

限时小测试参考答案

小测试(一) 平面向量的概念

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)×

2. A 3. A

基础过关

1. ABCD 解析:有向线段只是向量的一种表示形式,不能把两者等同起来,故 A 错误;零向量有方向,其方向是任意的,故 B 错误;单位向量是指长度为 1 个单位长度的向量,任意两个单位向量的方向不一定相同,故 C 错误;零向量的模等于 0,故 D 错误. 故选 ABCD.

2. C 解析: $\vec{OA}$, $\vec{OC}$ 的起点为 O, $\vec{BO}$ 的起点为 B, 起点不全相同, 故 A 错误; $\vec{OA}$, $\vec{OC}$, $\vec{BO}$ 的方向既不相同也不相反, 故 B, D 错误; $|\vec{OA}|$, $|\vec{OC}|$, $|\vec{BO}|$ 均与 $\odot O$ 的半径相等, 故 C 正确. 故选 C.

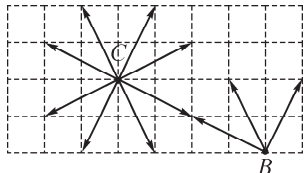
3. C 解析:由题图及正六边形的性质可知与 $\vec{CA}$ 共线的有 $\vec{AC}$, $\vec{DF}$, $\vec{FD}$, 共 3 个, 故选 C.

4. D 解析: $\because$ 在四边形 ABCD 中, $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\therefore AB = CD$, 且 $AB \parallel CD$. $\therefore$ 四边形 ABCD 为平行四边形. $\therefore \vec{DO} = \vec{OB}$.

5. A 解析:在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别为边 AB, AC 的中点, 在题图中的向量中, 相等向量有 $\vec{CE}$ 和 $\vec{EA}$, 仅有一组.

6. 外 解析:由 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$, 可得点 O 到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等, 所以点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

7. 11 解析:如图, 马在 B 处有 3 条路可走, 马在 C 处有 8 条路可走. 以点 B 为起点作有向线段表示马走了“一步”的向量, 符合题意的共 3 个; 以点 C 为起点作有向线段表示马走了“一步”的向量, 符合题意的共 8 个. 所以共有 $3+8=11$ 个.



8. 证明: $\because \vec{AB} = \vec{DC}$,

$\therefore AB = DC$, 且 $AB \parallel DC$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore \vec{CB} = \vec{DA}$,

又 $\vec{CN} = \vec{MA}$,

$\therefore CN = MA$, 且 $CN \parallel MA$,

$\therefore$ 四边形 CNAM 是平行四边形,

$\therefore CM = NA$, 且 $CM \parallel NA$,

又 $\because CB = DA$,

$\therefore MB = DN$,

又 $DN \parallel MB$,

$\therefore \vec{DN}$ 与 $\vec{MB}$ 的模相等且方向相同,

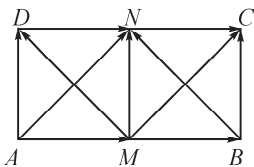
$\therefore \vec{DN} = \vec{MB}$.

素养提升

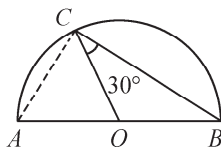
1. B 解析: $|a|$ 的大小不能确定, 故不能比较 $|a|$, $|b|$ 的大小, 故①错误. a 为任一非零向量, 向量 b 的模为 1, 两个向量的方向不确定, 故无法推出 $a \parallel b$, 故②错误. 因为 a 为任一非零向量, 所以 $|a| > 0$, 故③正确. 向量的模是一个非负实数, 所以向量 b 的模为 1, 故④错误. 故选 B.

2. C 解析:由 $\vec{BA} = \vec{CD}$, 知四边形 ABCD 为平行四边形. 由 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$, 知平行四边形 ABCD 为菱形.

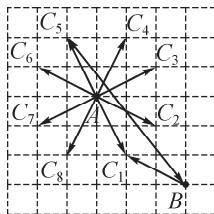
3. D 解析:如图所示, 由已知可得 $\vec{AM} = \vec{MB} = \vec{DN} = \vec{NC}$, $\vec{AD} = \vec{MN} = \vec{BC}$, $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AN} = \vec{MC}$, $\vec{MD} = \vec{BN}$, 有 12 对相等向量, 改变其方向, 又有 12 对相等向量. 故选 D.



4. 1 解析:如图, 连接 AC. 由 $|\vec{OC}| = |\vec{OB}|$, 得 $\angle ABC = \angle OCB = 30^\circ$. 易知 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $|\vec{AC}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.



5. 解:(1)画出所有的向量 $\vec{AC}$, 如图所示.



(2)由(1)所画的图知,

①当点 C 位于点 C_1 或 C_2 时,

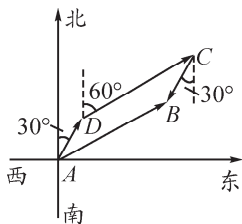
$|\vec{BC}|$ 取得最小值 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

②当点 C 位于点 C_5 或 C_6 时,

$|\vec{BC}|$ 取得最大值 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

所以 $|\vec{BC}|$ 的最大值为 $\sqrt{41}$, 最小值为 $\sqrt{5}$.

6. 解: (1) 画出向量 $\vec{AD}, \vec{DC}, \vec{CB}, \vec{AB}$, 如图所示.



(2) 由题意知 $AD \parallel BC, AD = BC$,

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

所以 $\vec{AB} = \vec{DC}$.

则 B 地在 A 地的北偏东 60° 方向, 距离 A 地 6 km 处.

易错辨析

1. C 解析: 由定义知, 向量有大小、方向两个要素, 而有向线段有起点、方向、长度三个要素, 故 C 正确.

2. ABCD 解析: 向量不能比较大小, 故 A 错误; 由于零向量与任意向量共线, 且零向量的方向是任意的, 故 B 错误; 对于 C, 若 $\vec{b}$ 为零向量, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 可能不共线, 故 C 错误; 对于 D, 当 $\vec{a} = \vec{0}$ 时, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 无意义, 故 D 错误.

小测试(二) 向量的加、减运算

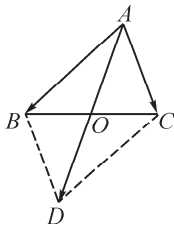
预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)× (4)×

2. C 3. D

基础过关

1. B 解析: 由向量加法的平行四边形法则, 作 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 的和向量 $\vec{AD}$. 又 O 是 BC 的中点, 根据平行四边形的性质知, O 是 AD 的中点, 故 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = 2|\vec{AO}|$. 故选 B.



2. A 解析: $\vec{DC} = \vec{AC} - \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) - \vec{AD} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.

3. C 解析: $\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{BC} = \vec{AD}$, 且 $\vec{DC} \neq \vec{CD}$, 故 A 错误;

$\vec{OD} + \vec{DA} = \vec{OA}$, 且 $\vec{AD} \neq \vec{DA}$, 故 B 错误;

$\vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}, \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$, 故 C 正确;

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} \neq \vec{DA}$, 故 D 错误.

4. A 解析: 对于 A, $\vec{PA} + \vec{AB} - \vec{BQ} = \vec{PB} - \vec{BQ}$;

对于 B, $(\vec{AB} + \vec{PC}) + (\vec{BA} - \vec{QC}) = \vec{AB} + \vec{BA} + \vec{PC} - \vec{QC} = \vec{PC} + \vec{CQ} = \vec{PQ}$;

对于 C, $\vec{QC} - \vec{QP} + \vec{CQ} = \vec{QC} + \vec{CQ} - \vec{QP} = \vec{PQ}$;

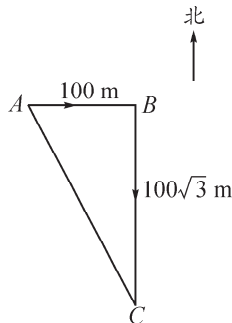
对于 D, $\vec{AB} + (\vec{PA} + \vec{BQ}) = \vec{AB} + \vec{BQ} + \vec{PA} = \vec{PA} + \vec{AQ} = \vec{PQ}$.

5. A 解析: $\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AP} - \vec{AQ} = (\vec{AB} - \vec{AP}) + (\vec{AC} - \vec{AQ}) = \vec{PB} + \vec{QC} = \vec{QC} - \vec{CQ} = \vec{0}$.

6. 1 解析: 因为在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 所以 $|\vec{BC} + \vec{CD}| = |\vec{BD}| = |\vec{AB}| = 1$.

7. 南偏东 30° 解析: 如图所示, 此人从点 A 出发, 向正东方向行进 100 m , 到达点 B , 再向南偏东 30° 方向行进 $100\sqrt{3} \text{ m}$, 到达点 C . 则 $\tan \angle BAC = \frac{BC}{BA} = \frac{100\sqrt{3}}{100} = \sqrt{3}$.

$\therefore \angle BAC$ 是三角形的内角, $\therefore \angle BAC = 60^\circ$, 即位移的方向是南偏东 30° .



8. 解: 方法一: 在平行四边形 $OAFE$ 中, OF 为对角线, 且 OA, OF, OE 的始点相同, 应用平行四边形法则, 得 $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{OE} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\therefore \vec{OC} = -\vec{OF}$,

$\therefore \vec{OC} = -\vec{a} - \vec{b}$.

而 $\vec{OB} = -\vec{OE} = -\vec{b}, \vec{OD} = -\vec{OA} = -\vec{a}$,

$\therefore \vec{OB} = -\vec{b}, \vec{OC} = -\vec{a} - \vec{b}, \vec{OD} = -\vec{a}$.

方法二: 由正六边形的几何性质, 得

$\vec{OD} = -\vec{a}, \vec{OB} = -\vec{b}, \vec{BC} = -\vec{OA} = -\vec{a}$.

在 $\triangle OBC$ 中, $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$.

素养提升

1. CD 解析: 因为在平行四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AD} = \vec{BC}$, 所以 $\vec{AB} - \vec{DC} - \vec{CB} = \vec{AB} - (\vec{DC} + \vec{CB}) = \vec{AB} - \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} = \vec{BC}$. 故选 CD.

2. D 解析: 由于 $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = 1, |\vec{BC}| = |\vec{b}| = 1 = |\vec{AB}|, |\vec{AC}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}, \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 D.

3. C 解析: 对于 ①: 因为 $\vec{BF} - \vec{HF} + \vec{HD} = \vec{BF} + \vec{FH} + \vec{HD} = \vec{BH} + \vec{HD} = \vec{BD}$, 故 ① 错误;

对于 ②: 因为 $\angle AOC = \frac{360^\circ}{8} \times 2 = 90^\circ$, 则以 OA, OC

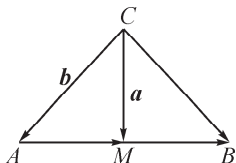
为邻边的平行四边形为正方形. 又因为 OB 平分 $\angle AOC$, 所以 $|\vec{OA} + \vec{OC}| = \sqrt{2}|\vec{OA}| = \sqrt{2}|\vec{OF}|$, 故②正确;

对于③: 因为 $\vec{AE} + \vec{FC} - \vec{GE} = \vec{AE} + \vec{EG} + \vec{FC} = \vec{AG} + \vec{FC}$, 且 $\vec{FC} = \vec{GB}$, 所以 $\vec{AE} + \vec{FC} - \vec{GE} = \vec{AG} + \vec{GB} = \vec{AB}$, 故③正确. 故选 C.

4.2 解析: 以 AB, AC 为邻边作平行四边形 $ACDB$, 由向量加减法的几何意义可知, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$, $\therefore |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$, $\therefore |\vec{AD}| = |\vec{CB}|$. 又 $|\vec{BC}| = 4$, M 是线段 BC 的中点, $\therefore |\vec{AM}| = \frac{1}{2}|\vec{AD}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}| = 2$.

5. 证明: 如图, 由 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 可知 $|\vec{CA}| = |\vec{CB}|$.

由 M 是斜边 AB 的中点, 得 $|\vec{CM}| = |\vec{AM}|$.



(1) 在 $\triangle ACM$ 中, $\vec{AM} = \vec{CM} - \vec{CA} = a - b$,

由 $|\vec{AM}| = |\vec{CM}|$, 得 $|a - b| = |a|$.

(2) $\because \vec{MB} = \vec{AM} = a - b$,

$\therefore \vec{CB} = \vec{MB} - \vec{MC} = a - b + a = a + (a - b)$,

由 $|\vec{CB}| = |\vec{CA}|$, 得 $|a + (a - b)| = |b|$.

6. 证明: 由已知可设 $\vec{AB} = \vec{DC} = a$, $\vec{BE} = \vec{FD} = b$,

则 $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = a + b$,

$\vec{FC} = \vec{FD} + \vec{DC} = b + a$.

因为 $a + b = b + a$,

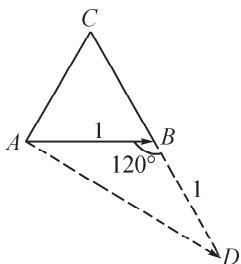
所以 $\vec{AE} = \vec{FC}$,

所以 $AE = FC$, 且 $AE \parallel FC$,

从而可知四边形 $AECF$ 是平行四边形.

易错辨析

1.D 解析: 如图所示, 在正三角形 ABC 中延长 CB 到点 D , 使 $BD = 1$, 连接 AD , 则 $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$. 在 $\triangle ABD$ 中, $AB = BD = 1$, $\angle ABD = 120^\circ$, 易得 $AD = \sqrt{3}$, 所以 $|\vec{AB} - \vec{BC}| = |\vec{AD}| = \sqrt{3}$.



2. 矩形 解析: 由向量加法的平行四边形法则可知,

$|\vec{BC} + \vec{BA}| = |\vec{BD}|$. 由向量加法的三角形法则可知, $|\vec{BC} + \vec{AB}| = |\vec{BC} - \vec{BA}| = |\vec{AC}|$. 因为 $|\vec{BC} + \vec{BA}| = |\vec{BC} + \vec{AB}|$, 所以 $|\vec{BD}| = |\vec{AC}|$, 即平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相等, 故平行四边形 $ABCD$ 为矩形.

小测试(三) 向量的数乘运算

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)×

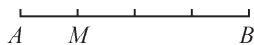
2. C 3. C

基础过关

1. ABD 解析: 由向量数乘运算的定义, 知 A, B 正确; 由于实数与向量的积仍然是向量, 所以当 $\lambda = 0$ 时, λa 是零向量, 故 C 错误; 当 $\lambda = \frac{1}{|a|}$ 时, $\lambda a = \frac{a}{|a|}$, 其方向与 a 相同且长度为 1, 所以 λa 是与 a 同向的单位向量, 故 D 正确. 故选 ABD.

2. B 解析: 因为向量 a, b 不平行, 所以 $a + 3b \neq 0$. 又向量 $\lambda a + 2b$ 与 $a + 3b$ 平行, 则存在唯一的实数 μ , 使 $\lambda a + 2b = \mu(a + 3b)$ 成立, 即 $\lambda a + 2b = \mu a + 3\mu b$, 整理得 $(\lambda - \mu)a = (3\mu - 2)b$, 所以 $\begin{cases} \lambda - \mu = 0, \\ 3\mu - 2 = 0. \end{cases}$ 解得 $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$.

3. B 解析: 如图, $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, 所以 $\vec{MB} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.



4. B 解析: 因为 $a = e_1 - 2e_2$, $b = 2e_1 + e_2$, 所以 $a + b = 3e_1 - e_2 = \frac{1}{2}c$, 因此 $a + b$ 与 $c = 6e_1 - 2e_2$ 的关系是共线. 故选 B.

5. A 解析: $\because \vec{BC} = -5a + 6b$, $\vec{CD} = 7a - 2b$, $\therefore \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = 2a + 4b$. 又 $\vec{AB} = a + 2b$, $\therefore \vec{BD} = 2\vec{AB}$, 即 $\vec{AB} \parallel \vec{BD}$. 又 $\vec{AB}, \vec{BD}$ 有公共点 B, $\therefore A, B, D$ 三点共线, A 选项正确. $\because \vec{AB} = a + 2b$, $\vec{BC} = -5a + 6b$, $\therefore \vec{AC} = -4a + 8b$, 显然 $\vec{AC}, \vec{BC}, \vec{CD}$ 两两不共线, 选项 B, C, D 都不正确. 故选 A.

6. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 解析: 由向量数乘定义可知, $2x - 1 > 0$, 即 $x > \frac{1}{2}$.

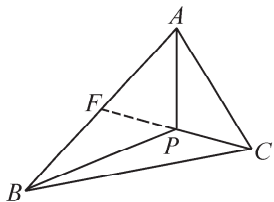
7. $\frac{4}{21}a - \frac{1}{7}b + \frac{1}{7}c$ 解析: $\because 2(x - \frac{1}{3}a) - \frac{1}{2}(b + c - 3x) + b = 0$, $\therefore 2x - \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{3}{2}x + b =$

0 . $\therefore \frac{7}{2}x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $\therefore x = \frac{4}{21}a - \frac{1}{7}b + \frac{1}{7}c$.

8. (1) 证明: $\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3a + b) - (2a - b) = a + 2b$,
 而 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (a - 3b) - (3a + b) = -(2a + 4b) = -2\overrightarrow{AB}$,
 $\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线, 且有公共点 B,
 $\therefore A, B, C$ 三点共线.
 (2) 解: $\because 8a + kb$ 与 $ka + 2b$ 共线,
 $\therefore$ 存在实数 λ , 使得 $8a + kb = \lambda(ka + 2b)$,
 即 $(8 - \lambda k)a + (k - 2\lambda)b = \mathbf{0}$.
 $\because a$ 与 b 不共线,
 $\therefore \begin{cases} 8 - \lambda k = 0, \\ k - 2\lambda = 0. \end{cases}$
 解得 $\lambda = \pm 2, \therefore k = 2\lambda = \pm 4$.

素养提升

1. D 解析: 因为 a 与 b 不共线, 所以 $\overrightarrow{AC} = \lambda a + b$ 是非零向量. 由 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线, 得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, 即 $a + kb = \lambda(\lambda a + b)$. 所以 $(1 - \lambda l)a = (\lambda - k)b$. 故 $\begin{cases} 1 - \lambda l = 0, \\ \lambda - k = 0, \end{cases}$ 即 $kl - 1 = 0$. 故选 D.
2. B 解析: 因为 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}) = -\lambda \overrightarrow{AB} + (1 - \mu)\overrightarrow{AD}$. 又 $CD \parallel AB$, 所以 $1 - \mu = 0$, 即 $\mu = 1$. 又 $\lambda + \mu = \frac{3}{2}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$, 所以 $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 则 $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{2}$. 故选 B.
3. C 解析: 由题意可知 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = m\overrightarrow{AN} + (1 - m)\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$, $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}m\overrightarrow{AC} + (1 - m)\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\therefore \begin{cases} 1 - m = t, \\ \frac{2}{5}m = \frac{1}{3}. \end{cases}$ 解得 $m = \frac{5}{6}$, $t = \frac{1}{6}$.
4. $\frac{1}{2}$ 解析: 如图, 设 F 为 AB 的中点, 连接 PF . 因为 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC})$. 整理, 得 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$. 又 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PF}$, 所以 $\overrightarrow{PF} = -\overrightarrow{PC}$, 所以 F, P, C 三点共线, 且 $PF = PC$. 所以 $S_{\triangle APC} = S_{\triangle APF}$. 又 $S_{\triangle PAF} = \frac{1}{2}S_{\triangle APB}$, 所以 $\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle APB}} = \frac{1}{2}$.



5. (1) 解: $\because \overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AO} = b$,

点 C 是点 B 关于点 A 的对称点,

$$\therefore \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} = -a.$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = -b - a,$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}) = 2a + \frac{1}{3}(-a + b) = \frac{5}{3}a + \frac{1}{3}b.$$

$$(2) \text{ 证明: } \because \overrightarrow{OE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA},$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \frac{4}{5}(-b) + a + b = a + \frac{1}{5}b =$$

$$\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}.$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{CD}.$$

又 $\because \overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 有公共点 C ,

$\therefore C, D, E$ 三点共线.

6. (1) 证明: $\because Q$ 为 BD 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CQ}.$$

又 P 为 AC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CP}.$$

$$\therefore 2\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{CQ} - 2\overrightarrow{CP} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD},$$

又向量 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线, 设向量 $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$,

$$\text{则 } 2\overrightarrow{PQ} = (1 + \lambda)\overrightarrow{AB}.$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1 + \lambda}{2}\overrightarrow{AB} \quad ①,$$

又在梯形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{CD}|$,

$$\therefore \lambda \neq -1, \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}, \text{ 即 } PQ \parallel AB.$$

(2) 解: $\because$ 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向反向, 且 $|\overrightarrow{AB}| = 3|\overrightarrow{CD}|$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}, \text{ 即 } \lambda = -\frac{1}{3},$$

$$\text{代入①式, 得 } \overrightarrow{PQ} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\therefore PQ : AB = \frac{1}{3}.$$

易错辨析

1. BD 解析: 当 $a = b = \mathbf{0}$ 时, 对于任意实数 λ , 均有 $a = \lambda b$ 成立, 故 A 错误. 当 a 是非零向量时, 存在唯一的实数 λ , 使 $b = \lambda a$, 即 $\lambda a - b = \mathbf{0}$, 所以存在不全为零的实数 $\lambda_1 = \lambda$ 和 $\lambda_2 = -1$, 使 $\lambda_1 a + \lambda_2 b = \mathbf{0}$. 当 $a = \mathbf{0}$ 时, 对于非零实数 λ_1 , 当 $\lambda_2 = 0$ 时, 满足 $\lambda_1 a + \lambda_2 b = \mathbf{0}$, 所以存在不全为零的实数 λ_1 和 λ_2 , 故 B 正确. 若 a 与 b 不共线, 则 a, b 都是非零向量, 存在 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 使 $\lambda_1 a + \lambda_2 b = \mathbf{0}$, 且 $\lambda_1 a + \lambda_2 b = \mathbf{0}$ 是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的充分必要条件, 故 C 错误, D 正确. 故选 BD.

2. B 解析: $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量, $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 为 $\overrightarrow{AC}$ 上的

单位向量, 则 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 的方向为 $\angle BAC$ 的平分线 $\overrightarrow{AD}$ 的方向. 又 $\because \lambda \in (0, +\infty)$, $\therefore \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$ 的方向与 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 的方向相同. $\because \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\therefore$ 点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的内心.

小测试(四) 向量的数量积

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$ (4) $\checkmark$ (5) $\times$

2. B 3. C

基础过关

1. AD 解析: $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为角 A , $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为角 B 的补角, $\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的夹角为角 B 的补角, $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的夹角为角 B . 故选 AD.

2. C 解析: $\because a \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b = 1 + 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2$. 故选 C.

3. B 解析: 由已知, 得 $B = \frac{\pi}{4}$. 所以 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{BA}| \cdot \cos B \cdot e = \frac{\sqrt{2}}{2} e$. 故选 B.

4. A 解析: $\because (2a+b) \cdot (a-2b) = 2a^2 - 4a \cdot b + a \cdot b - 2b^2 = -3a \cdot b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\therefore a \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $\because 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\therefore \theta = 30^\circ$.

5. A 解析: 因为以 a, b 为邻边的平行四边形的对角线有两条, 分别为 $a+b, a-b$, 所以 $|a+b| = |6p-q| = \sqrt{(6p-q)^2} = \sqrt{36p^2 - 12p \cdot q + q^2} = \sqrt{36 \times (2\sqrt{2})^2 - 12 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \cos \frac{\pi}{4} + 3^2} = 15$, $|a-b| = |4p+5q| = \sqrt{(4p+5q)^2} = \sqrt{16p^2 + 40p \cdot q + 25q^2} = \sqrt{16 \times (2\sqrt{2})^2 + 40 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \cos \frac{\pi}{4} + 25 \times 3^2} = \sqrt{593}$. 故选 A.

6. 等边三角形 解析: 由题意, 得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle BAC$, 即 $8 = 4 \times 4 \times \cos \angle BAC$, 所以 $\cos \angle BAC = \frac{1}{2}$, 又因为 $0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$, 所以 $\angle BAC = 60^\circ$. 又 $AB = AC$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

7. $-\frac{9}{2}$ 解析: 方法一: 由 $a+b+c=0$, 得 $b+c=-a$, 则 $a \cdot (b+c) = -a^2$, 所以 $a \cdot b + c \cdot a = -1^2 = -1$. 由 $b+c=-a$, 得 $(b+c)^2 = (-a)^2$, 则 $b^2 + 2b \cdot c + c^2 = a^2$, 即 $2^2 + 2b \cdot c + 2^2 = 1^2$, 所以 $b \cdot c = -\frac{7}{2}$, 所以 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -1 - \frac{7}{2} = -\frac{9}{2}$.

方法二: 由已知可得 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 9 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 0$, 所以 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{9}{2}$.

8. 解: (1) 由题意, 得 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \frac{2\pi}{3} = 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$.

所以 $a \cdot b = -3$,

$|a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 9 + 4 - 6 = 7$,

所以 $|a+b| = \sqrt{7}$.

b 在 a 上的投影向量为 $|b| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{a}{|a|} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{a}{3} = -\frac{1}{3}a$.

