 $\therefore DD_1 \perp AC$.
 又 $\because BD \cap DD_1 = D$, $BD, DD_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ,
 $\therefore AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 .
 $\because BD_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ,
 $\therefore AC \perp BD_1$.

- 20. 解:** (1) 得分在 $[20, 40)$ 的频率为 $0.005 \times 20 = 0.1$,
 得分在 $[40, 60)$ 的频率为 $0.010 \times 20 = 0.2$,
 得分在 $[60, 80)$ 的频率为 $0.015 \times 20 = 0.3$,
 所以得分在 $[80, 100]$ 的频率为 $1 - (0.1 + 0.2 +$

$$0.3)=0.4,$$

设班级卫生量化打分的得分的中位数为 x ,

$$\text{于是 } 0.1+0.2+\frac{x-60}{20}\times 0.4=0.5,$$

解得 $x=70$.

所以班级卫生量化打分的得分的中位数为 70.

(2)由(1)知“良”、“中”的频率分别为 0.4,0.2.

所以分层抽样的方法抽取的“良”、“中”的班级个数分别为 4,2.

因为评定为“良”,奖励 2 面小红旗;评定为“中”,奖励 1 面小红旗,

所以抽取的 2 个班获得的奖励小红旗面数之和不少于 3 为两个评定为“良”的班或一个评定为“良”,一个评定为“中”的班,记这个事件为 A .

则 $\bar{A}$ 为两个评定为“中”的班级.

把 4 个评定为“良”的班级标记为 1,2,3,4;2 个评定为“中”的班级标记为 5,6.

从这 6 个班中随机抽取 2 个班用点 (i,j) 表示,其中 $1\leq i<j\leq 6$.

这些点恰好为 6×6 方格格点上半部分(不含 $i=j$ 对角线上的点),于是有 $\frac{36-6}{2}=15$.

因为事件 $\bar{A}$ 仅有 (5,6) 一个基本事件,

$$\text{所以 } P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}.$$

所抽取的 2 个班获得的奖励小红旗面数之和不少于 3 的概率为 $\frac{14}{15}$.

21. 解: (1)因为 $b\sin B+c\sin C=a\sin A-b\sin C$,

$$\text{所以 } b^2+c^2=a^2-bc.$$

$$\text{由余弦定理,得 } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}.$$

因为 $A\in(0,\pi)$,

$$\text{所以 } A=\frac{2\pi}{3}.$$

$$(2)\text{由(1),得 } \angle BAC=\frac{2\pi}{3}.$$

因为 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,点 D 在 BC 上,

$$\text{所以 } \angle DAC=\angle BAD=\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{又因为 } \sin C=\frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 且 } C\in(0,\frac{\pi}{3}),$$

$$\text{所以 } \cos C=\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{所以 } \sin \angle ADC=\sin(C+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin C+$$

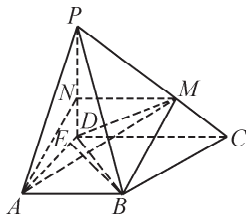
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

在 $\triangle ADC$ 中,由正弦定理,得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC}=\frac{AD}{\sin C}$,

$$\text{即 } \frac{1}{\frac{3\sqrt{21}}{14}}=\frac{AD}{\frac{\sqrt{21}}{7}}.$$

$$\text{解得 } AD=\frac{2}{3}.$$

22. (1)证明: 如图,过点 M 作 $MN\parallel CD$ 交 PD 于点 N ,连接 AN .



$$\because PM=2MC,$$

$$\therefore MN=\frac{2}{3}CD.$$

$$\text{又 } AB=\frac{2}{3}CD, \text{ 且 } AB\parallel CD,$$

$$\therefore AB\parallel MN, \text{ 且 } AB=MN.$$

$$\therefore \text{四边形 } ABMN \text{ 为平行四边形.}$$

$$\therefore BM\parallel AN.$$

$$\text{又 } BM\not\subset \text{平面 } PAD, AN\subset \text{平面 } PAD,$$

$$\therefore BM\parallel \text{平面 } PAD.$$

(2)解:如图,过点 B 作 AD 的垂线,垂足为 E .

$$\because PD\perp \text{平面 } ABCD, BE\subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore PD\perp BE.$$

$$\text{又 } AD\subset \text{平面 } PAD, PD\subset \text{平面 } PAD,$$

$$AD\cap PD=D.$$

$$\therefore BE\perp \text{平面 } PAD.$$

由(1)知, $BM\parallel \text{平面 } PAD$,

$\therefore$ 点 M 到平面 PAD 的距离等于点 B 到平面 PAD 的距离,即 BE .

$$\text{连接 } BD, \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, } AB=AD=2,$$

$$\angle BAD=60^\circ,$$

$$\therefore BE=\sqrt{3}.$$

$$\text{则三棱锥 } P-ADM \text{ 的体积 } V_{P-ADM}=V_{M-PAD}=$$

$$V_{B-PAD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PAD}\times BE=\frac{1}{3}\times \frac{1}{2}\times 2\times 3\times$$

$$\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$