(2) 结合(1)可知, $a \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b = 9 - 3 = 6$. 设向量 a 与 $a+b$ 的夹角为 α ,

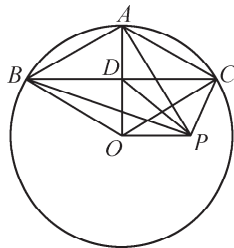
则 $\cos \alpha = \frac{a \cdot (a+b)}{|a| \cdot |a+b|} = \frac{6}{3 \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

素养提升

1. B 解析: 若 $a \cdot c = b \cdot c$, 则 $|a| \cdot |c| \cos \langle a, c \rangle = |b| \cdot |c| \cos \langle b, c \rangle$, 即 $|a| \cos \langle a, c \rangle = |b| \cos \langle b, c \rangle$. 若令 $a \cdot c = b \cdot c = 0$, 则 $\cos \langle a, c \rangle = \cos \langle b, c \rangle = 0$, 此时 $|a|$ 不一定等于 $|b|$, 则 a 不一定等于 b , 充分性不成立. 若 $a=b$, 则 $a \cdot c = b \cdot c$, 必要性成立.

2. B 解析: $\because \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, $\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - |\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$, 而 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\pi - \angle ABC) = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC > 0$, $\therefore \cos \angle ABC < 0$. 即 $\angle ABC$ 为钝角, 所以此三角形是钝角三角形. 故选 B.

3. A 解析: 如图, 设 OA 与 BC 相交于点 D ,



由 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 0$, 得四边形 $OBAC$ 是菱形, 且 $OA = OB = 2$, 所以 $AD = OD = 1$, $BD = DC = \sqrt{3}$,

由图知 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}$, 而 $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$,

$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD}^2 - \overrightarrow{DB}^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - |\overrightarrow{DB}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - 3$, 同理, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DO}$, 而 $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DO}$,

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PD}^2 - \overrightarrow{DO}^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - |\overrightarrow{DO}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - 1$, $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 2|\overrightarrow{PD}|^2 - 4$, $\because$ 点 P 是圆内一点, $\therefore 0 \leq |\overrightarrow{PD}| < 3$. $\therefore -4 \leq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} < 14$. 故选 A.

4. $\frac{\pi}{3}$ 解析: $a \cdot a = |a|^2$, $b \cdot b = |b|^2 = 4|a|^2$, 设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta = 2|a|^2 \cdot \cos \theta$.

若 $x_i \cdot y_i (i=1, 2, 3, 4)$ 中有 2 个 a 与 a 相乘, 则 $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = 10|a|^2$.

若 $x_i \cdot y_i (i=1, 2, 3, 4)$ 中仅有 1 个 a 与 a 相乘, 则 $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 5|a|^2 + 4|a|^2 \cos \theta$.

若 $x_i \cdot y_i (i=1, 2, 3, 4)$ 中无 a 与 a 相乘, 则 $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 = 4a \cdot b = 8|a|^2 \cdot \cos \theta$.

由 $5|a|^2 > 4|a|^2 \cos \theta$, 得 $5|a|^2 + 4|a|^2 \cos \theta > 8|a|^2 \cos \theta$.

又 $10|a|^2 > 8|a|^2 \cos \theta$, 即 $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4$ 所有可能取值中的最小值为 $8|a|^2 \cos \theta$, 依题意得 $8|a|^2 \cos \theta = 4|a|^2$, 从而

$\cos \theta = \frac{1}{2}$, 又 $0 \leq \theta \leq \pi$, 故 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5. (1) 证明: 因为 $|a| = |b| = |c| = 1$,

且 a, b, c 相互之间的夹角均为 120° ,

所以 $(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c = |a||c| \cdot \cos 120^\circ - |b| \cdot |c| \cos 120^\circ = 0$,

所以 $(a-b) \perp c$.

(2) 解: 因为 $|ka+b+c| > 1$,

所以 $(ka+b+c)^2 > 1$,

即 $k^2 a^2 + b^2 + c^2 + 2ka \cdot b + 2ka \cdot c + 2b \cdot c > 1$.

因为 $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$,

所以 $k^2 - 2k > 0$,

解得 $k < 0$ 或 $k > 2$.

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

6. 解: (1) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2}$
 $= \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2}$
 $= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos \angle BAD + |\overrightarrow{AD}|^2}$
 $= \sqrt{9 + 2 \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4}$

$= \sqrt{7}$.

(2) 因为 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2$

$= \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{5}{6}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \angle BAD -$

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2$

$= \frac{1}{3} \times 9 - \frac{5}{6} \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times 4$

$= 3 + \frac{5}{2} - 2$

$= \frac{7}{2}$.

易错辨析

1. A 解析: 在同一平面内, 线段 AB 为圆 C 的直径, 动点 P 满足 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} > 0$, 所以 $\angle APB$ 为锐角或点 P 在 AB 的延长线上或 BA 的延长线上, 所以点 P 在圆 C 外部.

2. $\left(-\infty, \frac{-13 - \sqrt{133}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{133} - 13}{6}, 1\right) \cup (1,$

$+\infty)$ 解析: 由题意可得 $a \cdot b = |a||b| \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$. 又 $\because (a + \lambda b) \cdot (\lambda a + b) = \lambda a^2 +$

$(\lambda^2 + 1)a \cdot b + \lambda b^2$, $a + \lambda b$ 与 $\lambda a + b$ 的夹角为锐角,

$\therefore \lambda a^2 + (\lambda^2 + 1)a \cdot b + \lambda b^2 > 0$. $\because a^2 = |a|^2 = 4$,

$b^2 = |b|^2 = 9$, $a \cdot b = 3$, $\therefore 3\lambda^2 + 13\lambda + 3 > 0$. 解得

$\lambda > \frac{\sqrt{133} - 13}{6}$ 或 $\lambda < \frac{-13 - \sqrt{133}}{6}$. 当 $\lambda = 1$ 时, $a + \lambda b$ 与 $\lambda a + b$ 共线, 其夹角不为锐角, 故 λ 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{-13 - \sqrt{133}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{133} - 13}{6}, 1\right) \cup$

$(1, +\infty)$.

小测试(五) 平面向量基本定理

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$ (4) $\checkmark$

2. A

3. $a + b$ $2a + c$

基础过关

1. ACD 解析: 由于 e_2 和 $e_1 + e_2$, e_1 和 $e_1 - e_2$, $e_1 + 2e_2$ 和 $2e_1 + e_2$ 这三组向量均不共线, 故可以作为基底. $2e_1 - 4e_2 = -2(-e_1 + 2e_2)$, 故 $2e_1 - 4e_2$ 和 $-e_1 + 2e_2$ 共线, 不可以作为基底. 故选 ACD.

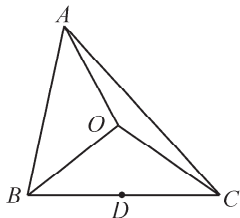
2. C 解析:由题图可得 $a = -3e_2$, $b = -e_1$, 所以

$$a - b = e_1 - 3e_2.$$

3. B 解析: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = 2b - a$. 故选 B.

4. B 解析:取第Ⅲ部分内一点画图,易得 $a > 0, b < 0$.

5. B 解析: $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \therefore$ 点 D 为 BC 的中点, 如图所示. $\therefore \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OD} = 2 \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 又 $\because \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OM}, \therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OM}, \therefore \lambda = 1$. 故选 B.



6. $\frac{1}{2}a + b$ 解析: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}a + b$.

7. $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}$ 解析:由 $\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PA}$, 得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = 4(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})$, 即 $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$, 所以 $x = \frac{4}{5}, y = \frac{1}{5}$.

8. 解: (1) $\because A$ 为线段 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA},$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2a - b,$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DB},$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (2a - b) - \frac{2}{3}b = 2a - \frac{5}{3}b.$$

(2) 由题可得 $\overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{DC}$.

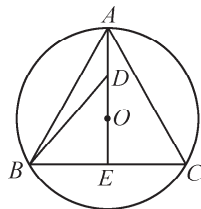
$$\text{又} \because \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = (2a - b) - \lambda a = (2 - \lambda)a - b,$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = 2a - \frac{5}{3}b,$$

$$\therefore \frac{2 - \lambda}{2} = \frac{1}{\frac{5}{3}}, \therefore \lambda = \frac{4}{5}.$$

素养提升

1. AC 解析: 如图所示, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$. 故选 AC.



2. B 解析:由题意,得 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = 3m\overrightarrow{AN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. $\because B, P, N$ 三点共线, $\therefore 3m + \frac{2}{3} = 1$, 解得 $m = \frac{1}{9}$. 故选 B.

3. C 解析:设 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC}, \lambda \in [0, 1]$, 因为 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \lambda(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (1 - \frac{1}{2}\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD}$.

由题意,得 $m = 1 - \frac{1}{2}\lambda, n = \lambda$, 则 $m > 0, n \geq 0$, 所以

$$2m + n = 2. \text{ 易得 } m > 0, n > 0, \text{ 则 } \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \frac{2m + n}{2m} +$$

$$\frac{2m + n}{n} = 1 + \frac{n}{2m} + \frac{2m}{n} + 1 \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{2m} \cdot \frac{2m}{n}} = 4, \text{ 当}$$

且仅当 $\frac{n}{2m} = \frac{2m}{n}$, 即 $n = 2m$ 时取等号, 此时 $\lambda = 1$, 点 P 与点 C 重合, 符合题意. 故选 C.

4. $1 + \sqrt{3}$ 解析:因为 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, 所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. 所以 $\overrightarrow{BD} = (x - 1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. 两边同乘 $\overrightarrow{AB}$, 得 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = (x - 1)\overrightarrow{AB}^2$. 设 $|\overrightarrow{AB}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$.

又 $\angle BED = 60^\circ$, 所以 $|\overrightarrow{BD}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 显然, $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的

夹角是 45° . 又 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = (x - 1)\overrightarrow{AB}^2$, 所以 $\frac{\sqrt{6}}{2} \times$

$1 \times \cos 45^\circ = (x - 1) \times 1$. 所以 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. 同理,

$\overrightarrow{BD} = (x - 1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 两边同时乘 $\overrightarrow{AC}$, 可解得 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 1$.

5. (1) 解: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}b - a$,

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}b - a.$$

(2) 证明: $\because D, G, F$ 三点共线,

$\therefore$ 存在实数 k , 使得 $\overrightarrow{DG} = k\overrightarrow{DF}$.

$$\therefore \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AF} - k\overrightarrow{AD}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AF} + (1 - k)\overrightarrow{AD} = \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + (1 - k)\overrightarrow{AD}.$$

同理, 由 B, G, E 三点共线, 可得存在实数 m , 使得

$$\overrightarrow{AG} = \frac{m}{2}\overrightarrow{AD} + (1-m)\overrightarrow{AB}.$$

根据平面向量的基本定理,得
$$\begin{cases} \frac{k}{2} = 1-m, \\ 1-k = \frac{m}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } k=m=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

即 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$ 共线,

又 $\overrightarrow{AG}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有公共点A,

$\therefore A, G, C$ 三点共线.

6. 解: (1) 因为 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

又因为 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$,

$$\text{所以 } x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

$$\text{则 } x-y = \frac{1}{3}.$$

(2) 因为在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=1, \angle ACD = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以 } \angle CAB = \frac{\pi}{3}, BC = \sqrt{3}.$$

设 $|\overrightarrow{AF}| = m$, 由题意, 得 $m \in [0, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FA} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FA} \\ &= |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{FA}| \cdot \cos \angle CAB - |\overrightarrow{AF}|^2 = \\ &= \frac{1}{2}m - m^2 = -\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

因为 $m \in [0, 2]$,

$$\text{所以 } -\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} \in \left[-3, \frac{1}{16}\right].$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FA} \text{ 的取值范围为 } \left[-3, \frac{1}{16}\right].$$

易错辨析

1. $\left\{\theta \mid \theta \neq \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 解析: 若 $\{a, b\}$ 是平面内所有向量的一个基底, 则需满足 a, b 不共线. 又 e_1, e_2 不共线, 则 $\sin \theta \neq 0$ 且 $\cos \theta \neq 0$, 解得 $\theta \neq \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

2. $-\frac{1}{18}b + \frac{7}{27}c$ 解析: 设 $a = xb + yc (x, y \in \mathbf{R})$,
则 $-e_1 + 3e_2 = x(4e_1 + 2e_2) + y(-3e_1 + 12e_2)$,
即 $-e_1 + 3e_2 = (4x - 3y)e_1 + (2x + 12y)e_2$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 2x + 12y = 3. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -\frac{1}{18}, \\ y = \frac{7}{27}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } a = -\frac{1}{18}b + \frac{7}{27}c.$$

小测试(六) 平面向量的正交分解及加、减运算的坐标表示

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓ (4)×

2. C 3. B

基础过关

1. B 解析: $\because M(2, 3), N(3, 1), \therefore \overrightarrow{NM} = (2-3, 3-1) = (-1, 2)$. 故选 B.

2. A 解析: $\because a = (2, 4), a+b = (3, 2), \therefore b = (a+b) - a = (3, 2) - (2, 4) = (1, -2)$.

3. D 解析: $\because x^2 + x + 1 > 0, -(x^2 - x + 1) < 0, \therefore$ 向量 a 对应的坐标位于第四象限. 故选 D.

4. A 解析: 由题意知, $a = (\sqrt{2} \cos 45^\circ)i + (\sqrt{2} \sin 45^\circ)j = i + j$, 即 $a = (1, 1)$.

5. B 解析: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (2, 3) + (m, n) + (-1, 4) = (m+1, 7+n)$. $\therefore \overrightarrow{DA} = (-1-m, -7-n)$. 故选 B.

6. $(-3, -5)$ 解析: $\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1, 3) - (2, 4) = (-1, -1), \therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (-1, -1) - (2, 4) = (-3, -5)$.

7. $(-4, 0) (0, 6) (-2, -5)$ 解析: 由一个向量的坐标等于向量终点的坐标减去起点的坐标, 知 $a = (-6, 2) - (-2, 2) = (-4, 0); b = (2, 6) - (2, 0) = (0, 6); c = (-3, -6) - (-1, -1) = (-2, -5)$.

8. 解: 设点D的坐标为 (x, y) ,

①当平行四边形为ABCD时, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

$$\therefore (4, 6) - (3, 7) = (1, -2) - (x, y),$$

$$\therefore \begin{cases} 1-x=1, \\ -2-y=-1, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=0, \\ y=-1, \end{cases}$$

$$\therefore D(0, -1).$$

②当平行四边形为ABDC时, 同理可得 $D(2, -3)$.

③当平行四边形为ADBC时, 同理可得 $D(6, 15)$.

综上所述, 点D的坐标可能为 $(0, -1)$ 或 $(2, -3)$ 或 $(6, 15)$.

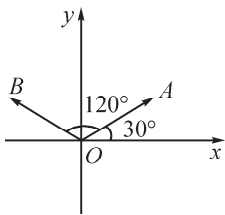
素养提升

1. ACD 解析: 因为 i, j 互相垂直, 故 $\{i, j\}$ 可作为基底. 由平面向量基本定理, 得 $\overrightarrow{OA} = 2i + 3j, \overrightarrow{OB} = -3i + 4j$. 所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -5i + j, \overrightarrow{BA} =$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, 故 ACD 正确.

2. A 解析: 由题意知, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反. 又 $|\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{a}|$, $\therefore \overrightarrow{AB} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$. 设 $B(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x+1, y-2)$. $\therefore \begin{cases} x+1+6=0, \\ y-2-8=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-7, \\ y=10. \end{cases}$ 故点 B 的坐标为 $(-7, 10)$.

3. D 解析: 如图, 设 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 120° 得到的 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标为 (x, y) , 则 $x = |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos(120^\circ + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = |\overrightarrow{OA}| \sin(120^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2}$. 故 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标是 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. 故选 D.



4. $\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ 解析: 由题意知 $\overrightarrow{AB} = (1, 4) - (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\sin \alpha, \cos \beta)$. $\therefore \sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$. 又 $\because \alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\beta = -\frac{\pi}{3}$. $\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$.

5. 解: 设点 P 的坐标为 (x, y) , 因为 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 又 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (1-x, 1-y) + (2-x, 3-y) + (3-x, 2-y) = (6-3x, 6-3y)$.

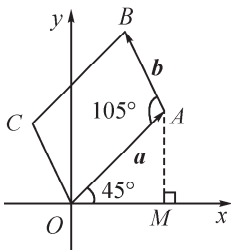
$$\text{所以 } \begin{cases} 6-3x=0, \\ 6-3y=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

所以点 P 的坐标为 $(2, 2)$,

故 $\overrightarrow{OP} = (2, 2)$.

6. 解: (1) 如图, 过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M.



$$\text{则 } OM = OA \cdot \cos 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$AM = OA \cdot \sin 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore A(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$\text{即 } \mathbf{a} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

$$\because \angle AOC = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ, \angle AOy = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COy = 30^\circ.$$

$$\text{又 } OC = AB = 3,$$

$$\therefore C(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

$$\text{即 } \mathbf{b} = (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

$$(2) \because \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) +$$

$$(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) = (2\sqrt{2} - \frac{3}{2}, 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}),$$

$$\therefore \text{点 B 的坐标为 } (2\sqrt{2} - \frac{3}{2}, 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

易错辨析

解: 由题意, 得 $\overrightarrow{AB} = (5, 4) - (2, 3) = (3, 1)$,

$$\overrightarrow{AC} = (7, 10) - (2, 3) = (5, 7).$$

设点 $P(x, y)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = (x, y) - (2, 3) = (x-2, y-3).$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC} = (3, 1) + \lambda(5, 7) = (3+5\lambda, 1+7\lambda),$$

$$\text{所以 } (x-2, y-3) = (3+5\lambda, 1+7\lambda),$$

$$\text{即 } \begin{cases} x-2=3+5\lambda, \\ y-3=1+7\lambda. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=5+5\lambda, \\ y=4+7\lambda. \end{cases}$$

因为点 P 在第三象限,

$$\text{所以 } x=5+5\lambda < 0 \text{ 且 } y=4+7\lambda < 0,$$

$$\text{解得 } \lambda < -1.$$

小测试(七) 平面向量数乘运算的坐标表示

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$ (4) $\checkmark$

2. D 3. B

基础过关

1. AC 解析: $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, 4) + (3, 0) = (5, 4) = \mathbf{c}$, 故 A 正确; $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (1, 2) + (6, 0) = (7, 2) \neq \mathbf{c}$, 故 B 错误;

$$\frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = (1, 2) = \mathbf{a}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (2, 1) \neq \mathbf{b}, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}$$

2. A 解析: 由已知得 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (7, 4) - (4, 0) = (3, 4)$, 则 $|\overrightarrow{BA}| = 5$, 所以与向量 $\overrightarrow{BA}$ 同向的

单位向量是 $\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. 故选 A.

3. B 解析: 设点 $P(a, 0)$, 则 $\overrightarrow{OP} = (a, 0)$. 由题意得 $\overrightarrow{OA} = (3, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$, 则 $(a, 0) = (6, -2) + (3\lambda, 2\lambda)$, 所以 $\begin{cases} a = 6 + 3\lambda, \\ 0 = -2 + 2\lambda. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = 1, \\ a = 9. \end{cases}$ 故选 B.

4. A 解析: 在平面直角坐标系中, $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -2)$, 所以 $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2(2, 3) + (2, -2) = (4, 6) + (2, -2) = (4+2, 6-2) = (6, 4)$. 故选 A.

5. D 解析: $\because \mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (\sqrt{3}, 1) + 2(0, -2) = (\sqrt{3}, -3) = -\sqrt{3}(-1, \sqrt{3})$. $\therefore (-1, \sqrt{3})$ 与 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 是共线向量. 故选 D.

6. 5 解析: $\because \mathbf{a} - \mathbf{c} = (3 - k, -6)$, $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \neq \mathbf{b}$, $\therefore 3(3 - k) + 6 = 0$, 解得 $k = 5$.

7. $(11, -\frac{11}{3})$ 解析: 设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$. 由 $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, 得 $(x_1 - 2, y_1 - 4) = \frac{3}{2}(-6, 2) = (-9, 3)$. $\therefore x_1 = -7, y_1 = 7$, 即 $C(-7, 7)$. 由 $\overrightarrow{BD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BA}$, 得 $(x_2 + 4, y_2 - 6) = \frac{4}{3}(6, -2) = (8, -\frac{8}{3})$, $\therefore x_2 = 4, y_2 = \frac{10}{3}$, 即 $D(4, \frac{10}{3})$, 则 $\overrightarrow{CD} = (11, -\frac{11}{3})$.

8. 解: 设点 P 的坐标为 (x, y) ,

①若点 P 在线段 AB 上, 则 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$.

$$\therefore (x - 3, y + 4) = \frac{1}{2}(-9 - x, 2 - y).$$

解得 $x = -1, y = -2$.

$\therefore P(-1, -2)$.

②若点 P 在线段 BA 的延长线上,

则 $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$.

$$\therefore (x - 3, y + 4) = -\frac{1}{4}(-9 - x, 2 - y).$$

解得 $x = 7, y = -6$.

$\therefore P(7, -6)$.

综上所述, 点 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$.

素养提升

1. ACD 解析: 点 $A(2, 1), B(0, 2), C(-2, 1), O(0, 0)$, 则 $\overrightarrow{BA} = (2, -1)$, $\overrightarrow{OC} = (-2, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, 0)$.

又 $2 \times 1 - (-1) \times (-2) = 0$, 所以 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 平行, A 正确.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{CA}$, 所以 B 不正确.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (0, 2) = \overrightarrow{OB}$, 所以 C 正确.

$\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = (0, 2) - (4, 2) = (-4, 0) = \overrightarrow{AC}$, 所以 D

正确. 故选 ACD.

2. B 解析: 方法一: 不妨设平行四边形 $ABCD$ 为正方形, $A(0, 0), B(0, 2), C(2, 2), D(2, 0)$, 则 $E(1, 2)$. 此时, $\overrightarrow{AE} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (0, -2)$. 因为 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{CD}$, 所以 $2\lambda = 1, 2\lambda - 2\mu = 2$. 解得 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$, 所以 $\lambda + \mu = 0$. 故选 B.

方法二: 由已知, 得 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

所以 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$, 所以 $\lambda + \mu = 0$. 故选 B.

3. D 解析: $\because \mathbf{a}$ 在基底 $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ 下的坐标为 $(-2, 2)$, $\therefore \mathbf{a} = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{q} = -2(1, -1) + 2(2, 1) = (2, 4)$. 设 (x, y) 为 $\mathbf{a}$ 在基底 $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ 下的坐标, 则 $\mathbf{a} = x\mathbf{m} + y\mathbf{n} = (-x + y, x + 2y)$, 即 $(2, 4) = (-x + y, x + 2y)$. $\therefore \begin{cases} y - x = 2, \\ x + 2y = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$ $\therefore \mathbf{a}$ 在基底 $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ 下的坐标为 $(0, 2)$. 故选 D.

4. $\frac{9}{2}$ 解析: $\because \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \therefore 2m = 4 - n \Leftrightarrow 2m + n = 4 (m > 0, n > 0)$. $\therefore \frac{1}{m} + \frac{8}{n} = \frac{1}{4}(\frac{1}{m} + \frac{8}{n})(2m + n) = \frac{1}{4}(10 + \frac{n}{m} + \frac{16m}{n}) \geq \frac{1}{4}(10 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{16m}{n}}) = \frac{9}{2}$. 当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{16m}{n}$, 即 $n = \frac{8}{3}, m = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立.

5. 解: (1) $k\mathbf{a} - \mathbf{b} = k(1, 0) - (2, 1) = (k - 2, -1)$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (1, 0) + 2(2, 1) = (5, 2)$.

因为 $k\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 共线,

所以 $2(k - 2) - (-1) \times 5 = 0$,

即 $2k - 4 + 5 = 0$,

解得 $k = -\frac{1}{2}$.

(2) $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(1, 0) + 3(2, 1) = (8, 3)$,

$\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + m\mathbf{b} = (1, 0) + m(2, 1) = (2m + 1, m)$.

因为 A, B, C 三点共线,

所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$.

所以 $8m - 3(2m + 1) = 0$,

即 $2m - 3 = 0$,

所以 $m = \frac{3}{2}$.

6. 解: (1) 易知 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (1, 2) + (3t, 3t) = (1 + 3t, 2 + 3t)$.

若点 P 在 x 轴上,

则 $2 + 3t = 0, \therefore t = -\frac{2}{3}$.

若点 P 在 y 轴上,

则 $1+3t=0, \therefore t=-\frac{1}{3}$.

若点 P 在第二象限,

则 $\begin{cases} 2+3t>0, \\ 1+3t<0. \end{cases}$

$\therefore -\frac{2}{3}<t<-\frac{1}{3}$.

(2) 由题可知 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$,

$\overrightarrow{PB}=(4,5)-(1+3t,2+3t)=(3-3t,3-3t)$.

假设四边形 $OABP$ 为平行四边形, 则 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OA}$.

$\therefore \begin{cases} 3-3t=1, \\ 3-3t=2, \end{cases}$ 该方程组无解.

故四边形 $OABP$ 不能为平行四边形.

易错辨析

1. D 解析: $\because \mathbf{a}=(1,-2)=-\frac{1}{4}(-4,8), |\mathbf{b}|=4|\mathbf{a}|, \therefore \mathbf{b}$ 的坐标可能是 $(-4,8)$.

2. C 解析: 由题意, 得 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 则 $2-k^2=0$, 解得 $k=\pm\sqrt{2}$. 当 $k=\sqrt{2}$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同, 不符合题意; 当 $k=-\sqrt{2}$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相反, 符合题意. 故选 C.

小测试(八) 平面向量数量积的坐标表示

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)×

2. A 3. A

基础过关

1. D 解析: 由题意, 得 $2x+3(x+2)=0$, 即 $5x+6=0$, 解得 $x=-\frac{6}{5}$. 故选 D.

2. C 解析: 因为 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}=(1,\sqrt{3})+2(-1,0)=(-1,\sqrt{3})$, 所以 $|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

3. B 解析: 由已知, 得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=1$.

1. 所以 $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$. 又 $0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$, 所以 $\angle BAC = 60^\circ$. 故选 B.

4. D 解析: 因为 $(\mathbf{c}+\mathbf{a}) \parallel \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{c}+\mathbf{a}=\lambda \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{c}=-\mathbf{a}+\lambda \mathbf{b}=(2\lambda-1, -\lambda-2)$. 由题意, 得 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(-1,3)$. 因为 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$, 即 $1-2\lambda-3\lambda-6=0$, 解得 $\lambda=-1$, 所以 $\mathbf{c}=(-3,-1)$. 故选 D.

5. B 解析: $\because$ 向量 $\mathbf{a}=(x,1), \mathbf{b}=(-1,1)$, 且 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x-1,2)=(0,2), \therefore x-1=0, \therefore x=1, \therefore$ 向量 $\mathbf{a}=(1,1), \mathbf{b}=(-1,1)$. $\therefore \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行, 故 A 错误; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=0, \therefore \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 故 B 正确; $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(2,0)$, 故 C 错误; $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2$, 故 D 错误. 故选 B.

6. $2\sqrt{5}$ 解析: 由题意, 得 $\overrightarrow{AB}=(1,1), \overrightarrow{BC}=(-3, m-3)$. 因为 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3+m-3=0$, 所以 $m=6$, 则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-2,4)$. 所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$.

7. $-\frac{4}{5}$ 解析: $\because \mathbf{a}+t\mathbf{b}=(2+t, 1+2t), \therefore |\mathbf{a}+t\mathbf{b}|=\sqrt{(t+2)^2+(2t+1)^2}=\sqrt{5\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$. $\therefore$ 当 $t=-\frac{4}{5}$ 时, $|\mathbf{a}+t\mathbf{b}|$ 有最小值 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

8. 解: (1) 当 $m=3, n=-1$ 时, $\mathbf{a}=(1,3), \mathbf{b}=(2,-1)$, 所以 $\mathbf{a}+\lambda \mathbf{b}=(1,3)+\lambda(2,-1)=(1+2\lambda, 3-\lambda)$.

因为 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a}+\lambda \mathbf{b})$,

所以 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}+\lambda \mathbf{b})=0$,

即 $(1+2\lambda)+3(3-\lambda)=0$, 解得 $\lambda=10$.

(2) 因为 $\mathbf{a}=(1,m), \mathbf{b}=(2,n)$,

所以 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(3, m+n)$.

因为 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=5$,

所以 $3^2+(m+n)^2=5^2$,

则 $(m+n)^2=16$.

所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=1 \times 2 + mn \leq 2 + \frac{1}{4}(m+n)^2 = 2 + \frac{1}{4} \times$

$16=6$, 当且仅当 $m=n=\pm 2$ 时, 等号成立.

故当 $m=n=2$ 或 $m=n=-2$ 时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的最大值为 6.

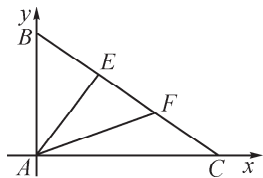
素养提升

1. B 解析: 由题意, 得 $\overrightarrow{AB}=(a-1,1), \overrightarrow{BC}=(-b-a,1)$. 因为 A, B, C 三点共线, 所以 $1 \times (a-1)=1 \times (-b-a)$, 即 $b=1-2a$. 所以 $\overrightarrow{BC}=(a-1,1)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}=(a-1)^2+1 \geq 1$, 即 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最小值为 1. 故选 B.

2. ABD 解析: 由题意, 得 $\mathbf{a}-2\mathbf{b}=(-1,-6)$, A 正确; 因为 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(5,-3)$, 所以 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$, B 正确; 与向量 $\mathbf{a}$ 平行的单位向量有两个, 它们是相反向量, C 错误; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=6-4=2>0$, 故向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影向量与 $\mathbf{b}$ 同向. 又 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, |\mathbf{b}|=\sqrt{5}$, 所以向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{5}\mathbf{b}$, D 正确. 故选 ABD.

3. A 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$, 所以 $\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=0$, 所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. 建立如图所

示的平面直角坐标系,不妨设 E 为靠近点 B 的三等分点,则 $A(0,0), B(0,2), C(3,0), E(1, \frac{4}{3}), F(2, \frac{2}{3})$. 所以 $\overrightarrow{AE} = (1, \frac{4}{3}), \overrightarrow{AF} = (2, \frac{2}{3})$. 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1 \times 2 + \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{26}{9}$. 故选 A.



4. $(-2, 1)$ 解析: 设 $q = (x, y)$, 则 $p \otimes q = (x - 2y, y + 2x) = (-4, -3)$. $\therefore \begin{cases} x - 2y = -4, \\ y + 2x = -3, \end{cases}$
 $\therefore \begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases} \therefore q = (-2, 1).$

5. 解: (1) $\because a \parallel b$,

$$\therefore 3x = 4 \times 9,$$

$$\therefore x = 12.$$

$$\therefore a \perp c,$$

$$\therefore 3 \times 4 + 4y = 0,$$

$$\therefore y = -3,$$

$$\therefore b = (9, 12), c = (4, -3).$$

$$(2) m = 2a - b = (6, 8) - (9, 12) = (-3, -4),$$

$$n = a + c = (3, 4) + (4, -3) = (7, 1).$$

设 m, n 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} =$$

$$\frac{-3 \times 7 + (-4) \times 1}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \times \sqrt{7^2 + 1}} = \frac{-25}{25\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \theta \in [0, \pi],$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4},$$

即向量 m, n 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.

6. (1) 证明: $\because A(2, 1), B(3, 2), D(-1, 4)$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 1), \overrightarrow{AD} = (-3, 3).$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-3) + 1 \times 3 = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD},$$

即 $AB \perp AD$.

(2) 解: $\because \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

设点 C 的坐标为 (x, y) ,

$$\text{则 } \overrightarrow{DC} = (x + 1, y - 4),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (1, 1),$$

$$\therefore \begin{cases} x + 1 = 1, \\ y - 4 = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 0, \\ y = 5. \end{cases}$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 5)$.

$$\therefore \overrightarrow{AC} = (0, 5) - (2, 1) = (-2, 4),$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

故矩形 $ABCD$ 的对角线的长度为 $2\sqrt{5}$.

易错辨析

1. $\{x \mid x > -3, \text{ 且 } x \neq \frac{1}{3}\}$ 解析: $\because$ 向量 $a = (1, 3)$ 与 $b = (-x, -1)$ 的夹角为钝角, $\therefore a \cdot b < 0$, $\therefore 1 \times (-x) + 3 \times (-1) < 0$, 解得 $x > -3$. 而当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 两向量反向共线, 不符合题意. 故实数 x 的取值范围为 $\{x \mid x > -3, \text{ 且 } x \neq \frac{1}{3}\}$.

2. A 解析: 设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = -\sin \varphi$. $\because \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\therefore -\sin \varphi = \cos(\frac{3\pi}{2} - \varphi)$. $\therefore \theta = \frac{3\pi}{2} - \varphi$.

小测试(九) 平面几何中的向量方法

预习自评

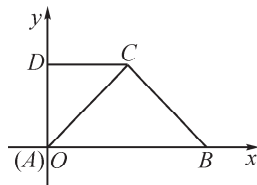
1. (1) $\times$ (2) $\times$

2. B

基础过关

1. B 解析: $\because B(7, 5), C(-4, 7)$, $\therefore BC$ 的中点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 6)$, 则 $\overrightarrow{AD} = (-\frac{5}{2}, 5)$, $\therefore |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-\frac{5}{2})^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

2. A 解析: 建立平面直角坐标系, 如图所示.



设 $AD = t (t > 0)$, 则 $C(1, t)$, 易知 $A(0, 0), B(2, 0)$, 则 $\overrightarrow{AC} = (1, t), \overrightarrow{BC} = (-1, t)$. 由 $AC \perp BC$, 得 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 + t^2 = 0$, 解得 $t = 1$ 或 $t = -1$ (舍去), 故 $AD = 1$.

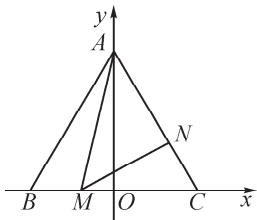
3. C 解析: $\because \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-4) + 2 \times 2 = 0$,

$\therefore AC \perp BD$. $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot$

$$|\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5.$$

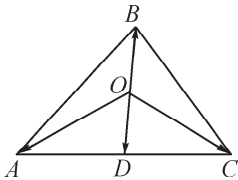
4. C 解析: 因为 $\overrightarrow{AB} = 3a$, $\overrightarrow{CD} = -5a$, 所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$,
 $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{CD}|$. 又 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$, 所以四边形 $ABCD$
 是等腰梯形. 故选 C.

5. B 解析: 以 BC 的中点 O 为原点, BC 所在直线为
 x 轴, OA 所在直线为 y 轴, 建立如图所示的平面直
 角坐标系.



则 $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $A(0, \sqrt{3})$. 则 $\overrightarrow{BC} = (2, 0)$,
 $\overrightarrow{CA} = (-1, \sqrt{3})$. 设 $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC} (0 \leq t \leq 1)$, 则 $M(2t-1, 0)$, $N(1-t, \sqrt{3}t)$. $\therefore \overrightarrow{AM} = (2t-1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{MN} = (2-3t, \sqrt{3}t)$, $\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} = (2t-1) \cdot (2-3t) + (-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}t) = -6t^2 + 4t - 2 = -6(t - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{3}$, 当 $t = \frac{1}{3}$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN}$ 取得最大值 $-\frac{4}{3}$. 故
 选 B.

6. 1:2 解析: 设 D 为 AC 的中点, 如图所示, 连接
 OD , 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$. 又 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OB}$, 所以
 $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$, 即 O 为线段 BD 的中点, 即 $\triangle AOB$ 与
 $\triangle AOC$ 的面积之比为 1:2.



7. -2 解析: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{BC} =$
 $(\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = [\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})] \cdot$
 $\overrightarrow{BC} = (\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{2}{3} \times$
 $|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2 = -6 + 1 + 3 =$
 -2 .

8. 解: (1) 设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AC} = b$,

则 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} -$
 $\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$.

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD}^2 = (\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b)^2 = \frac{4}{9}a^2 + 2 \times$
 $\frac{2}{9}a \cdot b + \frac{1}{9}b^2 = \frac{4}{9} \times 9 + 2 \times \frac{2}{9} \times 3 \times 3 \times$

$$\cos 120^\circ + \frac{1}{9} \times 9 = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3}.$$

(2) 设 $\angle DAC = \theta (0^\circ < \theta < 120^\circ)$,

则 θ 为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b) \cdot b}{\sqrt{3} \times 3} =$$

$$\frac{\frac{2}{3}a \cdot b + \frac{1}{3}b^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{3} \times 3 \times 3 \times (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} \times 9}{3\sqrt{3}} = 0.$$

$$\therefore \theta = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle DAC = 90^\circ.$$

素养提升

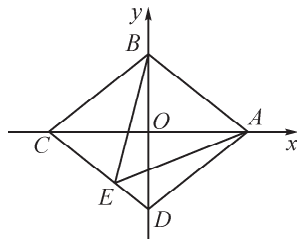
1. B 解析: 由 $(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$,
 得 $[(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})] \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$,
 所以 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$, 所以 $|\overrightarrow{AB}|^2 =$
 $|\overrightarrow{AC}|^2 \neq 0$, 所以 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$, 故 $\triangle ABC$ 是等腰三
 角形.

2. BCD 解析: 若 A 为直角, 则 $AB \perp AC$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot$
 $\overrightarrow{AC} = 0$, $\therefore 2 + 3k = 0$, 解得 $k = -\frac{2}{3}$. 若 B 为直角, 则
 $BC \perp AB$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\therefore \overrightarrow{AB} = (2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,$
 $k)$, $\therefore \overrightarrow{BC} = (-1, k-3)$, $\therefore -2 + 3k - 9 = 0$, 解得
 $k = \frac{11}{3}$. 若 C 为直角, 则 $BC \perp AC$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$,

$$\therefore -1 + k(k-3) = 0, \text{ 解得 } k = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. \text{ 综上所述, } k$$

的值可能为 $-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$. 故
 选 BCD.

3. D 解析: 设 AC 与 BD 相交于点 O , 以 O 为坐标原
 点, AC, BD 所在直线分别为 x 轴, y 轴, 建立平面
 直角坐标系, 如图所示.

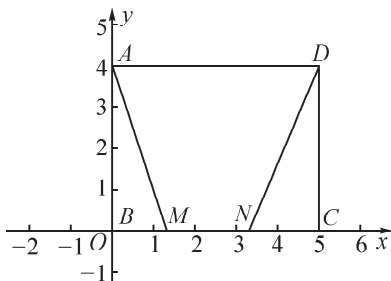


则点 $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(0, 1)$, $E(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3})$, $\therefore \overrightarrow{EA} =$

$(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$, $\overrightarrow{EB} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{3})$, 则 $\cos \angle AEB =$

$$\frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{EA}| |\overrightarrow{EB}|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 D.}$$

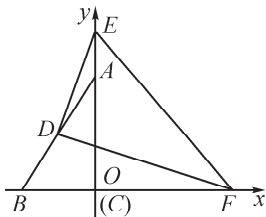
4. $\frac{55}{4}$ 解析:以 B 为原点, BC 所在直线为 x 轴, BA 所在直线为 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系.



则 $A(0,4), D(5,4)$. 设 $M(x,0)$, 则 $N(x+2,0)$, 其中 $0 \leq x \leq 3$, 所以 $\overrightarrow{AM} = (x, -4)$, $\overrightarrow{DN} = (x-3, -4)$, 所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DN} = (x, -4) \cdot (x-3, -4) = x^2 - 3x + 16 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{55}{4}$. 所以当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 取得最小值 $\frac{55}{4}$.

5. 解: $EF = \sqrt{a^2 + b^2}$, 证明如下:

以 C 为原点, 建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $C(0,0)$. 设 $A(0,m), B(n,0)$, 则 $D\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$. 又 $AE=a, BF=b$, 所以 $E(0, m+a), F(b+n, 0)$. 由 $DF \perp DE$, 得 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$. 易知 $\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{n}{2}, \frac{m}{2}+a\right)$, $\overrightarrow{DF} = \left(b+\frac{n}{2}, -\frac{m}{2}\right)$. 所以 $-\frac{n}{2}\left(b+\frac{n}{2}\right)-\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+a\right)=0$, 化简, 得 $m^2+n^2+2ma+2nb=0$. 因为 $EF^2=(m+a)^2+(n+b)^2=m^2+n^2+2am+2nb+a^2+b^2=a^2+b^2$, 所以 $EF=\sqrt{a^2+b^2}$.

6. 解: (1) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $B(x_B, y_B)$,

因为 $|\overrightarrow{OA}| = 2|\overrightarrow{AB}| = 2$,

所以 $A(2,0), |\overrightarrow{AB}| = 1$.

$$\text{又 } \angle OAB = \frac{2\pi}{3},$$

所以 $x_B = 2 + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$,

$$y_B = 0 + \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以点 B 的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$\text{又} \overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}),$$
$$\text{所以 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \left(\frac{5}{2} - 1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$

所以点 C 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

(2) 由(1)可得, $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

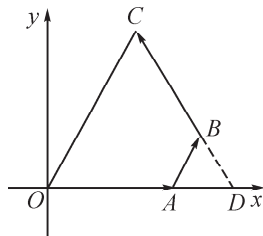
$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

所以 $\vec{OC} = 3\vec{AB}$, 所以 $\vec{OC} \parallel \vec{AB}$.

$$\text{又 } |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+3} = 2 = |\overrightarrow{OA}|,$$

所以四边形 $OABC$ 为等腰梯形.

如图所示, 延长 CB 交 x 轴于点 D ,



则 $DC=DO, BD=AD$.

$$\text{又 } \angle BAD = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3},$$

所以 $\triangle OCD, \triangle ABD$ 均为等边三角形.

$$\therefore \text{四边形 } OABC \text{ 的面积 } S = S_{\triangle OCD} - S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times$$
$$3^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = 2\sqrt{3}.$$

易错辨析

B 解析: 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$, 得 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$. 因为 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos B > 0$, 所以 $\cos B > 0$, 则角 B 为锐角.

当角 B 为锐角时, 角 A , 角 C 可能都为锐角、也可能有一个角为直角或钝角, 因此 $\triangle ABC$ 的形状不确定.

反之,若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$.

所以“ $\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$ ”是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的必要不充分条件. 故选 B.

小测试(十) 向量在物理中的应用举例

预习自评

1. (1)✓ (2)✓

2. B

基础过关

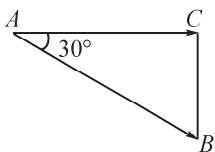
1. C 解析: 根据向量加法的平行四边形法则, 知合力 F 的大小为 $\sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2}$ (N). 故选 C.

2. A 解析: $F = F_1 + F_2 + F_3 = (3, 4) + (2, -5) + (3, 1) = (8, 0)$. 设 F 的终点坐标为 (x, y) , 则 $(x-1, y-1) = (8, 0)$, 所以 $\begin{cases} x-1=8, \\ y-1=0. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x=9, \\ y=1. \end{cases}$ 所以终点坐标为 $(9, 1)$. 故选 A.

3. D 解析: 由题意, 知 $|a+b| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, 位移方向为东北方向. 则 $a+b$ 表示向东北走 $3\sqrt{2}$ km. 故选 D.

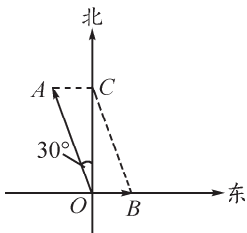
4. B 解析: 由题意, 一力作用在小车上, 其中力 F 的大小为 10 N, 方向与水平面成 60° 角, 且小车向前运动 10 m 时, 此时根据向量的数量积的定义, 可得力 F 做的功 $W = F \cdot S = 10 \times 10 \cos 60^\circ = 50$ J. 故选 B.

5. C 解析: 如图, 设鹰在地面上的影子的速度 $\vec{AC} = v_1$, 鹰的飞行速度 $\vec{AB} = v_2$, 由题可知 $|\vec{AC}| = |v_1| = 40$, 且 $\angle CAB = 30^\circ$, 则 $|\vec{AB}| = |v_2| = \frac{40}{\cos 30^\circ} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.



6. 10 J 解析: $\because$ 物体的重力为 20 N, 物体在重力方向上的位移大小是 $1 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (m), $\therefore$ 重力做的功为 $\frac{1}{2} \times 20 = 10$ (J).

7. $10\sqrt{3}$ s 解析: 如图所示,



由题意知, $|\vec{OA}| = 2$, $|\vec{OB}| = 1$, 所以 $|\vec{OC}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以南北两岸的距离为 $\sqrt{3} \times 20 = 20\sqrt{3}$ (m). 现快艇从北岸返回, 速度大小不变, 方向为正南, 所以 $20\sqrt{3} \div 2 = 10\sqrt{3}$ (s), 即从北岸出发返回南岸的时间是 $10\sqrt{3}$ s.

8. 解: (1) $\vec{AB} = (7, 0) - (20, 15) = (-13, -15)$, $W_1 = F_1 \cdot \vec{AB} = (3, 4) \cdot (-13, -15) = 3 \times$

$$(-13) + 4 \times (-15) = -99 \text{ (J)}.$$

$$W_2 = F_2 \cdot \vec{AB} = (6, -5) \cdot (-13, -15) = 6 \times (-13) + (-5) \times (-15) = -3 \text{ (J)}.$$

$\therefore$ 力 F_1, F_2 对质点所做的功分别为 -99 J 和 -3 J.

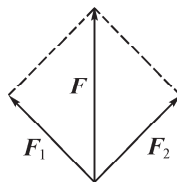
$$\begin{aligned} (2) W &= F \cdot \vec{AB} = (F_1 + F_2) \cdot \vec{AB} \\ &= [(3, 4) + (6, -5)] \cdot (-13, -15) \\ &= (9, -1) \cdot (-13, -15) \\ &= 9 \times (-13) + (-1) \times (-15) \\ &= -117 + 15 = -102 \text{ (J)}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 合力 F 对质点所做的功为 -102 J.

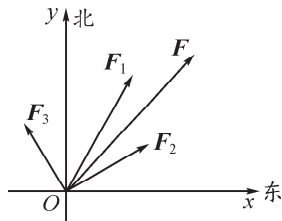
素养提升

1. B 解析: 力 F 在位移方向上的分力大小为 $|F| \sin \theta$, 故力 F 对物体 G 所做的功为 $|F| \cdot |s| \cdot \sin \theta$.

2. B 解析: 如图, 以 F_1, F_2 为邻边作平行四边形, F 为这两个力的合力. 由题意易知当它们的夹角为 90° 时, $|F| = \sqrt{2} |F_1| = 20$ N, 所以 $|F_1| = |F_2| = 10\sqrt{2}$ N. 当它们的夹角为 120° 时, 以 F_1, F_2 为邻边的平行四边形为菱形, 此时 $|F| = |F_1| = 10\sqrt{2}$ N.

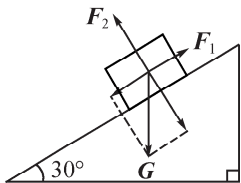


3. C 解析: 以物体初始位置为原点, 以正东方向所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 如图所示.



易得 $F_1 = (10 \sin 30^\circ, 10 \cos 30^\circ) = (5, 5\sqrt{3})$, $F_2 = (8 \sin 60^\circ, 8 \cos 60^\circ) = (4\sqrt{3}, 4)$, $F_3 = (-6 \sin 30^\circ, 6 \cos 30^\circ) = (-3, 3\sqrt{3})$. 所以合力 $F = F_1 + F_2 + F_3 = (5, 5\sqrt{3}) + (4\sqrt{3}, 4) + (-3, 3\sqrt{3}) = (2 + 4\sqrt{3}, 4 + 8\sqrt{3})$. 因为合力 F 与位移 s 的夹角为 0° , 所以合力做的功 $W = F \cdot s = |F| |s| \cos 0^\circ = |F| |s| = \sqrt{(2 + 4\sqrt{3})^2 + (4 + 8\sqrt{3})^2} \times 10 \approx 200$ J. 故选 C.

4. 160 N $80\sqrt{3}$ N 解析: 如图, 由向量分解的平行四边形法则, $\frac{|F_1|}{|G|} = \sin 30^\circ$, $\frac{|F_2|}{|G|} = \cos 30^\circ$, 计算可得 $|G| = 160$ N, $|F_2| = 80\sqrt{3}$ N.



5. 解: 设两只胳膊的拉力分别为 F_1, F_2 , 学生的体重为 m ,

$$\text{则 } mg = |\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2| = \sqrt{\mathbf{F}_1^2 + 2\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^2} = \sqrt{400^2 + 2 \times 400 \times 400 \times \cos 60^\circ + 400^2} = 400\sqrt{3} \text{ (N)},$$

$$\text{所以 } m = \frac{400\sqrt{3}}{g} = 40\sqrt{3} \approx 69 \text{ (kg)}.$$

6. 解: (1) 当船垂直到达对岸时, $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

$$\text{所以 } \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^2 = 0,$$

$$\text{即 } |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| \cos \theta + |\mathbf{v}_2|^2 = 0.$$

$$\text{所以 } 40 \cos \theta + 16 = 0,$$

$$\text{解得 } \cos \theta = -\frac{2}{5}.$$

(2) 当船垂直到达对岸时, 航行所需时间不是最短的.

理由如下:

因为船垂直到达对岸时, 垂直河岸的航行速度的大小为 $\sqrt{v_1^2 - v_2^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84}$.

$$\text{所需时间 } t = \frac{500 \times \frac{1}{1000}}{\sqrt{84}} = \frac{1}{2\sqrt{84}} \text{ (h)}.$$

若船沿垂直河岸方向航行时, 到达对岸的时间为

$$\frac{500 \times \frac{1}{1000}}{10} = \frac{1}{20} \text{ (h)}.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{20} < \frac{1}{2\sqrt{84}},$$

所以船垂直到达对岸时, 航行所需时间不是最短的.

易错辨析

A 解析: 若三个力作用于静止物体的同一点上, 且物体仍保持静止, 则 $-\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (4, 2) + (-2, 3) = (2, 5)$, 所以 $\mathbf{F}_3 = (-2, -5)$. 故选 A.

小测试(十一) 余弦定理

预习自评

1. (1) × (2) ✓ (3) ✓ (4) ×

2. B 3. B

基础过关

1. D 解析: 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, 可得

$$a^2 = 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{2}{3} = 5, \text{ 解得 } a = \sqrt{5}. \text{ 故选 D.}$$

2. D 解析: 因为 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 且 $a^2 = b^2 + c^2 -$

$2bccos A$, 所以 $\cos A = -\frac{1}{2}$. 又 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以

$A = 120^\circ$. 故选 D.

3. AB 解析: 根据 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$, 得 $3 = a^2 + 9 - 2a \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $a^2 - 3\sqrt{3}a + 6 = 0$, 解得 $a = \sqrt{3}$ 或

$a = 2\sqrt{3}$. 故选 AB.

4. D 解析: 由余弦定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$. 因为 $a^2 + c^2 = b^2$, 所以

$\triangle ABC$ 为直角三角形, 且两直角边不相等. 故选 D.

5. C 解析: 因为三角形是锐角三角形, 所以最长边 $a+2$ 对应的角为锐角, 设该角为 θ . 所以 $\cos \theta = \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} > 0$, 即 $a^2 - 2a - 3 > 0$, 解得 $a > 3$ 或 $a < -1$ (舍去). 故选 C.

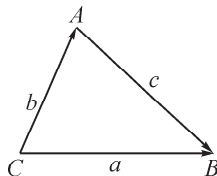
6. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 解析: 因为 $a^2 < b^2 + c^2$, 所以 $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, 则 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$, 所以 $A < \frac{\pi}{2}$.

又因为 a 为最长边, 所以 $A > \frac{\pi}{3}$, 故 A 的取值范围

是 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

7. $\sqrt{19}$ 解析: 由题意, 得 $a+b=5, ab=2$. 由余弦定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab = 5^2 - 3 \times 2 = 19$, 所以 $c = \sqrt{19}$.

8. 证明: 如图所示.



在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{又由图可知, } |\overrightarrow{CB}| = a, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = bacos C,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = cacos B,$$

$$\text{所以 } a^2 = bacos C + cacos B,$$

$$\text{即 } a = bcos C + ccos B.$$

素养提升

1. A 解析: $\because \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos C = 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1 =$

$$2 \times \frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}. \text{ 又 } \because BC = 1, AC = 5, \therefore AB =$$

$$\sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C} =$$

$$\sqrt{1 + 25 - 2 \times 1 \times 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right)} = 4\sqrt{2}. \text{ 故选 A.}$$

2. C 解析: 设内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 由已知, 得 $c^2 = b \cos A + a \cos B + ab \cos C$. 所以 $c^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}$. 化简, 得 $b^2 + a^2 = c^2$. 故 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 故选 C.

3. D 解析: 由题意, 得 $|\vec{CA} - \vec{CB}| = |\vec{BA}| = c = 2$. 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + 4 - 2b$ ①, 又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $a^2 + b^2 > 4$ 且 $a^2 + 4 > b^2$, 所以与①联立可解得 $1 < b < 4$. 因为 $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 - 4}{2} = b^2 - b = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 所以 $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ 的取值范围为 $(0, 12)$. 故选 D.

4. $\frac{2\pi}{3}$ 解析: 不妨设三角形的三边长分别为 $5k, 7k, 8k$ ($k > 0$), 边长为 $7k$ 的边所对的角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{25k^2 + 64k^2 - 49k^2}{80k^2} = \frac{1}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 因为 $5k < 7k < 8k$, 所以边长为 $8k, 5k$ 的边所对的角分别为最大角和最小角. 所以最大角与最小角之和为 $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

5. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,
因为 $\sin A \cos C = \cos A (2 \sin B - \sin C)$,
所以 $\sin A \cos C + \cos A \sin C = 2 \sin B \cos A$,
即 $\sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B = 2 \sin B \cos A$.
因为 $\sin B \neq 0$,
所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$.
(2) 因为 $\cos A = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,
又 $a = 2$,
所以 $b^2 + c^2 = bc + 4$.
因为 $b + c = \sqrt{10}$,
所以 $(b + c)^2 = 3bc + 4 = 10$,
则 $bc = 2$.
所以 $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos A = bc \cdot \cos A = 1$.

6. (1) 解: 由已知, 得 $\sin^2 A + \cos A = \frac{5}{4}$,

$$\text{即 } \cos^2 A - \cos A + \frac{1}{4} = 0.$$

$$\therefore \left(\cos A - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore 0 < A < \pi,$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{证明: } \therefore b - c = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore a = \sqrt{3}(b - c).$$

$$\text{又 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 - a^2 = bc.$$

$$\therefore b^2 + c^2 - 3(b - c)^2 = bc,$$

$$\therefore (b - 2c)(2b - c) = 0,$$

$$\therefore b = 2c \text{ 或 } 2b = c (\text{舍去}),$$

$$\therefore a = \sqrt{3}c,$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 = b^2,$$

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

易错辨析

C 解析: 根据题意, 将三边都截掉 x m 后, 三角形的三边长分别为 $(4 - x)$ m, $(5 - x)$ m, $(6 - x)$ m, 且 $0 < x < 4$, 设长为 $(6 - x)$ m 的边所对的角为 α , 则 α 为钝角. $\therefore 4 - x > 0, 5 - x > 0, 6 - x > 0, \cos \alpha = \frac{(4 - x)^2 + (5 - x)^2 - (6 - x)^2}{2(4 - x)(5 - x)} < 0, \therefore 1 < x < 5$, 又 $0 < x < 4, \therefore 1 < x < 4. \therefore 4 - x + 5 - x > 6 - x, \therefore x < 3. \therefore 1 < x < 3$. 故 x 的取值范围是 $(1, 3)$. 故选 C.

小测试(十二) 正弦定理

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$

2. A 3. B

基础过关

1. C 解析: 因为 $A = 105^\circ, B = 45^\circ$, 所以 $C = 30^\circ$. 由正弦定理, 得 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$. 故选 C.

2. D 解析: $\triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

3. B 解析: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

4. B 解析: 因为 $a = 1, A = \frac{\pi}{6}$, 所以由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. 则 $a = 2 \sin A, b = 2 \sin B$, 所

$$\text{以 } \frac{a + b}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \sin A + 2 \sin B}{\sin A + \sin B} = 2. \text{ 故选 B.}$$

5. C 解析: 对于 A, 由余弦定理, 得 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times 0} = \sqrt{5}$, 故三角形有一解.

对于 B, $a = 1, b = 3, A = 120^\circ$, 因为 $a < b$, 所以 $A < B$, 不存在这样的三角形, 故无解.

对于 C, 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{1}{2}$.

又因为 $a < b$, 所以 $B = 30^\circ$ 或 $B = 150^\circ$, 故有两解.

对于 D, $a = 2, A = 35^\circ, B = 24^\circ$, 根据正弦定理易知该三角形有唯一解. 故选 C.

6. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ 解析: 设在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2, b = 3$, 且 $\cos C = \frac{1}{3}$. 由余弦定理可知 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 13 - 12 \times \frac{1}{3} = 9, \therefore c = 3$. 又 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore$ 由正弦定理可知外接圆的直径为 $\frac{c}{\sin C} = \frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

7. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ 解析: 设 $|\overrightarrow{AB}| = c, |\overrightarrow{BC}| = a, \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ , 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 = accos \theta$, 所以 $ac = \frac{3}{\cos \theta}$. 因为 $S = \frac{1}{2} accsin(\pi - \theta) = \frac{3}{2} \tan \theta$, 所以 $\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \tan \theta \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 即 $1 \leq \tan \theta \leq \sqrt{3}$. 又 $\theta \in (0, \pi)$, 所以 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

8. 解: (1) 因为 $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$,

所以 $BC^2 - AC^2 - AB^2 = AC \cdot AB$. ①

又 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos A$. ②

由①②, 得 $\cos A = -\frac{1}{2}$.

因为 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由(1), 得 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{3}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$.

则 $AC = 2\sqrt{3} \sin B$,

$AB = 2\sqrt{3} \sin(\pi - A - B) = 3\cos B - \sqrt{3} \sin B$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $= BC + AC + AB = 3 + \sqrt{3} \sin B + 3\cos B = 3 + 2\sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$.

又 $0 < B < \frac{\pi}{3}$,

所以当 $B = \frac{\pi}{6}$ 时, $\triangle ABC$ 周长取得最大值 $3 + 2\sqrt{3}$.

素养提升

1. A 解析: 因为 $\sin^2 A + \sin^2 C - \sin A \sin C - \sin^2 B = 0$, 所以 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$. 又 $a = 2c$, 所以 $b^2 = 4c^2 + c^2 - 2c^2 = 3c^2$. 从而 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4c^2 + 3c^2 - c^2}{4\sqrt{3}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{6}$.

故选 A.

2. B 解析: 因为 $2\sin A \cos B = \sin C$, 所以 $2a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = c$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = c^2$, 则 $a^2 = b^2$, 故 $a = b$. 所以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形, 无法判断是不是正三角形或等腰直角三角形. 故选 B.

3. AB 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$, 得 $\sin C - \sin A \cos B = (2\sin A - \sin B) \cdot \cos A$, 即 $\sin(A + B) - \sin A \cos B = (2\sin A - \sin B) \cdot \cos A$. 则 $\cos A \sin B = 2\sin A \cos A - \sin B \cos A$. 所以 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$, 所以 $\cos A (\sin B - \sin A) = 0$. 则 $\cos A = 0$ 或 $\sin B = \sin A$. 又 $0 < A + B < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{2}$ 或 $B = A$. 故选 AB.

4. $\frac{\pi}{3}$ 解析: $\because 2b \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = a + c, \therefore b(\sqrt{3} \sin C + \cos C) = a + c$, 即 $\sqrt{3} b \sin C + b \cos C = a + c, \therefore \sqrt{3} \cdot \sin B \sin C + \sin B \cos C = \sin A + \sin C = \sin(B + C) + \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C + \sin C, \therefore \sqrt{3} \sin B \sin C = \cos B \sin C + \sin C$, 又 $\because \sin C \neq 0, \therefore \sqrt{3} \sin B = \cos B + 1$. 两边平方, 得 $3\sin^2 B = \cos^2 B + 1 + 2\cos B, \therefore 2\cos^2 B + \cos B - 1 = 0$, 解得 $\cos B = \frac{1}{2}$ 或 $\cos B = -1$. 又 $\because 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3}$.

5. 解: (1) 因为 $\sin A - \sin C = \frac{b \sin B}{a} - \frac{c \sin C}{a}$,

所以 $a \sin A + c \sin C - b \sin B = a \sin C$,

所以 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$.

所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$,

又因为 $B \in (0, \pi)$,

所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $a + c = 2b$,

所以 $\sin A + \sin C = 2\sin B$,

所以 $\sin A + \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin \frac{\pi}{3}$,

则 $\frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \sqrt{3}$,

所以 $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

又因为 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

6. 解: (1) 由 $\sqrt{3} \sin B \cos B + \cos^2 B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B + \frac{\cos 2B + 1}{2} = 1$, 得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B + \frac{1}{2} \cos 2B = \frac{1}{2}$.

化简,得 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

$\because B \in (0, \pi)$,

$$\therefore 2B + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right),$$

$$\therefore 2B + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2,$$

$$\therefore a = 2\sin A, c = 2\sin C.$$

$$\therefore a - \frac{1}{2}c = 2\sin A - \sin C = 2\sin A - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) =$$

$$2\sin A - \sin \frac{2\pi}{3} \cos A + \cos \frac{2\pi}{3} \sin A = \frac{3}{2} \sin A -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \sqrt{3} \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\therefore b \leq a, B = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq A < \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq A - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} \leq \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) < 1,$$

$$\therefore a - \frac{1}{2}c = \sqrt{3} \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right),$$

即 $a - \frac{1}{2}c$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$.

易错辨析

1. C 解析: $\because B = 2A, \therefore \sin B = \sin 2A$. 由正弦定理,

$$\text{得 } \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = 2\cos A. \because \triangle ABC \text{ 为锐角三}$$

角形, $\therefore 0 < 2A < \frac{\pi}{2}, 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2}. \therefore \frac{\pi}{6} < A <$

$\frac{\pi}{4}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\sqrt{2} < 2\cos A < \sqrt{3}$. 故选 C.

2. 30° 解析: 由正弦定理, 得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} =$

$$\frac{2 \times \sin 60^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \because 0^\circ < B < 180^\circ, \therefore B = 30^\circ \text{ 或 } B =$$

$150^\circ. \because b < a$, 根据三角形中大边对大角可知 $B <$

$A, \therefore B = 150^\circ$ 不符合条件, 舍去. $\therefore B = 30^\circ$.

小测试(十三) 余弦定理、正弦定理应用举例

预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)✓ (4)✓

2. C 3. B

基础过关

1. A 解析: $\angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$, 在

$\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{50}{\sin 30^\circ}$, 解得

$$AB = 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2} \text{ (m)}.$$

2. B 解析: 由题意, 得在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, 且 $AC = 60$ m. 由正弦

定理, 得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin B}$, 即 $\frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{60}{\sin 45^\circ}$, 解

得 $BC = 30\sqrt{2}$ m.

3. B 解析: $AD^2 = 60^2 + 20^2 = 4\,000$, $AC^2 = 60^2 +$

$(50 - 20)^2 = 4\,500$. 在 $\triangle CAD$ 中, 由余弦定理, 得

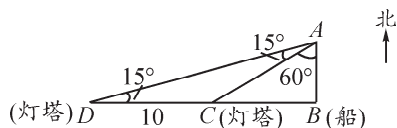
$$\cos \angle CAD = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 } \angle CAD =$$

45° . 故选 B.

4. C 解析: 如图, 依题意有 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAD = 75^\circ$, $\therefore \angle CAD = \angle CDA = 15^\circ$, $CD = AC = 10$. 在

$\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC \cdot \cos 60^\circ = 5$,

$\therefore$ 这艘船的速度是 $\frac{5}{0.5} = 10$ (n mile/h).



5. A 解析: 因为 $\angle BAD = 15^\circ$, $\angle BED = 45^\circ$, 所以

$\angle ABE = 30^\circ$. 在 $\triangle ABE$ 中, 由正弦定理, 得

$$\frac{AE}{\sin 30^\circ} = \frac{BE}{\sin 15^\circ}, \text{ 解得 } BE = 20(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ m. 在}$$

$\triangle BED$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{BE}{\sin \angle BDE} = \frac{BD}{\sin 45^\circ}$, 所

$$\text{以 } \sin \angle BDE = \frac{20(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{20} = \sqrt{3} - 1. \text{ 又}$$

$\angle ACD = 90^\circ$, 所以 $\sin \angle BDE = \sin(\angle DAC + 90^\circ)$,

所以 $\cos \angle DAC = \sqrt{3} - 1$. 故选 A.

6. 45° 解析: 在点 C 望点 A, B 的视角为 $\angle ACB =$

$180^\circ - 105^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

7. 15° 解析: $\because \angle CPD = \angle EDP - \angle DCP = 2\theta - \theta =$

$\theta, \therefore PD = CD = 30$ m. $\because \angle DPE = \angle AEP -$

$\angle EDP = 4\theta - 2\theta = 2\theta, \therefore PE = DE = 10\sqrt{3}$ m. 在

$\triangle PDE$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos 2\theta =$

$$\frac{PD^2 + DE^2 - PE^2}{2PD \cdot DE} = \frac{30^2 + (10\sqrt{3})^2 - (10\sqrt{3})^2}{2 \times 30 \times 10\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 由题意知 } 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}, \therefore 2\theta = \frac{\pi}{6}, \therefore 4\theta = \frac{\pi}{3},$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle APE$ 中, $PA = PE \cdot \sin 4\theta = 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

15(m).

8. 解: (1) 依题意, 知 $\angle BAC = 120^\circ$,

$AB = 6$ n mile,

$AC = 5 \times 2 = 10$ (n mile).

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \angle BAC = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ = 196$,

解得 $BC = 14$ (n mile),

则渔船甲的速度 $v_{\text{甲}} = \frac{BC}{2} = 7$ (n mile/h),

所以渔船甲的速度为 7 n mile/h.

(2) 由 (1), 知 $BC = 14$ n mile.

由题意, 知 $\angle BCA = \alpha$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 120^\circ}$,

即 $\sin \alpha = \frac{AB \sin 120^\circ}{BC} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

素养提升

1. A 解析: 对于①, 利用三角形内角和定理先求出

$C = \pi - A - B$, 再利用正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 解出 c .

对于②, 直接利用余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 解出 c . 对于③, 先利用三角形内角和定理求出 $C =$

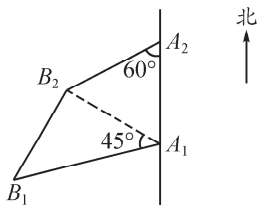
$\pi - A - B$, 再利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 解出 c . 故选 A.

2. C 解析: 由题意知, 在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中, $\angle C = 30^\circ$, $AD = 60$ m, $\therefore AC = 120$ m. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$. 由

正弦定理, 得 $BC = \frac{AC \sin \angle BAC}{\sin \angle ABC} = \frac{120 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} =$

$120(\sqrt{3} - 1)$ (m).

3. D 解析: 如图, 连接 $A_1 B_2$.



在 $\triangle A_1 A_2 B_2$ 中, 易知 $\angle A_1 A_2 B_2 = 60^\circ$,

又 $A_1 A_2 = 30\sqrt{2} \times \frac{20}{60} = 10\sqrt{2}$ (n mile), $A_2 B_2 =$

$10\sqrt{2}$ n mile, $\therefore \triangle A_1 A_2 B_2$ 为正三角形, $\therefore A_1 B_2 = 10\sqrt{2}$ n mile.

在 $\triangle A_1 B_1 B_2$ 中, $\angle B_1 A_1 B_2 = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$,

$A_1 B_1 = 20$ n mile, $\therefore B_1 B_2^2 = 400 + 200 - 2 \times 20 \times$

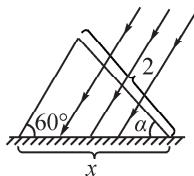
$10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 200$, $\therefore B_1 B_2 = 10\sqrt{2}$ n mile, $\therefore$ 乙船每

小时航行 $10\sqrt{2} \div \frac{20}{60} = 30\sqrt{2}$ n mile.

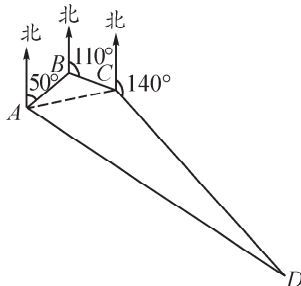
4. 30° 解析: 如图, 设竹竿与地面所成的角为 α , 影子

长为 x m, 依据正弦定理可得 $\frac{2}{\sin 60^\circ} =$

$\frac{x}{\sin(120^\circ - \alpha)}$, 所以 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sin(120^\circ - \alpha)$. 因为 $0^\circ < 120^\circ - \alpha < 120^\circ$, 所以当 $120^\circ - \alpha = 90^\circ$, 即 $\alpha = 30^\circ$ 时, 影子最长.



5. 解: (1) 连接 AC , 如图所示.



在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 50^\circ + (180^\circ - 110^\circ) = 120^\circ$.

又 $AB = BC = 1$ km,

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$.

由余弦定理可得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$ km.

在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 360^\circ - 140^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 120^\circ$,

$CD = (3 + \sqrt{3})$ km,

由余弦定理得 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{18 + 9\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$ km.

由正弦定理, 得 $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin 120^\circ}$,

即 $\sin \angle CAD = \frac{CD \cdot \sin 120^\circ}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \angle CAD = 45^\circ$,

$\therefore$ 从 A 到 D 的方位角为 $50^\circ + 30^\circ + 45^\circ = 125^\circ$.

(2) 由 (1) 知 $AD = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$ km,

$\therefore$ 从 A 到 D 的距离为 $\frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$ km.

6. 解: (1) $\because AC=40\text{ m}, BC=40\sqrt{3}\text{ m}, AC\perp BC$,

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore B=30^\circ, A=60^\circ,$$

$$\therefore AB=2AC=80\text{ m}.$$

在 $\triangle ACM$ 中, $AM=20\text{ m}$,

由余弦定理可得 $CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2AC \cdot AM \cdot$

$$\cos A = 1600 + 400 - 2 \times 40 \times 20 \times \frac{1}{2} = 1200,$$

$$\text{则 } CM = 20\sqrt{3}\text{ m}.$$

$$\text{易得 } AC^2 = AM^2 + CM^2,$$

$$\therefore CM \perp AB.$$

$$\therefore \angle MCN = 30^\circ,$$

$$\therefore MN = CM \tan 30^\circ = 20\text{ m},$$

$$\therefore CN = 2MN = 40\text{ m}.$$

$$\therefore \text{护栏的总长度}(\triangle MNC \text{ 的周长}) \text{ 为 } 20 + 40 + 20\sqrt{3} = (60 + 20\sqrt{3})\text{ m}.$$

$$(2) \text{ 设 } \angle ACM = \theta (0^\circ < \theta < 60^\circ),$$

$$\text{则 } \angle BCN = 60^\circ - \theta.$$

$\therefore$ 鱼塘 $\triangle MNC$ 的面积是民宿 $\triangle CMA$ 的面积的 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍,

$$\therefore \frac{1}{2} CN \cdot CM \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{2} CA \cdot CM \sin \theta,$$

$$\therefore CN = 40\sqrt{6} \sin \theta.$$

在 $\triangle CAN$ 中, $\angle CNA = 90^\circ - \theta$,

$$\text{由正弦定理, 得 } \frac{CN}{\sin 60^\circ} = \frac{CA}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{40}{\cos \theta},$$

$$\therefore CN = \frac{20\sqrt{3}}{\cos \theta}.$$

$$\text{从而 } 40\sqrt{6} \sin \theta = \frac{20\sqrt{3}}{\cos \theta},$$

$$\text{即 } \sin 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 $0^\circ < 2\theta < 120^\circ$, 得 $2\theta = 45^\circ$,

$$\therefore \theta = 22.5^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ACM = 22.5^\circ.$$

$$(3) \text{ 由 } (2) \text{ 知 } CN = \frac{20\sqrt{3}}{\cos \theta}.$$

又在 $\triangle ACM$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{CM}{\sin 60^\circ} =$

$$\frac{CA}{\sin(\theta + 60^\circ)} = \frac{40}{\sin(\theta + 60^\circ)},$$

$$\therefore CM = \frac{20\sqrt{3}}{\sin(\theta + 60^\circ)}.$$

$$\therefore S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} CM \cdot CN \cdot \sin 30^\circ =$$

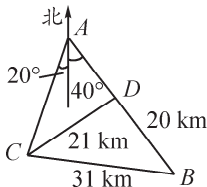
$$\frac{300}{\sin(\theta + 60^\circ) \cos \theta} = \frac{1200}{2 \sin(2\theta + 60^\circ) + \sqrt{3}},$$

$\therefore$ 当且仅当 $2\theta + 60^\circ = 90^\circ$, 即 $\theta = 15^\circ$ 时,

$\triangle CMN$ 的面积取最小值 $1200(2 - \sqrt{3})\text{ m}^2$.

易错辨析

C 解析: 如图所示, 已知 $CD=21\text{ km}, BC=31\text{ km}, BD=20\text{ km}$.



$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中, } \cos \angle BDC = \frac{21^2 + 20^2 - 31^2}{2 \times 21 \times 20} = -\frac{1}{7}.$$

$$\text{设 } \angle ADC = \alpha, \text{ 则 } \cos \alpha = \frac{1}{7}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{7}. \text{ 在 } \triangle ACD \text{ 中, 由正弦定理, 得 } \frac{AD}{\sin(60^\circ + \alpha)} =$$

$$\frac{21}{\sin 60^\circ}, \text{ 即 } AD = \frac{42}{\sqrt{3}} \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{42}{\sqrt{3}} \times$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) = 15(\text{km}).$$

小测试(十四) 余弦定理、正弦定理的综合应用

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$ (4) $\times$

2. B

基础过关

1. C 解析: 由 $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 6$, 可得 $c^2 = a^2 +$

$$b^2 - 2ab + 6. \text{ 由 } C = \frac{2\pi}{3} \text{ 可知 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C =$$

$$a^2 + b^2 + ab, \therefore a^2 + b^2 - 2ab + 6 = a^2 + b^2 + ab,$$

$$\therefore ab = 2. \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 C.}$$

2. A 解析: 由题知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} c = \sqrt{3}$,

$$\therefore c = 4. \text{ 由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 1 +$$

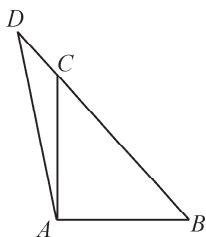
$$16 - 4 = 13, a = \sqrt{13}. \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} =$$

$$\frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } \frac{a + 2b + c}{\sin A + 2 \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{2\sqrt{39}}{3}. \text{ 故选 A.}$$

3. D 解析: 由 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $BC=AD=2\sqrt{2}$ 可知 $\triangle ABC$ 是以 $\angle BAC$ 为直角的等腰直角三

角形,如图.



$$\therefore AC = 2, \angle ACD = 135^\circ, \therefore \cos 135^\circ = \frac{CD^2 + 4 - 8}{4CD} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{化简,得 } CD^2 + 2\sqrt{2}CD - 4 = 0.$$

解得 $CD = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 或 $CD = -\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (舍去). 故选 D.

4. B 解析: $\because \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{a+c}{2c}, \therefore 2\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{a+c}{c},$

$$\therefore 1 + \cos B = \frac{a+c}{c}, \text{即 } 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a+c}{c}, \text{整理,}$$

得 $a^2 + b^2 = c^2, \therefore \triangle ABC$ 为直角三角形. 故选 B.

5. D 解析: $\because \cos 2A + \cos 2B = 1 + \cos 2C, \therefore 1 - 2\sin^2 A + 1 - 2\sin^2 B = 1 + 1 - 2\sin^2 C. \therefore \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C.$ 由正弦定理,得 $a^2 + b^2 = c^2, \therefore C = \frac{\pi}{2}.$ 又 $\because \sin C = 2\sin A \sin B, A + B = \frac{\pi}{2},$
 $\therefore 2\sin A \sin B = 2\sin B \cos B = 2\sin A \cos A = 1,$ 可得 $\sin 2A = \sin 2B = 1.$ 由于 A, B 为锐角, $\therefore A = B = \frac{\pi}{4}.$ 故选 D.

6. $2\sqrt{7}$ 解析: 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A},$

$$\text{得 } AB = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C = 2\sin C. \text{同理 } BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A.$$

$$\text{所以 } AB + 2BC = 2\sin C + 4\sin A = 2\sin C + 4\sin(120^\circ - C) = 4\sin C + 2\sqrt{3}\cos C = 2\sqrt{7}\sin(C + \varphi)$$

$$\left(\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{且 } \varphi \text{ 是第一象限角}\right). \text{因为 } 0^\circ < C <$$

$120^\circ,$ 所以 $AB + 2BC$ 的最大值为 $2\sqrt{7}.$

7. $\sqrt{2} + \frac{5}{4}$ 解析: 由题意可知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三

角形. 设 $AC = BC = m,$ 则 $AB = \sqrt{2}m.$ 设 $\angle AOB = \theta,$

$$\text{则在 } \triangle AOB \text{ 中, 由 } OA = 2, OB = 1 \text{ 及余弦定理可知}$$

$$1^2 + 2^2 - 2m^2 = 4\cos \theta, \therefore m^2 = \frac{5 - 4\cos \theta}{2}. \therefore S_{\triangle OAB} =$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin \theta = \sin \theta, S_{\triangle ABC} = \frac{m^2}{2} = \frac{5}{4} - \cos \theta. \text{记}$$

$$\text{平面四边形 } OACB \text{ 的面积为 } S, \text{则 } S = \frac{5}{4} - \cos \theta +$$

$$\sin \theta = \frac{5}{4} + \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right). \because 0 < \theta < \pi, \therefore -\frac{\pi}{4} <$$

$$\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}. \therefore \text{当 } \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{即 } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ 时, 平面四}$$

$$\text{边形 } OACB \text{ 面积的最大值是 } \sqrt{2} + \frac{5}{4}.$$

8. 解: (1) $\because c \cos B + b \cos C = 3a \cos B,$

$$\therefore \sin C \cos B + \sin B \cos C = 3 \sin A \cos B.$$

$$\therefore \sin(C + B) = 3 \sin A \cos B.$$

$$\text{又 } \because \sin(C + B) = \sin A,$$

$$\therefore \sin A = 3 \sin A \cos B.$$

$$\therefore A \in (0, \pi), \therefore \sin A > 0,$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{3}.$$

(2) $\because$ 角 B 是 $\triangle ABC$ 的内角,

$$\therefore \sin B > 0, \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B,$$

$$\therefore \frac{1}{2} a \cdot 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } a = 3.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2,$$

$$\therefore 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{3} = 3^2 + 2^2 - b^2,$$

$$\text{解得 } b = 3.$$

素养提升

1. A 解析: $\because a, b, c$ 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对

$$\text{边, } a^2 - b^2 = \frac{1}{3} c^2, a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \therefore c^2 -$$

$$2bc \cdot \cos A = \frac{1}{3} c^2, \text{即 } 3b \cdot \cos A = c. \because \triangle ABC \text{ 的面}$$

$$\text{积为 } \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{1}{6} c^2, \therefore 3b \sin A = c. \therefore \sin A =$$

$$\cos A, A = 45^\circ. \text{故选 A.}$$

2. C 解析: 由余弦定理得 $\cos A =$

$$\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{4 + 2 - 3}{2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}. \text{又 } A \in (0,$$

$$\pi), \therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{46}}{8}. \text{由正弦定理知,}$$

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R (\text{其中 } 2R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的直径}),$$

$$\therefore R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{2 \cdot \sqrt{138}}{23}. \text{则 } \triangle ABC \text{ 外接圆的面积}$$

$$\text{为 } \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{138}}{23}\right)^2 = \frac{24\pi}{23}. \text{故选 C.}$$

3. A 解析: $\because 2b \sin C = 2a \tan B - b \tan B, \tan B =$

$$\frac{\sin B}{\cos B}, \therefore 2b \sin C \cos B = 2a \sin B - b \sin B. \text{由正弦定}$$

$$\text{理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 知, } 2bc \cos B = 2ab - b^2, \text{即}$$

$\cos B = \frac{2a-b}{2c}$. $\therefore \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\therefore a^2+b^2-c^2=ab$. $\therefore \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$. 又 $C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$, $A+B = \frac{2\pi}{3}$. $\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore B = \frac{2\pi}{3} - A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 解得 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \tan A \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, 即 $\frac{1}{\tan A} \in (0, \sqrt{3})$, $\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-A)}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{2} \in (\frac{1}{2}, 2)$. 故选 A.

4. $\sqrt{7}$ 解析: 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理知, $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \angle ABC}$, $\therefore \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{AD}{\sin 45^\circ}$, $AD = 2$. $\therefore \angle ADB = 120^\circ$, $\therefore \angle ADC = 60^\circ$. 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理知, $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC = 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$, $\therefore AC = \sqrt{7}$.

5. 解: (1) 若选①: 由 $\sqrt{3}b\cos C = c\sin B$ 及正弦定理可得 $\sqrt{3}\sin B\cos C = \sin B\sin C$, $\therefore 0 < B < \pi$, $0 < C < \pi$, $\therefore \sin B > 0$, $\tan C = \sqrt{3}$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$.

若选②: $\therefore c^2 + ab = a^2 + b^2$, $\therefore a^2 + b^2 - c^2 = ab$, $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$.

又 $0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$.

若选③: $\therefore a^2 + b^2 - c^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} S_{\triangle ABC}$,

$\therefore 2ab\cos C = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} ab\sin C$,

$\therefore \tan C = \sqrt{3}$.

又 $0 < C < \pi$,

$\therefore C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 25 + b^2 - 5b = 49$,

整理, 得 $b^2 - 5b - 24 = 0$,

解得 $b = 8$ 或 $b = -3$ (舍去),

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

6. 解: (1) 易知点 D 的轨迹是以 AC 为直径的半圆 (不包括端点), 圆心为 AC 的中点 E .

所以 BD 的最大值为 $BE + 1$.

在 $\text{Rt}\triangle BAC$ 中, $AB = \sqrt{3}AC = 2\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 中, $BE = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$,

故 $BD_{\max} = \sqrt{13} + 1$.

(2) 设 $\angle ACD = \theta$, 则 $AD = 2\sin \theta$, $CD = 2\cos \theta$.

因为 $S_{\triangle ABC} = 6S_{\triangle ACD}$,

所以 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 6 \times \frac{1}{2} \times 2\cos \theta \times 2\sin \theta$,

所以 $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$,

则 $\tan^2 \theta - 2\sqrt{3}\tan \theta + 1 = 0$,

解得 $\tan \theta = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

易错辨析

$\frac{\pi}{6}$ 1 或 2 **解析:** 若 $C = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定理, 得

$\sin A = \frac{a\sin C}{c} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 因

为 $c > a$, 所以 $C > A$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$. 若 $A = \frac{\pi}{6}$, 由正弦定

理, 得 $\sin C = \frac{c\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 或

$\frac{2\pi}{3}$. 当 $C = \frac{\pi}{3}$ 时, $B = \frac{\pi}{2}$, $b = 2$; 当 $C = \frac{2\pi}{3}$ 时, $B = \frac{\pi}{6}$,

$b = 1$. 故 $b = 1$ 或 2 .

滚动卷(一) 小测试(一)至(十四)

综合拔高

1. A 解析: 因为在 $\triangle ABC$ 中 $A = B$, 所以 $a = b$, 因为 $\sin B = 2\sin C$, 所以 $b = 2c$, 所以 $a = 2c$, 所以 $\cos B = \frac{c^2 + (2c)^2 - (2c)^2}{2 \cdot c \cdot 2c} = \frac{1}{4}$. 故选 A.

2. B 解析: 因为 $\frac{\sin C}{\sin A + \sin B} + \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = 1$,

所以 $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1$. 所以 $c(b+c) + a(a+b) = (a+b)(b+c)$. 整理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$. 所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$. 因为 $0^\circ < B < 180^\circ$, 所以 $B = 60^\circ$. 故选 B.

3. C 解析: 由余弦定理的推论, 得 $\cos A = \frac{AB^2 + 4 - 3}{2AB \times 2} = \frac{1}{4} (AB + \frac{1}{AB}) \geq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $AB = 1$ 时, 取等号). 因为 $0 < A < \pi$, 故 A 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

故选 C.

4. B 解析: 设 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{5} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}}{4} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}}{3} = t$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 5t$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 4t$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 3t$. 所以 $-accos B = 5t$, $-abcos C = 4t$, $-bccos A = 3t$. 所以 $c^2 + a^2 - b^2 = -10t$, $b^2 + a^2 - c^2 = -8t$, $c^2 + b^2 - a^2 = -6t$, 得 $a = \sqrt{-9t}$, $b = \sqrt{-7t}$, $c = \sqrt{-8t}$. 所以 $a : b : c = \sqrt{9} : \sqrt{7} : \sqrt{8}$. 故选 B.

5. B 解析: 因为 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$, 所以 $2abcos C = \sqrt{2}ab$, 解得 $cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$, $sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $b = 2$, $B = \frac{\pi}{6}$, 所以由正弦定理

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 可得 } c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bcsin A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin(B + C) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$. 故选 B.

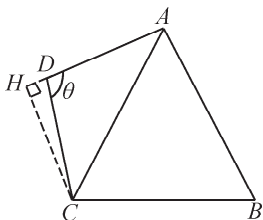
6. 5 解析: 由题知 $ac = 8$, $a + c = 7$, $B = \frac{\pi}{3}$. 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac = (a + c)^2 - 3ac = 7^2 - 3 \times 8 = 25$, 则 $b = 5$.

7. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 3 解析: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $A = 60^\circ$, 由正弦定理

$$\text{得 } \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin B}, \text{ 解得 } \sin B = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$\because \cos 60^\circ = \frac{4 + c^2 - 7}{2 \times 2c} = \frac{1}{2}$, $\therefore c = 3$ 或 $c = -1$ (舍去).

8. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ 解析: 由题意可得 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \theta = 2 - 2\cos \theta$. 过点 C 作 $CH \perp AD$ 与 AD 所在直线交于点 H , 如图所示. 则 $CH = CD \cdot \sin \theta$.



故 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta +$

$$\frac{1}{2} \times AC^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当且仅当 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 时取 “=”, 所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

9. 解: (1) 由 $a^2 - c^2 = b^2 - \frac{8bc}{5}$, 得 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4}{5}$,

$$\text{即 } \cos A = \frac{4}{5},$$

$$\because A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{5}.$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bcsin A = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{3}{5} = 6,$$

$$\therefore bc = 20. \quad \text{①}$$

$$\text{由 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4}{5} \text{ 及 } bc = 20, a = 3,$$

$$\text{得 } b^2 + c^2 = 41. \quad \text{②}$$

由①②及 $b < c$, 解得 $b = 4$, $c = 5$.

10. 解: (1) 由正弦定理, 得 $a \sin C = c \sin A$.

$$\text{因为 } 2c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A,$$

$$\text{所以 } 2c = \sqrt{3}c \sin A - c \cos A.$$

$$\text{又 } c \neq 0,$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin A - \cos A = 2,$$

$$\text{即 } 2\left(\sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos A\right) = 2,$$

$$\text{即 } \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 设 } BD = x, \text{ 则 } CD = 3 - x,$$

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bcsin A = \frac{1}{2} BD \cdot AD \cdot$$

$$\sin \angle ADB + \frac{1}{2} CD \cdot AD \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} x \cdot 1 \times$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} (3 - x) \cdot 1 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times$$

$$\sin \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } bc = 3.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } b^2 + c^2 + bc = a^2 = 9,$$

$$\text{所以 } (b - c)^2 = 9 - 3bc = 0,$$

$$\text{所以 } b = c,$$

$$\text{故 } b = c = \sqrt{3}.$$

素养提升

1. A 解析: $\because c \sin A = a \cos\left(C + \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore \sin C \sin A =$

$\sin A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \frac{1}{2} \sin C \right)$, $\because \sin A \neq 0, \therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \frac{1}{2} \sin C, \therefore 3 \sin C = \sqrt{3} \cos C, \therefore \tan C = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{6}$. 由余弦定理得 $c^2 = 3 + 4 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1, \therefore c = 1$. 故选 A.

2. D 解析: 由正弦定理及 $c \cos B + b \cos C = a \sin A$, 得 $\sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin^2 A$. 所以 $\sin(C+B) = \sin A = \sin^2 A$. 又 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $\sin A = 1$, 即 $A = 90^\circ$. 因为 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 + a^2 - c^2) = \frac{1}{2} ab \sin C$, 且 $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ab \cos C = \frac{1}{2} ab \sin C$, 所以 $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \sqrt{3}$. 又 $0^\circ < C < 90^\circ$, 所以 $C = 60^\circ$, 所以 $B = 30^\circ$. 故选 D.

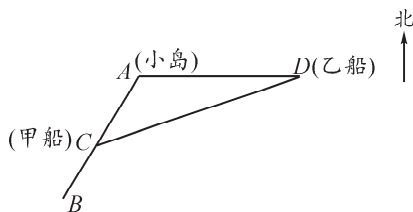
3. AB 解析: 由 $(a+b) : (a+c) : (b+c) = 9 : 10 : 11$, 得 $a : b : c = 4 : 5 : 6$. $\therefore$ 由正弦定理得 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 4 : 5 : 6, \therefore$ 选项 A 正确. 易知 $\triangle ABC$ 的最小内角为 A, 最大内角为 C. 设 $a = 4k, b = 5k, c = 6k (k > 0)$, 则 $\cos C = \frac{(4k)^2 + (5k)^2 - (6k)^2}{2 \times 4k \times 5k} = \frac{1}{8}, \cos A = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (4k)^2}{2 \times 5k \times 6k} = \frac{3}{4}, \therefore \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 1 = \frac{1}{8} = \cos C$, 又 $0 < A < \pi, 0 < C < \pi, \therefore C = 2A, \therefore$ 选项 B 正确.

由上可知最大内角 C 为锐角, $\therefore$ 选项 C 错误.

$\because \sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \therefore \triangle ABC$ 的外接圆直径为 $\frac{c}{\sin C} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}, \therefore$ 选项 D 错误. 故

选 AB.

4. $\frac{10}{13}$ 解析: 如图, 设当甲、乙两船相距最近时, 它们行驶的时间为 t h, 此时甲船位于 C 处, 乙船位于 D 处, 则 $AC = 20 - 6t, AD = 8t$. 由余弦定理可得 $CD^2 = (20 - 6t)^2 + (8t)^2 - 2(20 - 6t) \cdot 8t \cos 120^\circ = 52t^2 - 80t + 400 = 52 \left(t - \frac{10}{13} \right)^2 + \frac{4800}{13}$, 故当 $t = \frac{10}{13}$ 时, CD 取最小值.



5. 解: (1) 因为 $f(x) = a \cdot b = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}.$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right], k \in \mathbf{Z}$.

$$(2) \text{ 因为 } f(A) = \sin \left(2A + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \sin \left(2A + \frac{\pi}{6} \right) = -1,$$

$$\text{所以 } 2A + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } A = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{因为 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\text{所以 } 49 = b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc = 64 - bc,$$

$$\text{所以 } bc = 15,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

6. 解: (1) $\because a \cos B + b \cos A - 2c \cos A = 0$.

$$\therefore \sin A \cos B + \sin B \cos A - 2 \sin C \cos A = 0,$$

$$\therefore \sin(A+B) - 2 \sin C \cos A = 0,$$

$$\therefore A+B = \pi - C,$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C,$$

$$\therefore \sin C - 2 \sin C \cos A = 0,$$

$$\text{又 } C \text{ 为三角形的内角, } \sin C \neq 0,$$

$$\therefore 1 - 2 \cos A = 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } A \text{ 为三角形的内角,}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 设 } \triangle ABC \text{ 的外接圆半径为 } R, \text{ 则 } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

$$\therefore 2R = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore b = 2R \sin B = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin B,$$

$$c = 2R \sin C = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin C,$$

$$\begin{aligned} \therefore b+2c &= \frac{4}{\sqrt{3}}(\sin B+2\sin C) = \frac{4}{\sqrt{3}}[\sin B+2\sin(A+B)] \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}(2\sin B+\sqrt{3}\cos B) = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\sin(B+\varphi) \quad (\text{其中} \\ \cos \varphi &= \frac{2}{\sqrt{7}}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \text{且 } \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{4}), \\ \therefore \triangle ABC &\text{为锐角三角形,} \\ \therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases} &\text{解得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}, \\ \therefore \frac{\pi}{6} + \varphi < B + \varphi < \frac{\pi}{2} + \varphi, \\ \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) < \sin(B + \varphi) \leq 1, \\ \text{即 } \frac{2}{\sqrt{7}} < \sin(B + \varphi) \leq 1, \\ \therefore \frac{8}{\sqrt{3}} < \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\sin(B + \varphi) \leq \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, \\ \text{即 } \frac{8\sqrt{3}}{3} < b+2c \leq \frac{4\sqrt{21}}{3}. \end{aligned}$$

小测试(十五) 数系的扩充和复数的概念

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)✓

2. C 3. C

基础过关

1. B 解析: 因为复数 $(a+1)+(a-3)i$ ($a \in \mathbf{R}$) 为纯虚数, 所以 $a+1=0$ 且 $a-3 \neq 0$, 解得 $a=-1$. 故选 B.

2. B 解析: 依题意得 $\begin{cases} x=0, \\ -2=x+y, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=-2. \end{cases}$ 故选 B.

3. A 解析: $-3+i$ 的虚部为 1, $3i+i^2=-1+3i$ 的实部为 -1 , 故所求复数为 $1-i$. 故选 A.

4. D 解析: 由题意, $a, b \in \mathbf{R}$, $a+2\ 020i=2-bi$, $\therefore$ 由复数相等, 得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-2\ 020. \end{cases}$

$\therefore a^2+bi=2^2+(-2\ 020)i=4-2\ 020i$. 故选 D.

5. BCD 解析: 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x+yi=1+i$ 的充要条件是 $x=y=1$, 满足复数相等的充要条件, 所以 A 正确. 若复数 $z \in \mathbf{R}$, 则其虚部为 0, 不是不存在, 所以 B 不正确. 若 $(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2=0$, 则 $z_1=1, z_2=0, z_3=i$, 满足条件, 但是不满足 $z_1=z_2=z_3$, 所以 C 不正确. 若规定 a 与 ai 对应, 则复数 $a+bi$ ($a \neq 0$) 却没有实数与之对应, 因此不满足实数集与复数集一一对应. 所以 D 不正确. 故选 BCD.

6. 1 解析: $\because (x+y)+(x-y)i=2, \therefore \begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases} \therefore xy=1.$

7. $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ 解析: $\because z = \sin 2\alpha - i(1 - \cos 2\alpha)$ 是

纯虚数, $\therefore \begin{cases} \sin 2\alpha = 0, \\ 1 - \cos 2\alpha \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sin 2\alpha = 0, \\ \cos 2\alpha \neq 1, \end{cases} \therefore 2\alpha = \pi +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

8. 解: (1) $\because x, y \in \mathbf{R}$,

$\therefore$ 由复数相等的定义,

得 $\begin{cases} 2x-1=x-y, \\ y+1=-x-y, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-2. \end{cases}$

(2) $\because x \in \mathbf{R}$,

$\therefore$ 由复数相等的定义,

得 $\begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+1}=0, \\ x^2-2x-3=0, \end{cases}$

解得 $x=3$.

$\therefore x=3$.

素养提升

1. B 解析: $\because$ 复数 $z=a^2+(2a+3)i$ 的实部是 a^2 , 虚部是 $2a+3$, $\therefore$ 由题意得, $a^2 > 2a+3$, 即 $a^2-2a-3 > 0$. $\therefore (a+1)(a-3) > 0$, 解得 $a < -1$ 或 $a > 3$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. 故选 B.

2. B 解析: 因为关于 x 的方程 $(x^2+mx)+2xi=-2-2i$ ($m \in \mathbf{R}$) 有实数根 n , 所以 $(n^2+mn)+2ni=-2-2i$. 根据复数相等的概念, 得 $\begin{cases} n^2+mn=-2, \\ 2n=-2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=3, \\ n=-1. \end{cases}$ 所以复数 $z=3-i$. 故选 B.

3. C 解析: $\because$ 复数 $z = \left(\cos \theta - \frac{4}{5}\right) + \left(\sin \theta - \frac{3}{5}\right)i$

是纯虚数, $\therefore \cos \theta - \frac{4}{5} = 0, \sin \theta - \frac{3}{5} \neq 0, \therefore \sin \theta =$

$-\frac{3}{5}, \therefore \tan \theta = -\frac{3}{4}$. 则 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta - 1}{1 + \tan \theta} =$

$\frac{-\frac{3}{4} - 1}{1 - \frac{3}{4}} = -7$.

4. {3} 解析: 由已知, 得 $\begin{cases} m^2-3m=0, \\ m^2-4m+3=0, \end{cases}$ 解得 $m =$
 $m^2 < 10$.

3, 所以实数 m 的取值集合是 $\{3\}$.

5. 解: (1) 当复数 z 为实数时, $\begin{cases} a^2 - 5a - 6 = 0, \\ a^2 - 1 \neq 0, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -1 \text{ 或 } a = 6, \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$$

所以 $a = 6$.

所以当 $a = 6$ 时, 复数 z 为实数.

(2) 当复数 z 为虚数时, $\begin{cases} a^2 - 5a - 6 \neq 0, \\ a^2 - 1 \neq 0, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} a \neq -1 \text{ 且 } a \neq 6, \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$$

所以 $a \neq \pm 1$ 且 $a \neq 6$.

所以当 $a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 6) \cup (6, +\infty)$ 时, 复数 z 为虚数.

(3) 当复数 z 为纯虚数时 $\begin{cases} a^2 - 5a - 6 \neq 0, \\ a^2 - 7a + 6 = 0, \\ a^2 - 1 \neq 0, \end{cases}$

$$\text{所以 } \begin{cases} a \neq -1 \text{ 且 } a \neq 6, \\ a = 1 \text{ 或 } a = 6, \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$$

所以不存在实数 a , 使复数 z 为纯虚数.

6. 解: (1) $\because z_1$ 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} 4 - m^2 = 0, \\ m - 2 \neq 0, \end{cases}$$

解得 $m = -2$.

(2) 由 $z_1 = z_2$, 得 $\begin{cases} 4 - m^2 = \lambda + 2\sin\theta, \\ m - 2 = \cos\theta - 2, \end{cases}$

$$\therefore \lambda = 4 - \cos^2\theta - 2\sin\theta$$

$$= \sin^2\theta - 2\sin\theta + 3$$

$$= (\sin\theta - 1)^2 + 2.$$

$$\because -1 \leq \sin\theta \leq 1,$$

$$\therefore \text{当 } \sin\theta = 1 \text{ 时, } \lambda_{\min} = 2,$$

$$\text{当 } \sin\theta = -1 \text{ 时, } \lambda_{\max} = 6,$$

$$\therefore \text{实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } [2, 6].$$

易错辨析

1. A 解析: 虚数不能比较大小, 故①②错误; 由 $|z_1| > |z_2|$ 无法得到 $z_1 > z_2$, 故③错误; 对于④, 若 $z_1 > z_2$, 则说明 z_1, z_2 均为实数, 在实数运算中, $z_1 > z_2$ 不能推出 $|z_1| > |z_2|$, 故④错误. 故选 A.

2. B 解析: ①②均错误, 因为 a, x 不一定是复数的实部, b, y 不一定是复数的虚部. 因为 $y \in \mathbf{R}$, 所以 $y^2 - 1, -(y - 1)$ 是实数, 则 $\begin{cases} y^2 - 1 = 0, \\ -(y - 1) = 0. \end{cases}$ 解得 $y = 1$, 故③正确. 故选 B.

小测试(十六) 复数的几何意义

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$ (4) $\checkmark$

2. A 3. C

基础过关

1. AB 解析: 因为复数 $z = m^2 - 1 + (m^2 - m - 2)i$ 为实数, 所以 $m^2 - m - 2 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$.

2. AC 解析: 依题意可得 $\sqrt{(m-3)^2 + (m-1)^2} = 2$, 解得 $m = 1$ 或 $m = 3$.

3. B 解析: $\because z = m - 1 + (m + 2)i$ 在复平面内对应的点在第二象限, $\therefore m - 1 < 0, m + 2 > 0$, 解得 $-2 < m < 1$, 则实数 m 的取值范围是 $(-2, 1)$.

4. D 解析: 复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标为 $(-3, 4)$, 其模为 $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. 故选 D.

5. AC 解析: 实部相等、虚部互为相反数的两个复数互为共轭复数. 对于 A, $\bar{z}_2 = 1 + 2i = z_1$, 故 A 正确. 对于 B, $\bar{z}_2 = -1 + 2i \neq z_1$, 故 B 不正确. 对于 C, $\bar{z}_2 = 3i = z_1$, 故 C 正确. 对于 D, $\bar{z}_2 = 2 - 3i \neq z_1$, 故 D 不正确. 故选 AC.

6. $-2 - 3i$ 解析: 复数 $z_1 = 2 - 3i$ 所对应的点为 $(2, -3)$, 则 $\bar{z}_2$ 对应的点为 $(-2, 3)$. 所以 $\bar{z}_2 = -2 + 3i$, 所以 $\bar{z}_2 = -2 - 3i$.

7. $-1 - 3$ 解析: 由复数 $z_1 = -a + bi, z_2 = (b + 4) + (a - 2)i$ 在复平面内对应的点重合, 得 $\begin{cases} -a = b + 4, \\ b = a - 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = -3. \end{cases}$

8. 解: 复数 $z = (m^2 - 3m) + (m^2 - 6m + 8)i$ 的对应点 Z 的坐标为 $(m^2 - 3m, m^2 - 6m + 8)$.

(1) 点 Z 在第三象限, 则 $\begin{cases} m^2 - 3m < 0, \\ m^2 - 6m + 8 < 0, \end{cases}$

解得 $2 < m < 3$,

故当 $m \in (2, 3)$ 时, 复数 $z = (m^2 - 3m) + (m^2 - 6m + 8)i$ 的对应点在第三象限.

(2) 点 Z 在虚轴上, 则 $m^2 - 3m = 0$,

解得 $m = 0$ 或 $m = 3$,

故当 $m = 0$ 或 $m = 3$ 时, 复数 $z = (m^2 - 3m) + (m^2 - 6m + 8)i$ 的对应点在虚轴上.

(3) 点 Z 在直线 $x - y - 1 = 0$ 上,

$$\text{则 } (m^2 - 3m) - (m^2 - 6m + 8) - 1 = 0,$$

即 $3m - 9 = 0$, 解得 $m = 3$.

故当 $m = 3$ 时, 复数 $z = (m^2 - 3m) + (m^2 - 6m + 8)i$ 的对应点在直线 $x - y - 1 = 0$ 上.

素养提升

1. B 解析: 若复数 $z = (a^2 - 3a - 4) + (a - 4)i$ 为纯虚

数, 则 $\begin{cases} a^2 - 3a - 4 = 0, \\ a - 4 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 4 \text{ 或 } a = -1, \\ a \neq 4, \end{cases}$ 即

$a = -1$, 则复数 $a - ai = -1 + i$ 在复平面内对应的点为 $(-1, 1)$, 该点位于第二象限.

2. B 解析: 由 $|z|^2 - 3|z| + 2 = 0$, 得 $(|z| - 1) \cdot (|z| - 2) = 0$, 所以 $|z| = 1$ 或 $|z| = 2$. 由复数的模的几何意义知, z 在复平面内对应点的轨迹是两个圆.

3. B 解析: 由“ $ab > 0$ ”可推出 $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases}$ 当 $a >$

$0, b > 0$ 时, 复数 $a - bi$ 在复平面内对应的点位于第四象限. 当 $a < 0, b < 0$ 时, 复数 $a - bi$ 在复平面内对应的点位于第二象限. 所以“ $ab > 0$ ”是“复数 $a - bi$ 在复平面内对应的点位于第二象限”的必要不充分条件. 故选 B.

4. 二 解析: $\because$ 不等式 $-x^2 + ax + b > 0$ 的解集为 $(-2, 1)$. $\therefore$ 由一元二次方程根与系数的关系, 得

$$\begin{cases} -2 + 1 = a, \\ (-2) \times 1 = -b, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \end{cases} \text{ 即 } a < 0, b > 0, \text{ 故}$$

复数 $a + bi$ 所对应的点位于复平面内的第二象限.

5. 解: (1) $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$,

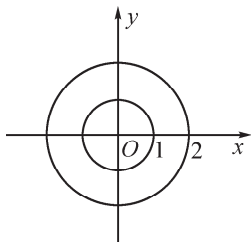
$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

(2) 由 $|z_2| \leq |z| \leq |z_1|$ 及 (1) 知 $1 \leq |z| \leq 2$.

$|z| \geq 1$ 表示以原点为圆心, 1 为半径的圆的外部所有点组成的集合 (包含圆周),

$|z| \leq 2$ 表示以原点为圆心, 2 为半径的圆的内部所有点组成的集合 (包含圆周),

故满足条件的点 Z 的集合是以 O 为圆心, 以 1 和 2 分别为半径的圆所夹的圆环 (包含边界), 如图所示.



6. 解: (1) 因为 $\overrightarrow{OZ}$ 的终点 Z 在虚轴上,

所以复数 z 的实部为 0,

则有 $\log_2(m^2 - 3m - 3) = 0$,

所以 $m^2 - 3m - 3 = 1$.

所以 $m = 4$ 或 $m = -1$.

又因为 $\begin{cases} m^2 - 3m - 3 > 0, \\ m - 2 > 0, \end{cases}$

所以 $m = 4$,

此时 $z = i$,

$\overrightarrow{OZ} = (0, 1)$.

(2) 因为 $\overrightarrow{OZ}$ 的终点 Z 在第二象限内,

$$\text{所以 } \begin{cases} \log_2(m^2 - 3m - 3) < 0, \\ \log_2(m - 2) > 0, \\ m^2 - 3m - 3 > 0, \\ m - 2 > 0, \end{cases}$$

所以 $m \in \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, 4\right)$.

易错辨析

B 解析: $\because |z - 1| = |z + 1|$, $\therefore$ 点 Z 到 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 的距离相等, 即点 Z 在以 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 为端点的线段的垂直平分线上, 即虚轴上.

小测试(十七) 复数的加、减运算及其几何意义

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$ (4) $\times$

2. D 3. A

基础过关

1. A 解析: 原式 $= 1 - i - 2 - i + 3i = -1 + i$.

2. C 解析: 由复数加法运算可知, $z = z_1 + z_2 = -3 + 2i + 1 - 4i = -2 - 2i$, 在复平面内对应的点为 $(-2, -2)$, 在第三象限. 故选 C.

3. B 解析: 由题意可得 $z_1 = z_2$, 则 $\begin{cases} m^2 - 3m = 4, \\ m^2 = 5m + 6, \end{cases}$ 解得 $m = -1$. 故选 B.

4. B 解析: 由复数减法运算的几何意义知, $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $(1 + 3i) - (1 + i) = 2i$, 所以 $|\overrightarrow{AB}| = 2$.

5. C 解析: 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 代入 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$, 得 $4a + 6bi = 4 + 6i$. 所以 $a = 1, b = 1$, 故 $z = 1 + i$. 故选 C.

6. -1 解析: 因为 $z_1 - z_2 = (a^2 - a - 2) + (a - 4 + a^2 - 2)i (a \in \mathbf{R})$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} a^2 - a - 2 = 0, \\ a^2 + a - 6 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a = -1$.

7. -3 解析: $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 即 $3 - 2i = x(-1 + 2i) + y(1 - i)$, 所以 $3 - 2i = (y - x) + (2x - y)i$, 所以 $\begin{cases} y - x = 3, \\ 2x - y = -2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \end{cases}$ 所以 $x - y = -3$.

8. 解: (1) 因为 $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{AO}$ 对应的复数为 $-3 - 2i$.

(2) 因为 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$,

所以 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数为 $(3 + 2i) - (-2 + 4i) = 5 - 2i$.

(3) 因为 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$,

所以 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$.

所以 $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

素养提升

1. C 解析: $\because$ 点 A, B, C 对应的复数分别为 $1+3i, -i, 2+i, \therefore \overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $(2+i)-(-i)=2+2i$, 设 $D(x, y), \therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}, \therefore (x-1, y-3)=(2, 2), \therefore \begin{cases} x-1=2, \\ y-3=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases} \therefore$ 点 D 对应的复数为 $3+5i$, 故选 C.

2. B 解析: 根据复数加(减)法的几何意义及 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 知以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边所作的平行四边形的对角线相等, 则此平行四边形为矩形, 故 $\triangle AOB$ 为直角三角形.

3. C 解析: 由 $|\bar{z}-4i|=|z+2|$, 得 $|x+(y-4)i|=|x+2+yi|, \therefore x^2+(y-4)^2=(x+2)^2+y^2$, 即 $x+2y=3, \therefore 2^x+4^y=2^x+2^{2y} \geq 2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$, 当且仅当 $x=2y=\frac{3}{2}$ 时, 2^x+4^y 取得最小值 $4\sqrt{2}$.

4. 100 解析: $\because x+yi=(3+5\cos\theta)+(-4+5\sin\theta)i, \therefore x^2+y^2=(3+5\cos\theta)^2+(5\sin\theta-4)^2=50+30\cos\theta-40\sin\theta=50+50\cos(\theta+\varphi)$, 其中 $\sin\varphi=\frac{4}{5}, \cos\varphi=\frac{3}{5}, \therefore (x^2+y^2)_{\max}=50+50=100$.

5. 解: (1) $\because$ 复数 $z_1=a+3i, z_2=3-i$,

$$\therefore z_1-z_2=(a-3)+4i,$$

又 $\because z_1-z_2$ 为纯虚数,

$$\therefore a-3=0,$$

解得 $a=3$.

(2) 由 (1) 知 $z_1=3+3i, z_2=3-i$,

设 $z=a+bi, a, b \in \mathbf{R}$.

$$\because |z|=|z_2|,$$

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}, \text{ 即 } a^2+b^2=10.$$

$\because z-z_1$ 为实数,

$$\therefore z-z_1=(a-3)+(b-3)i.$$

$$\therefore b-3=0, \text{ 解得 } b=3,$$

$$\therefore a=\pm 1.$$

$$\therefore z=1+3i \text{ 或 } z=-1+3i.$$

6. 解: (1) $\because$ 向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $1+2i$,

向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $3-i$,

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA},$$

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数为 $(3-i)-(1+2i)=2-3i$.

$$\text{又 } \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC},$$

$\therefore$ 点 C 对应的复数为 $(2+i)+(2-3i)=4-2i$.

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},$$

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $3-i$,

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA},$$

$$\therefore \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD},$$

$\therefore$ 点 D 对应的复数为 $2+i+3-i=5$.

$$(2) \because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos B,$$

$$\therefore \cos B=\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}=\frac{3-2}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$\therefore \sin B=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$\therefore S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \sin B=\sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10}=7,$$

故 $\square ABCD$ 的面积为 7.

小测试(十八) 复数的乘、除运算

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\times$

2. A

3. $3-2i$

基础过关

1. D 解析: (方法一) 设 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$, 因为 $(1-i) \cdot z=2$, 即 $a+b+(b-a)i=2$, 所以 $\begin{cases} a+b=2, \\ b-a=0, \end{cases}$ 解得 $a=b=1$, 所以 $z=1+i$.

(方法二) 因为 $(1-i) \cdot z=2$, 所以 $z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$. 故选 D.

2. C 解析: 由题意可得 $z=\frac{4-3i}{3+i}=\frac{5(3-i)}{10}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$. 故选 C.

3. C 解析: $\because z=2-i, \therefore \bar{z}=2+i, \therefore z(\bar{z}+i)=(2-i)(2+i+i)=(2-i)(2+2i)=4+4i-2i-2i^2=6+2i$. 故选 C.

4. B 解析: 由题意, 得 $(1-2i)^2-a(1-2i)+b=0$, 整理, 得 $b-a-3+(2a-4)i=0, \therefore \begin{cases} b-a-3=0, \\ 2a-4=0. \end{cases}$ 故 $a=2, b=5$. 则 $|a+bi|=|2+5i|=\sqrt{29}$. 故选 B.

5. D 解析: 因为 $z(2-i)=i^{2020}=(i^4)^{505}=1$, 所以 $z=\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$.

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 A 错误;}$$

复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$, 故 B 错误;

复数 z 的虚部为 $\frac{1}{5}$, 故 C 错误;

复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$,

该点在第一象限,故 D 正确. 故选 D.

6. $(-1, 2)$ 解析: 由复数的几何意义知, $z_1 = -2 - i$, $z_2 = i$, 所以 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2-i}{i} = -1 + 2i$. 故复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 对应的点的坐标为 $(-1, 2)$.

7. $\sqrt{2}$ 解析: $z = (a - i)(1 + i^3) = (a - i)(1 - i) = a - 1 - (a + 1)i$, $\therefore |z| = \sqrt{(a-1)^2 + [-(a+1)]^2} = \sqrt{2(a^2+1)}$, $a \in \mathbf{R}$, 当 $a=0$ 时, $|z|$ 取得最小值, 为 $\sqrt{2}$.

8. 解: (1) 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$,

则 $z + 2i = a + (b+2)i$.

$\therefore z + 2i$ 为实数,

$\therefore b + 2 = 0$, 解得 $b = -2$.

$\therefore \frac{z}{2-i} = \frac{a-2i}{2-i} = \frac{(a-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2a+2}{5} + \frac{a-4}{5}i$,

$\therefore \frac{z}{2-i}$ 为实数,

$\therefore \frac{a-4}{5} = 0$, 解得 $a = 4$.

$\therefore z = 4 - 2i$.

(2) $\therefore$ 复数 $(z + xi)^2 = [4 + (x-2)i]^2 = 16 - (x-2)^2 + 8(x-2)i = (12 + 4x - x^2) + (8x - 16)i$, 且复数 $(z + xi)^2$ 在复平面内对应的点在第一象限,

$\therefore \begin{cases} 12 + 4x - x^2 > 0, \\ 8x - 16 > 0, \end{cases}$

解得 $2 < x < 6$,

即实数 x 的取值范围是 $(2, 6)$.

素养提升

1. A 解析: $\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 此复数在复平面内对应点的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 该点在第一象限. 故选 A.

2. C 解析: $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$, 因为 $(-i)^4 = 1$, 且对任意的 $k, n \in \mathbf{Z}$, $(-i)^{4n+k} = (-i)^{4n} \cdot (-i)^k = (-i)^k$, 而 $(-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 = -i - 1 + i + 1 = 0$, 所以 $f(z) = f(-i) = (-i)^{2020} + (-i)^{2019} + \dots + (-i) + 1 = 505 \times 0 + 1 = 1$. 故选 C.

3. B 解析: 因为 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是方程 $f(x) = 0$ 的根, 所

以 $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = 1$, 则 $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. $\therefore (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1$, 所以 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是方程 $f(x) = 0$ 的根. 故选 B.

4. 2^{2n} 解析: 因为 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 所以 $\omega^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^3 = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1$, 原式 $= \frac{1+\omega^3}{1+\omega} \cdot \frac{1+\omega^6}{1+\omega^2} \cdot \frac{1+\omega^{12}}{1+\omega^4} \cdot \dots \cdot \frac{1+\omega^{3 \cdot 2^{2n-1}}}{1+\omega^{2^{2n-1}}} = \frac{2}{-\omega^2} \cdot \frac{2}{-\omega} \cdot \frac{2}{-\omega^2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{-\omega} = \frac{2^{2n}}{(\omega^3)^n} = 2^{2n}$.

5. 解: (1) 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0)$,

则 $\omega = a + bi + \frac{1}{a+bi} = (a + \frac{a}{a^2+b^2}) + (b - \frac{b}{a^2+b^2})i$.

因为 ω 是实数,

所以 $b - \frac{b}{a^2+b^2} = 0$, 即 $b = \frac{b}{a^2+b^2}$,

又因为 $b \neq 0$,

所以 $a^2 + b^2 = 1$, 即 $|z| = 1$.

所以 $\omega = 2a$,

因为 $-1 < \omega < 2$,

所以 $-1 < 2a < 2$,

则 $-\frac{1}{2} < a < 1$.

则 z 的实部的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 1)$.

(2) 证明: (方法一) $u = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-a-bi}{1+a+bi} = \frac{(1-a-bi)(1+a-bi)}{(1+a+bi)(1+a-bi)} = \frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}$.

由(1)知, $a^2 + b^2 = 1$,

所以 $u = -\frac{b}{1+a}i$.

又因为 $a \in (-\frac{1}{2}, 1)$, $b \neq 0$,

所以 u 为纯虚数.

(方法二) 要证 u 为纯虚数, 只需证 $u^2 < 0$.

$$u^2 = \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{z + \frac{1}{z} - 2}{z + \frac{1}{z} + 2} = \frac{\omega - 2}{\omega + 2}.$$

因为 $-1 < \omega < 2$,

所以 $\omega - 2 < 0, \omega + 2 > 0$,

所以 $\frac{\omega - 2}{\omega + 2} < 0$.

所以 u 为纯虚数.

$$(3) \omega - u^2 = 2a + \frac{b^2}{(a+1)^2} = 2a + \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2a -$$

$$\frac{a-1}{a+1} = 2a - 1 + \frac{2}{a+1} = 2 \left[(a+1) + \frac{1}{a+1} \right] - 3.$$

因为 $a \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, 所以 $a+1 > 0$.

所以 $(a+1) + \frac{1}{a+1} \geq 2$.

当 $a+1 = \frac{1}{a+1}$, 即 $a=0$ 时取等号.

所以 $\omega - u^2 \geq 1$,

所以 $\omega - u^2$ 的最小值为 1.

6. 解: (1) $\because \bar{z} \cdot (1+3i) = (m+i)(1+3i) = m-3 + (3m+1)i$ 为纯虚数,

$$\therefore m-3=0, 3m+1 \neq 0,$$

解得 $m=3$.

$$\therefore z_1 = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i,$$

$$\text{则 } |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

$$(2) i^{2021} = (i^4)^{505} \cdot i = i,$$

$$\text{复数 } z_2 = \frac{a-i}{3-i} = \frac{(a-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3a+1}{10} + \frac{a-3}{10}i \text{ 在复}$$

平面对应的点在第一象限,

$$\therefore \frac{3a+1}{10} > 0, \frac{a-3}{10} > 0,$$

解得 $a > 3$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(3, +\infty)$.

易错辨析

1. $-4+3i$ 解析: 设 $x=a+bi$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$. 原方程可化为 $\sqrt{a^2+b^2} = (1-a) + (3-b)i$, 故 $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 1-a, \\ 3-b=0, \end{cases}$ 解得 $a=-4, b=3$. 故 $x=-4+3i$.

2. $\frac{1}{12} - \frac{1}{2}$ 解析: 化简 $x^2 - (2i-1)x + 3m-i=0$ 得 $(x^2+x+3m) + (-2x-1)i=0$, 所以 $x^2+x+3m=0, -2x-1=0$, 解得 $x=-\frac{1}{2}, m=\frac{1}{12}$.

小测试(十九) 棱柱、棱锥、棱台

预习自评

1. (1)× (2)✓ (3)✓ (4)✓

2. D 3. ABD

基础过关

1. C 解析: 棱台的特征是两底面互相平行且相似, 侧棱延长后相交于一点. A, D 的侧棱延长线不交于一点, 所以不是棱台; B 中两个底面不平行, 不是棱台; 只有 C 符合棱台的特征. 故选 C.

2. B 解析: 由棱锥顶点的定义可知, 四棱锥仅有一个顶点. 故选 B.

3. B 解析: 余下部分是四棱锥 $A'-BCC'B'$. 故选 B.

4. C 解析: 可以结合正方体观察得到正确结论. 故选 C.

5. D 解析: A, B, C 中底面图形的边数与侧面的个数不一致, 故不能围成棱柱. D 中图形可围成一个长方体. 故选 D.

6. 5 6 9 解析: 面数最少的棱台是三棱台, 共有 5 个面, 6 个顶点, 9 条棱.

7. $\sqrt{13}$ 解析: 正方体展开图中 AM 的长就是最短路程, 由对称性可分 2 种情况:

①蚂蚁沿侧面爬行经过棱 BB_1 到点 M. 将正方体的侧面 A_1B_1BA, B_1C_1CB 展开如图 1 所示,

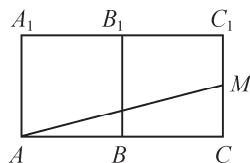


图 1

此时 $AM = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ (cm).

②蚂蚁沿下底面爬行经过棱 DC 到点 M.

将正方体的底面 $ABCD$, 侧面 D_1C_1CD 展开如图 2 所示.

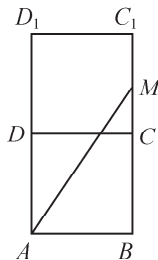
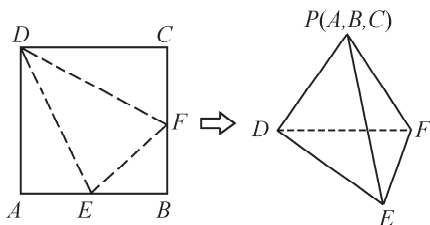


图 2

此时 $AM = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ (cm).

$\sqrt{13} < \sqrt{17}$, 故最短路程是 $\sqrt{13}$ cm.

8. 解: (1) 如图所示, 折起后的几何体是三棱锥.



$$(2) S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2}a^2,$$

$$S_{\triangle DPF} = S_{\triangle DPE} = \frac{1}{2} \times 2a \times a = a^2,$$

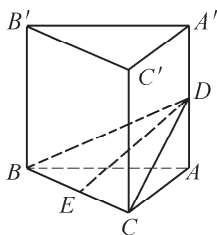
$$S_{\triangle DEF} = (2a)^2 - \frac{1}{2}a^2 - 2a^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

素养提升

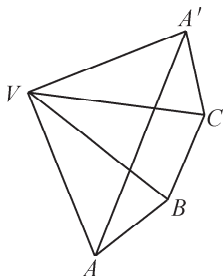
1. D 解析: 正方体是侧棱长等于底面棱长的正四棱柱, 正四棱柱的上、下两个底面都是正方形, 其余各面都是矩形, 所以正四棱柱一定是长方体, 长方体的侧棱和上、下两底面垂直, 所以长方体一定是直四棱柱, 故 $P \supseteq N \supseteq M \supseteq Q$. 故选 D.

2. D 解析: 由题意可知, 若一个棱锥的各棱长都相等, 则每个侧面均为等边三角形, 每个侧面的顶角均为 60° , 如果是六棱锥, 因为 $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, 所以顶点会在底面上, 所以这个棱锥一定不是六棱锥. 故选 D.

3. C 解析: 如图, 由正三棱柱的对称性可知 $BD = CD$. 取 BC 的中点 E , 连接 DE , 则 $DE \perp BC$. 因为 $BD = CD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, $BE = EC = 2$, 所以 $DE = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$, 所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8(\text{cm}^2)$. 所以 $\triangle BCD$ 的面积为 8 cm^2 .



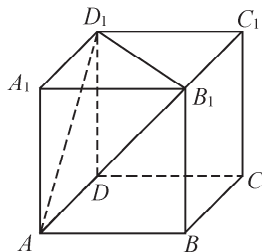
4. $4\sqrt{2}$ 解析: 将三棱锥的三个侧面展开到一个平面上, 如图所示. 线段 AA' 的长即为所求 $\triangle AEF$ 周长的最小值.



$\because \angle AVB = \angle A'VC = \angle BVC = 30^\circ, \therefore \angle AVA' = 90^\circ$. 又 $VA = VA' = 4, \therefore AA' = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

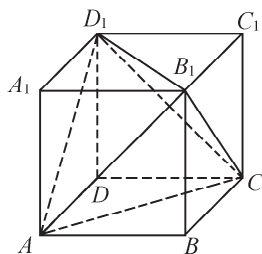
$\therefore \triangle AEF$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}$.

5. 解: (1) 如图所示.

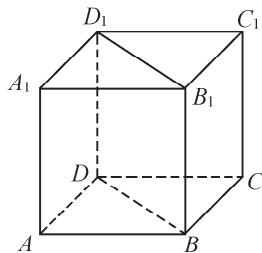


三棱锥 $A_1 - AB_1D_1$ (答案不唯一).

(2) 如图所示, 三棱锥 $B_1 - ACD_1$ (答案不唯一).

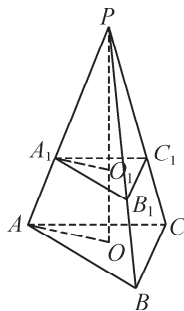


(3) 如图所示, 三棱柱 $A_1B_1D_1 - ABD$ (答案不唯一).



6. 解: 如图所示, 将三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 还原为棱锥 $P - ABC$,

设 PO 是棱锥 $P - ABC$ 的高, O_1O 是三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高.



因为棱台的上、下底面面积之比为 $4:9$, 所以上、下底面对应边之比为 $A_1B_1:AB = 2:3$, 所以 $PA_1:PA = 2:3$.

因为 $A_1O_1 \parallel AO$,

所以 $\frac{PA_1}{PA} = \frac{PO_1}{PO}$,

$$\text{所以 } \frac{PO-O_1O}{PO} = \frac{PO-4}{PO} = \frac{2}{3},$$

所以 $PO=12$ cm.

易错辨析

A 解析:在①中,反例:底面是一般的菱形的直棱柱满足条件,但不是正棱柱,故①错误.在②中,正六边形中心与各个顶点连线,构成6个等边三角形,所以正六棱锥侧棱长不可能与底面多边形的边长相等,故②错误.在③中,长方体的底边不一定相等,所以长方体不一定是正四棱柱,故③错误.

小测试(二十) 圆柱、圆锥、圆台、球、简单组合体

预习自评

1. (1)✓ (2)✗

2. A 3. B

基础过关

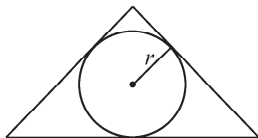
1. C 解析:以直角三角形的直角边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥,以斜边为轴旋转一周所得的旋转体是两个同底圆锥的组合物, A 错误.以直角梯形的直角腰所在直线为轴旋转一周所得的旋转体才是圆台, B 错误.圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面, C 正确.平行于圆锥底面的平面截圆锥,得到一个圆锥和一个圆台,如果截面不平行于底面,则截得的不是圆锥和圆台, D 错误.故选 C.

2. BC 解析:空间中到定点的距离等于定长的点的集合是球面,所以 A 错误, B 正确.由球体的定义知 C 正确.过球的直径的两端点可作无数个大圆,所以 D 错误.

3. AD 解析: A 可看作由一个四棱柱和一个三棱柱组合而成, D 可看作由两个四棱柱组合而成.

4. C 解析:设底面半径为 r .若矩形的长恰好为圆柱底面的周长,则 $2\pi r=8$,所以 $r=\frac{4}{\pi}$.若矩形的宽恰好为圆柱的底面周长,则 $2\pi r=4$,所以 $r=\frac{2}{\pi}$.故选 C.

5. B 解析:依题意,作出圆锥的轴截面等腰直角三角形,如图,截得其内切球的大圆是此等腰直角三角形的内切圆.易知圆锥的底面半径为 2,则其母线长为 $2\sqrt{2}$.设圆锥的内切球半径为 r ,则 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}r + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}r + \frac{1}{2} \times 4 \times r = \frac{1}{2} \times 4 \times 2$.所以 $r=2(\sqrt{2}-1)$.所以内切球的表面积为 $S=4\pi r^2=16(3-2\sqrt{2})\pi=(48-32\sqrt{2})\pi$.



6. 10 解析:设圆锥的高为 h ,由题意得 $h=20\cos 60^\circ=10$.

7. $2\sqrt{2}$ 解析:由题意知球心到截面的距离为 1,设截面圆的半径为 r ,则 $\pi r^2=\pi$,所以 $r=1$.设球的半径为 R ,则 $R=\sqrt{1^2+r^2}=\sqrt{2}$,故球的直径为 $2\sqrt{2}$.

8. 解:(1)如图所示,圆台的轴截面是等腰梯形 $ABCD$. O_1, O 分别为上底面,下底面的中心,过点 A 作 $AM \perp BC$,交 BC 于点 M .

由已知可得 $O_1A^2\pi=4\pi$,

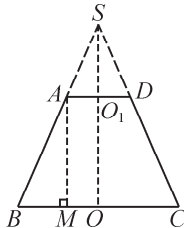
所以 $O_1A=2$ cm,

同理可得 $OB=5$ cm.

又 $AB=12$ cm,

所以高 $AM=\sqrt{12^2-(5-2)^2}=3\sqrt{15}$ cm,

即圆台的高为 $3\sqrt{15}$ cm.



(2)如图所示,延长 BA, OO_1, CD 交于点 S ,

设还原后圆锥的母线长为 l cm,

易知 $\triangle SAO_1 \sim \triangle SBO$,

$$\text{则 } \frac{l-12}{l} = \frac{2}{5},$$

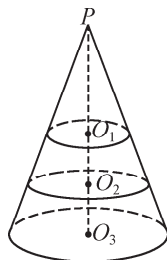
解得 $l=20$,

即圆锥的母线长为 20 cm.

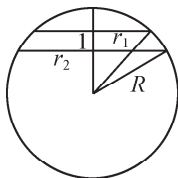
素养提升

1. B 解析:圆旋转一周形成球,圆中的矩形旋转一周形成一个圆柱.故选 B.

2. C 解析:如图,将圆台补成圆锥.设圆台的上底面,中截面,下底面的中心分别为 O_1, O_2, O_3 ,圆锥的顶点为 $P, PO_1=h$,圆台的高 $O_1O_3=2x$,中截面的面积为 S ,则 $\frac{4}{16} = \frac{h^2}{(h+2x)^2}$,整理得 $h=2x$,易得 $\frac{4}{S} = \frac{h^2}{(h+x)^2} = \frac{4x^2}{9x^2} = \frac{4}{9}$.解得 $S=9$.故选 C.

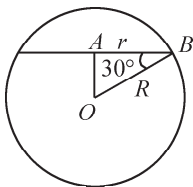


3. B 解析: 设球的半径为 R , 其轴截面如图所示.

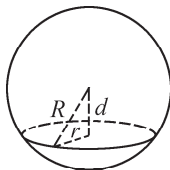


设两个截面圆的半径分别为 r_1, r_2 ($r_1 < r_2$), 球心到两个截面的距离分别为 d_1, d_2 . $\therefore$ 两个平行截面的面积分别为 $5\pi, 8\pi$, $\therefore r_1 = \sqrt{5}, r_2 = 2\sqrt{2}$. $\therefore$ 球心到两个截面的距离分别为 $d_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}, d_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}$, $\therefore d_1 - d_2 = \sqrt{R^2 - 5} - \sqrt{R^2 - 8} = 1$, $\therefore R^2 = 9, \therefore R = 3$. 故选 B.

4. $4\sqrt{3}$ 解析: 如图所示, 由题意知, 北纬 30° 所在小圆的周长为 12π cm, 则该小圆的半径 $r = 6$ cm, 其中 $\angle ABO = 30^\circ$, 所以该地球仪的半径 $R = \frac{6}{\cos 30^\circ} = 4\sqrt{3}$ (cm).



5. 解: 设球的半径为 R (单位: cm), 截面圆的半径为 r (单位: cm), 球心到截面的距离为 d (单位: cm), 如图所示.



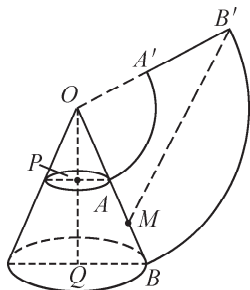
$\therefore$ 截面圆的面积 S (单位: cm^2) $= \pi r^2 = 49\pi$,

$\therefore r = 7$,

$\therefore d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$.

故球心到这个截面的距离为 24 cm.

6. 解: 如图所示, 作出圆台的侧面展开图及其所在的圆锥, 连接 MB' .



易知 $\text{Rt}\triangle OPA \sim \text{Rt}\triangle OQB$,

$$\therefore \frac{OA}{OA+AB} = \frac{PA}{QB},$$

$$\therefore \frac{OA}{OA+AB} = \frac{5}{10}.$$

$$\therefore OA = AB = 20.$$

设 $\angle BOB' = \alpha$,

由弧 BB' 的长与圆台下底面圆 Q 的周长相等,

$$\text{得 } 2 \times 10 \times \pi = 2 \times OB \times \pi \times \frac{\alpha}{2\pi},$$

$$\text{即 } 20\pi = 2 \times (20 + 20) \pi \times \frac{\alpha}{2\pi},$$

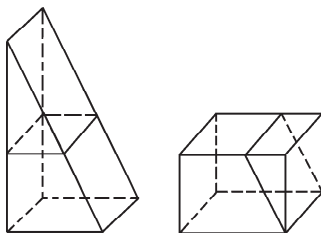
$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle B'OM \text{ 中, } B'M = \sqrt{OM^2 + OB'^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50,$$

即这条绳子长度的最小值为 50 cm.

易错辨析

①③④⑤ 解析: ①正确, 因为有六个面, 属于六面体的范围. ②错误, 因为侧棱的延长线不能交于一点, 所以不正确. ③正确, 如果把几何体放倒, 会发现是一个四棱柱; ④⑤都正确, 如图所示.



小测试(二十一) 立体图形的直观图

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$

2. C 3. AB

基础过关

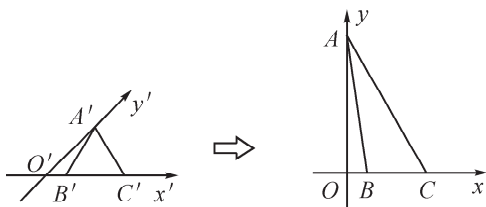
1. D 解析: 因为 $\angle A$ 的两边分别平行于 x 轴、 y 轴,

所以 $\angle A = 90^\circ$. 在直观图中, 由斜二测画法知 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 或 $\angle x'O'y' = 135^\circ$, 即 $\angle A' = 45^\circ$ 或 $\angle A' = 135^\circ$. 故选 D.

2. A 解析: 由题意知应看到正方体的上面、前面和右面, 由几何体直观图的画法及直观图中虚线的使用, 可知选 A.

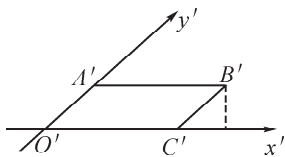
3. C 解析: 由直观图知, 该平面图形为四边形, 该四边形上下两条边平行且不相等, 且右侧两个角为直角. 故选 C.

4. C 解析: 如图所示, 将直观图还原为平面图形, $\angle ABC = 90^\circ + \angle OAB$, 可知 $\triangle ABC$ 是钝角三角形.



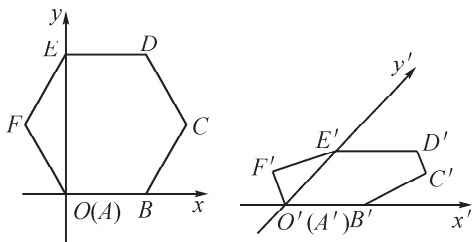
5. D 解析:圆锥顶点到底面的距离即圆锥的高,故两顶点间的距离为 $2+3=5$ (cm),因为在直观图中与 z 轴平行的线段长度不变,故选 D.

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析:画出直观图,如图所示, BC 对应 $B'C'$, 易知 $B'C'=1$, $\angle B'C'x'=45^\circ$, 故顶点 B' 到 x' 轴的距离为 $1 \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



7. $\frac{5}{2}$ 解析:在直观图中, $A'C'=3$, $B'C'=2$, 所以在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=3$, $BC=4$, C 为直角, 所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$, 则 AB 边上的中线的长度为 $\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$.

8. 解:正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2, 按照斜二测画法作出它的直观图六边形 $A'B'C'D'E'F'$, 如图所示.



则由 $\frac{S_{\text{直观图}}}{S_{\text{原平面图形}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

且正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 $6 \times S_{\text{正三角形}} = 6 \times \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$,

所以直观图 $A'B'C'D'E'F'$ 的面积 $S_{\text{直观图}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times$

$6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

素养提升

1. B 解析: $\triangle ABC$ 水平放置的直观图为 $\triangle A'B'C'$, $A'B'$, $B'C'$ 分别与 y' 轴, x' 轴平行, D' 是 $B'C'$ 边的中点, $\therefore$ 由斜二测画法规则, 可知在原图形 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp BC$, AD 为 BC 边上的中线, $\therefore \triangle ABC$ 是以 AB , BC 为直角边, AC 为斜边的直角三角形.

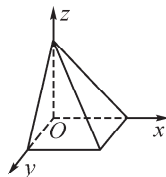
$\therefore AC > AD > AB$. 故选 B.

2. A 解析:由题可知,矩形 $O'A'B'C'$ 的面积是 $6 \times 2 = 12$. $\therefore \frac{\text{直观图的面积}}{\text{原图形的面积}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\therefore$ 原图形的面积是 $12 \div \frac{\sqrt{2}}{4} = 24\sqrt{2}$. 故选 A.

3. D 解析:易知原梯形与题中直观图中的梯形上、下底边的长度是一样的,不一样的是两个梯形的高. $OC=2O'C'$, $O'C'=\sqrt{2}C'D'$, 则 $OC=2\sqrt{2}C'D'$, 即原梯形的高 OC 的长度是直观图中梯形的高 $C'D'$ 的 $2\sqrt{2}$ 倍, 故原梯形 $OABC$ 的面积是梯形 $O'A'B'C'$ 面积的 $2\sqrt{2}$ 倍, 又梯形 $O'A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 所以原梯形的面积是 $2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$.

4. 矩形 8 解析:由斜二测画法可知,在四边形 $OABC$ 中, $OA \perp OC$, $OA=O'A'=2$, $OC=2O'C'=4$, 所以四边形 $OABC$ 是矩形, 其面积为 $2 \times 4 = 8$.

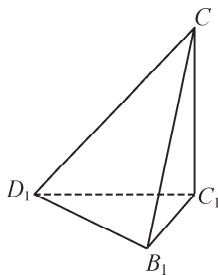
5. 解:由题设中所给的展开图可以得出,此几何体是一个四棱锥,其底面是一个边长为 2 的正方形,垂直于底面的侧棱长为 2, 其直观图如图所示.



6. 解:(1) $S_{\triangle A_1 C_1 D_1} = \frac{1}{2} \times A_1 D_1 \times D_1 C_1 \times$

$\sin \angle A_1 D_1 C_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} a^2$.

(2) 如果用图示中这样一个装置来盛水, 那么盛满水后, 水的形状可以抽象出的一个几何体是三棱锥, 如图所示.



易错辨析

④ 解析:对于①,若以该正方形的一组邻边所在的直线为 x 轴, y 轴, 则说法正确; 若以该正方形的两条对角线所在的直线为 x 轴, y 轴, 则说法不正确. 对于②,水平放置的正三角形的直观图是一个底边长不变,高比原三角形高的一半还要短的三角形. 对于③,只要坐标系选取恰当,水平放置的不等

边三角形的直观图可以是等边三角形. ④说法正确.

小测试(二十二) 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

预习自评

1. (1)× (2)× (3)✓ (4)✓

2. B 3. D

基础过关

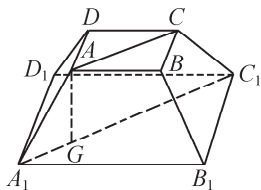
1. D 解析: 该六棱柱的 6 个侧面是全等的矩形, 则 $S_{\text{侧}} = 6 \times (3 \times 4) = 72$. 故选 D.

2. C 解析: $\because V_{C-A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC-A'B'C'} = \frac{1}{3}$, $\therefore V_{C-AA'B'B} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 故选 C.

3. D 解析: 因为长方体过一个顶点的三条棱长的比是 $1:2:3$, 所以设三条棱长分别为 $k, 2k, 3k, k > 0$. 则长方体的对角线长为 $\sqrt{k^2 + (2k)^2 + (3k)^2} = \sqrt{14}k = 2\sqrt{14}$. 所以 $k=2$. 所以长方体的三条棱长分别为 $6, 4, 2$. 所以长方体的体积为 $6 \times 4 \times 2 = 48$. 故选 D.

4. B 解析: 由题得正四棱锥侧面三角形的高为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, 所以该四棱锥的表面积为 $2^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 12$. 故选 B.

5. D 解析: 如图所示,



四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台, $AB=2$, $A_1B_1=4$, $AA_1=2$, 连接 AC, A_1C_1 . 则 $AC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $A_1C_1 = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$. 过 A 作 $AG \perp A_1C_1$, 交 A_1C_1 于点 G , 则 $A_1G = \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $AG = \sqrt{AA_1^2 - A_1G^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$. $\therefore$ 正四棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times (16+4+\sqrt{64}) = \frac{28\sqrt{2}}{3}$. 故选 D.

6. 12 解析: $V_{\text{正方体}} = 2^3 = 8$, $V_{S-ABCD} = \frac{1}{3} \times 2^2 \times (5-2) = 4$, $V_{\text{几何体}} = V_{\text{正方体}} + V_{S-ABCD} = 12$.

7. $\frac{1}{6}$ 解析: $V_{\text{三棱锥}A-DED_1} = V_{\text{三棱锥}E-DD_1A} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$.

8. 解: 设 $AB=a, BC=b, AA_1=c$,

则有 $V_{\text{长方体}ABCD-A_1B_1C_1D_1} = abc$.

由题意知 $PD = \frac{1}{2}c$,

$S_{\triangle CDQ} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} ab$,

所以 $V_{P-CDQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle CDQ} \cdot PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ab \times \frac{1}{2} c =$

$\frac{1}{12} abc = \frac{1}{12} V$.

素养提升

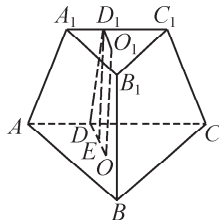
1. B 解析: 以正方体各个面的中心为顶点的凸多面体是八面体, 该八面体体积是两个底面边长为 1, 高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正四棱锥的体积之和, 一个正四棱锥的体积

为 $V_1 = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, 故八面体的体积 $V =$

$2V_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

2. C 解析: 易得三棱锥 D_1-AB_1C 的各个面均是正三角形, 其边长为正方体侧面对角线的长. 设正方体的棱长为 a , 则侧面对角线的长为 $\sqrt{2}a$, 三棱锥的表面积 $S_{\text{锥}} = 4 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}a)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a^2$. 正方体的表面积 $S_{\text{正方体}} = 6a^2$, 故 $S_{\text{锥}} : S_{\text{正方体}} = 1 : \sqrt{3}$. 故选 C.

3. C 解析: 如图, 设 O_1, O 分别为上、下底面的中心, D, D_1 分别是 AC, A_1C_1 的中点, 过 D_1 作 $D_1E \perp OD$ 于点 E .



在直角梯形 ODD_1O_1 中, $OD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

$O_1D_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $\therefore DE = OD - O_1D_1 =$

$\frac{\sqrt{3}}{6}a$. 在 $\text{Rt}\triangle DD_1E$ 中, $D_1E = \frac{\sqrt{33}}{6}a$, 则 $D_1D =$

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{6}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{36}a^2 + \frac{33}{36}a^2} = a$. $\therefore$

$S_{\text{侧}} = 3 \times \frac{1}{2} (a+2a)a = \frac{9}{2}a^2$.

4. 118.8 解析: 依题意, 知该模型是长方体中挖去一个四棱锥, 故其体积 $V = V_{\text{长方体}} - V_{\text{四棱锥}} = 6 \times 6 \times$

$4 - \frac{1}{3} \times \left(6 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 4 \right) \times 3 = 132 (\text{cm}^3)$. 又制作该模型所需的原料密度为 0.9 g/cm^3 , 所以制作该模型所需原料的质量为 $0.9 \times 132 = 118.8 (\text{g})$. (注: 质量 = 密度 $\times$ 体积)

5. 解: 由 $PO_1 = 2 \text{ m}$, 得 $OO_1 = 4PO_1 = 8 \text{ m}$.

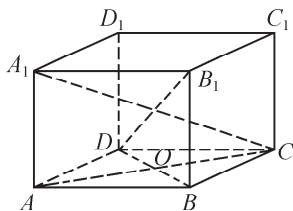
$$\text{则 } V_{P-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形}A_1B_1C_1D_1} \times PO_1 = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 = 24 (\text{m}^3),$$

$$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = S_{\text{四边形}ABCD} \times OO_1 = 6^2 \times 8 = 288 (\text{m}^3),$$

$$\therefore V = V_{P-A_1B_1C_1D_1} + V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 24 + 288 = 312 (\text{m}^3).$$

故仓库的容积为 312 m^3 .

6. 解: 如图, 设底面对角线 $AC = a, BD = b$, 交点为 O ,



$\therefore$ 体对角线 $A_1C = 15, B_1D = 9, AA_1 = BB_1 = 5$,

$$\therefore a^2 + 5^2 = 15^2, b^2 + 5^2 = 9^2,$$

$$\therefore a^2 = 200, b^2 = 56.$$

$\therefore$ 该直四棱柱的底面是菱形,

$$\therefore AB^2 = \left(\frac{AC}{2} \right)^2 + \left(\frac{BD}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{200 + 56}{4} = 64.$$

$$\therefore AB = 8.$$

$$\therefore \text{直四棱柱的侧面积 } S = 4 \times 8 \times 5 = 160.$$

易错辨析

B 解析: 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱, 且 $AC = 1, AA_1 = 2$, 棱锥 $B-DACC_1$ 的体积为 V_1 . 由题意得 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1+2}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 又三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V = Sh = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $(V - V_1) : V_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 : 1$, 故上、下两部分的体积之比为 $1 : 1$.

小测试(二十三) 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\checkmark$ (4) $\times$

2. D 3. C

基础过关

1. B 解析: 设两个球的半径分别为 r_1, r_2 . 由题意, 得

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi r_1^3}{\frac{4}{3} \pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 = \frac{8}{27}, \text{ 则 } \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}. \text{ 所以 } \frac{S_1}{S_2} =$$

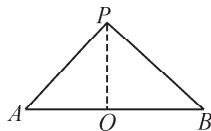
$$\frac{4 \pi r_1^2}{4 \pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}. \text{ 故选 B.}$$

2. A 解析: 设圆锥底面圆的半径为 r , 则 $2\pi r = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 4$, 解得 $r = 2$. 所以该圆锥的表面积为 $S = \pi \times 2^2 + \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 = 12\pi$.

3. A 解析: 设圆台较小底面的半径为 r , 则另一底面的半径为 $3r$. 由 $S_{\text{侧}} = 3\pi(r + 3r) = 84\pi$, 解得 $r = 7$.

4. AB 解析: 当圆柱的高为 8 cm 时, $V = \pi \times \left(\frac{12}{2\pi} \right)^2 \times 8 = \frac{288}{\pi} (\text{cm}^3)$; 当圆柱的高为 12 cm 时, $V = \pi \times \left(\frac{8}{2\pi} \right)^2 \times 12 = \frac{192}{\pi} (\text{cm}^3)$.

5. A 解析: 作圆锥的轴截面, 如图所示.



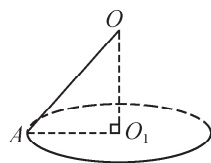
由题意知, 在 $\triangle PAB$ 中, $\angle APB = 90^\circ, PA = PB$.

设圆锥的高为 h , 底面半径为 r , 则 $h = r, PB = \sqrt{2}r$.

由 $S_{\text{侧}} = \pi \cdot r \cdot PB = 16\sqrt{2}\pi$, 得 $\sqrt{2}\pi r^2 = 16\sqrt{2}\pi$, 所以 $r = 4$. 则 $h = 4$. 故该圆锥的体积 $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h =$

$$\frac{64\pi}{3}.$$

6. $\frac{500\pi}{3}$ 解析: 根据题意, 画出图形如图所示.



设球心为 O , 截面圆的圆心为 O_1 , 球的半径为 R .

则 $OO_1 = 4 \text{ cm}, O_1A = 6 \div 2 = 3 (\text{cm})$. $\therefore R^2 = OO_1^2 +$

$O_1A^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$, 即 $R = 5 \text{ cm}$. $\therefore V = \frac{4}{3} \pi R^3 =$

$$\frac{4}{3} \pi \times 5^3 = \frac{500}{3} \pi (\text{cm}^3).$$

7. $\frac{7\sqrt{3}}{24} \pi a^3$ 解析: 圆台的轴截面如图, 由 $AD = a$,

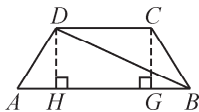
$AB = 2a, BD = \sqrt{3}a$, 可知 $\angle ADB = 90^\circ$. 分别过 D, C

作 $DH \perp AB, CG \perp AB$, 所以 $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 所以 $HB =$

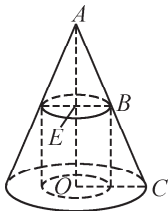
$$\sqrt{BD^2 - DH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{3}{2}a. \text{ 所以 } AH =$$

$GB = \frac{1}{2}a$, 所以 $DC = HG = a$, 所以这个圆台的体积

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + a^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{7\sqrt{3}}{24} \pi a^3.$$



8. 解: 设圆锥的底面半径为 R , 圆柱的底面半径为 r , 圆柱的高为 h , 圆柱的表面积为 S .



则 $R = OC = 2$, $AC = 4$, $AO = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

$h = AO - AE = \sqrt{3} \Rightarrow AE = \sqrt{3}$.

如图所示, 易知 $\triangle AEB \sim \triangle AOC$,

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{EB}{OC}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{r}{2}.$$

$$\therefore r = 1.$$

$$\therefore S_{\text{圆柱底}} = 2\pi r^2 = 2\pi,$$

$$S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi r \cdot h = 2\sqrt{3}\pi.$$

$$\therefore S = S_{\text{圆柱底}} + S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi + 2\sqrt{3}\pi = (2 + 2\sqrt{3})\pi.$$

素养提升

1. D 解析: 由题意知, $S_{\text{上}} = \pi$, $S_{\text{下}} = 4\pi$, $\therefore r_{\text{上}} = 1$,

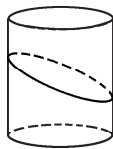
$$r_{\text{下}} = 2. \therefore S_{\text{侧}} = \pi \cdot (r_{\text{上}} + r_{\text{下}}) \cdot l = 3\pi l = 6\pi. \therefore l =$$

$$2. \therefore h = \sqrt{2^2 - (2-1)^2} = \sqrt{3}. \therefore V = \frac{1}{3} \pi (1 + 4 +$$

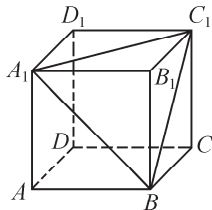
$$2) \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \pi.$$

2. AB 解析: 如果绕直角边旋转, 形成圆锥, 圆锥底面半径为 1, 高为 1, 母线长为 $\sqrt{2}$, 所以所形成的几何体的表面积 $S = \pi \times 1 \times \sqrt{2} + \pi \times 1^2 = (\sqrt{2} + 1)\pi$. 如果绕斜边旋转, 形成的是上、下两个圆锥, 圆锥的底面半径长等于直角三角形斜边上的高, 为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 两个圆锥的母线长都等于直角三角形的直角边长, 所以形成的几何体的表面积 $S = 2 \times \pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \sqrt{2}\pi$. 综上所述, 形成的几何体的表面积是 $(\sqrt{2} + 1)\pi$ 或 $\sqrt{2}\pi$. 故选 AB.

3. D 解析: 用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱, 如图, 则圆柱的体积为 $\pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$, 故所求几何体的体积为 10π .



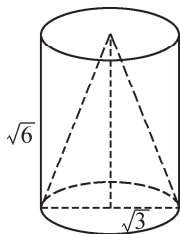
4. 6π 解析: 设内切球的半径为 R , 则正方体的棱长为 $2R$, 如图所示, 平面 A_1C_1B 截球 O 所得截面为正 $\triangle A_1C_1B$ 的内切圆, 易知, 截面圆半径为 1, 在正 $\triangle A_1C_1B$ 中, $A_1B = 2\sqrt{2}R$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{2}R = 1. \therefore R = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 故球 O 的表面积为 $4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \pi = 6\pi$.



5. 解: 该组合体的表面积 $S = 4\pi r^2 + 2\pi r l = 4\pi \times 1^2 + 2\pi \times 1 \times 3 = 10\pi$.

$$\text{该组合体的体积 } V = \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 l = \frac{4}{3} \pi \times 1^3 + \pi \times 1^2 \times 3 = \frac{13\pi}{3}.$$

6. 解: 如图所示, 圆锥的母线长为 $\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2} = 3(\text{cm})$.



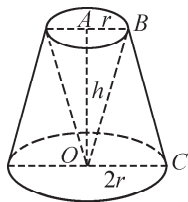
所得几何体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{底}} + S_{\text{圆柱侧}} + S_{\text{圆锥侧}} \\ &= \pi(\sqrt{3})^2 + 2\pi \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} + \pi \times \sqrt{3} \times 3 \\ &= (3 + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{3})\pi(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

易错辨析

1. $\frac{a^3}{\pi}$ 或 $\frac{a^3}{2\pi}$ 解析: 因为圆柱的侧面展开图是长、宽分别为 $2a, a$ 的矩形, 当母线长为 a 时, 圆柱的底面半径是 $\frac{a}{\pi}$, 此时圆柱的体积是 $\pi \times \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \times a = \frac{a^3}{\pi}$; 当母线长为 $2a$ 时, 圆柱的底面半径是 $\frac{a}{2\pi}$, 此时圆柱的体积是 $\pi \times \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \times 2a = \frac{a^3}{2\pi}$. 综上所述, 圆柱的体积是 $\frac{a^3}{\pi}$ 或 $\frac{a^3}{2\pi}$.

2. B 解析: 设圆台上底面半径为 r , 则圆台下底面半径为 $2r$, 圆锥的底面半径为 r , 设圆台的高为 h , 则圆锥的高为 h , 如图.



则圆台的母线长为 $\sqrt{h^2 + (2r-r)^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$, 圆锥的母线长为 $\sqrt{h^2 + r^2}$. 则圆锥的侧面积为 $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$, 圆台的侧面积为 $\pi(r+2r) \sqrt{h^2 + r^2} = 3\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$. 则圆锥的侧面积是圆台侧面积的 $\frac{1}{3}$. 故选 B.

小测试(二十四) 平面

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)✓

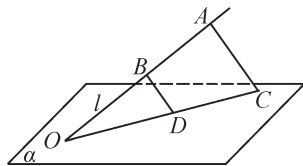
2. D 3. C

基础过关

1. ABC 解析: 由基本事实 3 可知, 若两个不重合的平面有一个公共点, 则两平面相交于过这一点的一条直线, 有无数个公共点, 因此选项 A, C 正确; 假设四个点中, 有三点共线, 则由直线与直线外一点确定一个平面, 可得这四个点共面, 故假设不成立, 即其中任意三点不共线, 因此选项 B 正确; 若两条直线平行或相交, 则可以确定一个平面, 因此选项 D 错误. 故选 ABC.
2. ABC 解析: 点在平面上, 用“ $\in$ ”表示, 不能用“ $\subset$ ”表示, 故 A 不正确; AB 在 α 内, 用“ $\subset$ ”表示, 不能用“ $\in$ ”表示, 故 B 不正确; 由 $A \notin \alpha, \alpha \subset \alpha$, 不能得出 $A \notin \alpha$, 故 C 不正确; 由 $A \notin \alpha, \alpha \subset \alpha$, 知 $A \notin \alpha$, 故 D 正确. 故选 ABC.
3. A 解析: $\because M \in \alpha, \alpha \subset \alpha, \therefore M \in \alpha$. 同理, $N \in \alpha$. 又 $M \in l, N \in l, \therefore l \subset \alpha$. 故选 A.
4. CD 解析: 因为 $AB \cap l = D$, 所以 $D \in AB$. 又 A, B, C 三点确定平面 γ , 所以 $C \in \gamma, D \in \gamma$. 又 $C, D \in \beta$, 故 C, D 在 γ 和 β 的交线上. 故选 CD.
5. A 解析: 连接 A_1C_1, AC , 则 $A_1C_1 \parallel AC$, 所以 A_1, C_1, C, A 四点共面. 所以 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 . 因为 $M \in A_1C$, 所以 $M \in$ 平面 ACC_1A_1 . 又因为 $M \in$ 平面 AB_1D_1 , 所以点 M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上. 同理, 点 O 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上, 易知点 A 在平面 ACC_1A_1 与平

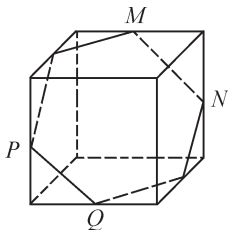
面 AB_1D_1 的交线上. 所以 A, M, O 三点共线.

6. 共线 解析: 画出图形, 如图所示.



因为 $AC \parallel BD$, 所以 A, B, C, D 四点共面. 又因为 $O \in l, l \subset$ 平面 $ABDC$, 所以 $O \in$ 平面 $ABDC$. 又因为 $O \in$ 平面 α , 所以 O 在平面 $ABDC$ 与平面 α 的交线上. 又平面 $ABDC \cap$ 平面 $\alpha = CD$. 所以 $O \in CD$, 所以 O, C, D 三点共线.

7. ①③ 解析: 题图①中, 分别连接 MN, PQ , 由正方体的性质得 $MN \parallel PQ$, 由两条平行直线可以确定一个平面, 可知图形①中四点共面, 如图, P, M, N, Q 在同一个正六边形上, 由此可知③中四点共面. ②④中四点均不共面.



8. 证明: $\because l_1 \cap l_2 = A$,
 $\therefore l_1$ 和 l_2 确定一个平面 α .
 $\because l_2 \cap l_3 = B, \therefore B \in l_2$.
 又 $\because l_2 \subset \alpha, \therefore B \in \alpha$.
 同理可证 $C \in \alpha$.
 $\because B \in l_3, C \in l_3$,
 $\therefore l_3 \subset \alpha$.
 $\therefore$ 直线 l_1, l_2, l_3 在同一平面 α 内.

素养提升

1. ABD 解析: 对于 A, 由基本事实 2 可知, $\alpha \subset \beta$, A 正确; 对于 B, 由基本事实 2 可知, 直线 $MN \subset \alpha$, $MN \subset \beta, \therefore \alpha \cap \beta = MN$, B 正确; 对于 C, $\because A \in \alpha, A \in \beta, \therefore A \in (\alpha \cap \beta)$, 由基本事实 3 可知, $\alpha \cap \beta$ 为经过 A 的一条直线而不是点 A, C 不正确; 对于 D, $B \in \alpha, B \in \beta, \therefore B \in (\alpha \cap \beta)$. 又 $\because \alpha, \beta$ 不重合, $\therefore \alpha, \beta$ 相交, D 正确. 故选 ABD.
2. B 解析: 若 B, C, D 共线, 则这五个点不一定共面; 若 B, C, D 不共线, 则这五个点一定共面. 故选 B.
3. C 解析: 因为 $MN \subset \gamma, R \in MN$, 所以 $R \in \gamma$. 又 $\alpha \cap \beta = l, MN \cap l = R$, 所以 $R \in \beta$. 又 $P \in \beta, P \in \gamma$, 所以 P, R 均为平面 γ 与 β 的公共点. 所以 $\beta \cap \gamma = PR$. 故选 C.
4. 7 解析: 空间中的 5 个点可以构成一个四棱锥, 它

们总共确定 7 个平面.

5. 证明: 因为 $AB \parallel CD$,

所以 AB, CD 确定一个平面 β .

因为 $AB \subset \text{平面 } \beta, E \in AB$,

所以 $E \in \beta$.

因为 $AB \cap \alpha = E$, 所以 $E \in \alpha$.

所以 E 在 α 与 β 的交线 l 上.

同理, F, G, H 也在 α 与 β 的交线 l 上.

所以 E, F, G, H 四点共线.

6. 证明: 不妨设 $AB \neq A_1B_1$,

则四边形 AA_1B_1B 为梯形.

$\therefore AA_1$ 与 BB_1 相交, 设其交点为 S .

则 $S \in AA_1, S \in BB_1$.

$\because BB_1 \subset \text{平面 } BCC_1B_1$,

$\therefore S \in \text{平面 } BCC_1B_1$.

同理可证, $S \in \text{平面 } ACC_1A_1$.

$\therefore$ 点 S 在平面 BCC_1B_1 与平面 ACC_1A_1 的交线上, 即 $S \in CC_1$.

$\therefore AA_1, BB_1, CC_1$ 三线共点.

易错辨析

1. ③ 解析: 一条直线与直线外一点能确定一个平面, 所以①不正确; 两条相交直线或两条平行直线可以确定一个平面, 所以②不正确; ③正确; 三条互相平行的直线不一定共面, 例如三棱柱的三条侧棱, 所以④不正确.

2. B 解析: 点 A 在直线 a 上, 直线 a 在平面 α 内, 点 B 在平面 α 内, 用符号语言可表示为 $A \in a, a \subset \alpha, B \in \alpha$. 故选 B.

小测试(二十五) 空间点、直线、平面之间的位置关系

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$ (4) $\times$

2. D 3. D

基础过关

1. D 解析: 因为 l_1, l_2 为异面直线, 直线 $l_3 \parallel l_1$, 所以 l_3 与 l_2 的位置关系是异面或相交.

2. B 解析: 由已知条件知直线 a 与平面 α 相交, 则平面 α 内的直线与 a 可能相交, 也可能异面, 不可能平行.

3. B 解析: 当两个平面相互平行时, 把空间分成 3 部分; 当两个平面相交时, 把空间分成 4 部分. 所以不重合的两个平面可以把空间分成 3 部分或 4 部分. 故选 B.

4. C 解析: ①由平行线间的传递性可知, 平行于同一

条直线的两条直线平行, 故①正确; ②平行于同一条直线的两个平面平行或相交, 故②错误; ③平行于同一个平面的两条直线平行、相交或异面, 故③错误; ④根据平面平行的性质, 平行于同一个平面的两个平面平行, 故④正确.

5. B 解析: 若 $\beta \parallel \gamma$, 则这三个平面有 2 条交线; 若平面 β, γ 相交, 则这三个平面可能有 1 条或 3 条交线. 故①错误; 若两个平面平行, 则这两个平面没有公共点, 故②正确; 当 $a \subset \alpha$ 时, ③错误; $\alpha \parallel \beta, a \parallel \alpha$, 可能有 $a \subset \beta$, ④错误. 故选 B.

6. 平行或相交 解析: 当这两点在 α 的同侧时, l 与 α 平行; 当这两点在 α 的异侧时, l 与 α 相交.

7. 相交或平行或异面 解析: 设 $\alpha \cap \beta = l$, 当 $AB \parallel l, CD \parallel l$ 时, $AB \parallel CD$; 当 AB 与 l 相交, CD 与 l 相交时, 若交点相同, 则直线 AB 与 CD 相交; 若交点不同, 则直线 AB 与 CD 异面.

8. 证明: 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,

E 为 $B'C'$ 的中点,

所以 EC 与 BB' 不平行.

则延长 CE 与 BB' 必相交于一点 H .

所以 $H \in EC, H \in B'B$.

又 $BB' \subset \text{平面 } ABB'A', CE \subset \text{平面 } CDFE$,

所以 $H \in \text{平面 } ABB'A', H \in \text{平面 } CDFE$.

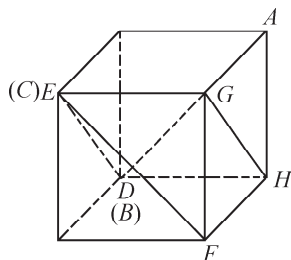
故平面 $ABB'A'$ 与平面 $CDFE$ 相交.

素养提升

1. A 解析: 延长三棱台各侧棱可恢复成三棱锥的形状, 所以三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面相交. 故选 A.

2. B 解析: 对于 A, 过点 P 与 l, m 都平行的直线不存在; 对于 B, 过点 P 与 l, m 都垂直的直线只有一条; 对于 C, 过点 P 与 l, m 都相交的直线有一条或零条; 对于 D, 过点 P 与 l, m 都异面的直线有无数条. 故选 B.

3. C 解析: 把正方体的平面展开图还原成正方体, 如图所示.



由正方体的性质, 得 AB 与 CD 相交, AD 与 EF 异面, CD 与 GH 平行, AB 与 GH 异面.

4. ②④ 解析: ①中, $GH \parallel MN$; ③中, 连接 GM ,

$GM \parallel HN$ 且 $GM \neq HN$, 所以直线 GH 与 MN 必相交.

5. 解: $a \parallel b, a \parallel \beta$. 证明如下:

由 $a \cap \gamma = a$ 知, $a \subset \alpha$ 且 $a \subset \gamma$.

由 $\beta \cap \gamma = b$ 知, $b \subset \beta$ 且 $b \subset \gamma$.

$\therefore a \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$,

$\therefore a, b$ 无公共点.

又 $\because a \subset \gamma$ 且 $b \subset \gamma$,

$\therefore a \parallel b$.

$\therefore a \parallel \beta$,

$\therefore a$ 与 β 无公共点.

又 $a \subset \alpha$,

$\therefore a$ 与 β 无公共点.

$\therefore a \parallel \beta$.

6. 解: 平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.

证明如下:

$\because AB$ 与 l 不平行, 且 $AB \subset \alpha, l \subset \alpha$,

$\therefore AB$ 与 l 是相交直线.

设 $AB \cap l = P$, 则点 $P \in AB$, 点 $P \in l$.

又 $\because AB \subset$ 平面 $ABC, l \subset \beta$,

$\therefore P \in$ 平面 ABC 且 $P \in$ 平面 β ,

即点 P 是平面 ABC 与平面 β 的一个公共点,

而点 C 也是平面 ABC 与平面 β 的一个公共点,

又 $\because P, C$ 不重合,

$\therefore$ 直线 PC 就是平面 ABC 与平面 β 的交线,

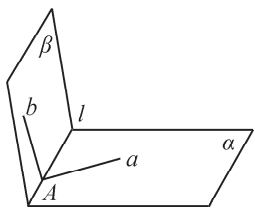
即平面 $ABC \cap$ 平面 $\beta =$ 直线 PC .

又直线 $PC \cap l = P$,

$\therefore$ 平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.

易错辨析

1. D 解析: 对于 A, 空间中两条不相交的直线有两种可能, 一种是平行(共面), 另一种是异面, 所以 A 应排除; 对于 B, 分别位于两个不同平面内的两条直线, 既可能平行也可能相交也可能异面, 下图是相交的情况, 所以 B 应排除; 对于 C, 下图中的 a 可以看作是平面 α 内的一条直线, b 可以看作是平面 α 外的一条直线, 显然它们是相交直线, 所以 C 应排除; 只有 D 符合定义.



2. C 解析: 分别在两个平行平面内的两条直线没有公共点, 所以可能平行, 也可能异面, C 正确.

小测试(二十六) 直线与直线平行

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\times$ (3) $\checkmark$

2. D 3. C

基础过关

1. D 解析: 可能相交也可能异面, 但一定不平行(否则与条件矛盾). 故选 D.

2. B 解析: 由等角定理知, 这两个三角形的三个角分别对应相等, 所以这两个三角形相似.

3. A 解析: $\because E, F$ 分别是 SN, SP 的中点, $\therefore EF \parallel PN$. 同理可证 $HG \parallel PN$. $\therefore EF \parallel HG$. 故选 A.

4. B 解析: 因为 E, F 分别是 B_1O, C_1O 的中点, 所以 $EF \parallel B_1C_1$. 又因为长方体的各棱所在的直线中与直线 B_1C_1 平行的有 AD, BC, A_1D_1 这 3 条, 所以共有 4 条直线与 EF 平行.

5. D 解析: 对于 A 选项, 由基本事实 4 易得 $MQ \parallel NP$, 所以 M, N, P, Q 四点共面, 故 A 正确; 对于 B 选项, 根据等角定理, 得 $\angle QME = \angle DBC$, 故 B 正确; 对于 C 选项, 由等角定理, 知 $\angle QME = \angle DBC, \angle MEQ = \angle BCD$, 所以 $\triangle BCD \sim \triangle MEQ$; 故 C 正确; 由三角形中位线的性质知 $MQ \parallel BD, MQ = \frac{1}{2}BD, NP \parallel BD, NP = \frac{1}{2}BD$, 所以 $MQ \parallel NP$. 所以四边形 $MNPQ$ 为平行四边形, 故 D 不正确. 故选 D.

6. 135° 解析: 由空间中的等角定理可知 $\beta = 180^\circ - \alpha = 135^\circ$.

7. 平行 解析: 因为 $AE : EB = AF : FC$, 所以 $AE : AB = AF : AC$. 又 $\angle EAF = \angle BAC$, 所以 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, 所以 $\angle AEF = \angle ABC$, 所以 $EF \parallel BC$. 又在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BC \parallel B_1C_1$, 所以 $EF \parallel B_1C_1$.

8. 证明: 因为 F 为 BB_1 的中点,

$$\text{所以 } BF = \frac{1}{2}BB_1.$$

因为 G 为 DD_1 的中点,

$$\text{所以 } D_1G = \frac{1}{2}DD_1.$$

又 $BB_1 \parallel DD_1, BB_1 = DD_1$,

所以 $BF \parallel D_1G, BF = D_1G$.

所以四边形 D_1GBF 为平行四边形.

所以 $D_1F \parallel GB$.

同理可证, $D_1E \parallel GC$.

所以 $\angle BGC$ 与 $\angle FD_1E$ 的对应边平行且方向相同,

所以 $\angle BGC = \angle FD_1E$.

素养提升

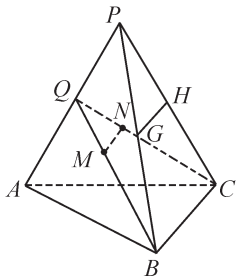
1. C 解析:由题意可知 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的两条边分别对应平行,所以 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 相等或互补,故选 C.

2. C 解析:由题意结合三角形中位线的性质,可得, $FH \parallel PA, GJ \parallel PA$,由基本事实 4 可得 $FH \parallel GJ$.

3. D 解析:连接 AC ,因为 E, F 分别为 AB, BC 的中点,所以 $EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2} AC$. 因为 $\frac{DH}{HA} = \frac{2}{1}$, $\frac{DG}{GC} = \frac{2}{1}$,所以 $\frac{DH}{HA} = \frac{DG}{GC}$. 所以 $GH \parallel AC, HG = \frac{2}{3} AC$. 所以 $EF \parallel HG$ 且 $EF \neq HG$. 所以四边形 $EFGH$ 为梯形.

4. $\frac{4}{9}$ 解析:由 $\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O} = \frac{CO}{C'O} = \frac{2}{3}$,可得 $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C', BC \parallel B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$. 结合空间中的等角定理可得 $\angle CAB = \angle C'A'B', \angle ACB = \angle A'C'B'$. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. $\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

5. 证明:如图,取 PA 的中点 Q ,连接 BQ, CQ , 则 M, N 分别在 BQ, CQ 上.



$\because M, N$ 分别为 $\triangle PAB, \triangle PAC$ 的重心,

$\therefore \frac{QM}{MB} = \frac{QN}{CN} = \frac{1}{2}$, 则 $MN \parallel BC$.

又 G, H 分别为 PB, PC 的中点,

$\therefore GH \parallel BC$.

$\therefore GH \parallel MN$.

6. 证明:(1)连接 BD, B_1D_1 , 如图所示.

在 $\triangle ABD$ 中,因为 E, F 分别为 AB, AD 的中点, 所以 $EF \parallel BD$ 且 $EF = \frac{1}{2} BD$.

同理 $E_1F_1 \parallel B_1D_1$ 且 $E_1F_1 = \frac{1}{2} B_1D_1$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,易知 $DD_1 \parallel BB_1$, 所以四边形 BDD_1B_1 是平行四边形.

所以 $BD \parallel B_1D_1$.

所以 $EF \parallel E_1F_1$.

(2)取 A_1B_1 的中点 M ,连接 BM, F_1M , 如图所示.

易知 $MF_1 \parallel B_1C_1, B_1C_1 \parallel BC$,

所以 $MF_1 \parallel BC$.

所以四边形 BCF_1M 是平行四边形.

所以 $MB \parallel CF_1$.

易知 $A_1M \parallel EB$,

所以四边形 $EBMA_1$ 是平行四边形.

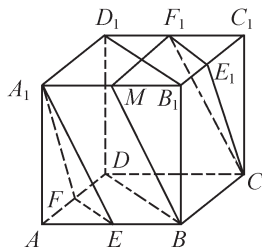
所以 $A_1E \parallel MB$.

所以 $A_1E \parallel CF_1$.

同理可证, $A_1F \parallel E_1C$.

又 $\angle EA_1F$ 与 $\angle F_1CE_1$ 两边的方向均相反,

所以 $\angle EA_1F = \angle E_1CF_1$.



易错辨析

D 解析:另一组对应边可能平行,也可能不平行, 还可能垂直, 故选 D.

小测试(二十七) 直线与平面平行

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$ (4) $\times$

2. C 3. ACD

基础过关

1. D 解析:由题意可知直线 a 与平面 α 无公共点,所以 a 与 b 平行或异面. 所以 a 与 b 无公共点. 故选 D.

2. C 解析: $\because \frac{AE}{CE} = \frac{BF}{FC}, \therefore EF \parallel AB$. 又 $EF \subset$ 平面 $EFGH, AB \not\subset$ 平面 $EFGH, \therefore AB \parallel$ 平面 $EFGH$. 同理, 由 $\frac{BF}{FC} = \frac{BG}{GD}$, 可证 $CD \parallel$ 平面 $EFGH$. $\therefore$ 图中与平面 $EFGH$ 平行的直线有 2 条, 故选 C.

3. A 解析:因为直线 $l \parallel$ 平面 α , 所以根据直线与平面平行的性质定理知 $l \parallel a, l \parallel b, l \parallel c, \dots$, 所以 $a \parallel b \parallel c \parallel \dots$.

4. ABC 解析:由题意知, OM 是 $\triangle BPD$ 的中位线, $\therefore OM \parallel PD$, 故 A 正确; $PD \subset$ 平面 $PCD, OM \not\subset$ 平面 $PCD, \therefore OM \parallel$ 平面 PCD , 故 B 正确; 同理可得 $OM \parallel$ 平面 PDA , 故 C 正确; OM 与平面 PBA 相交, 故 D 不正确. 故选 ABC.

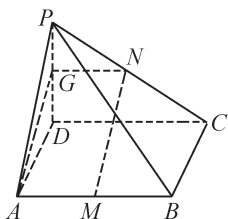
5. C 解析:因为 $AB = BC = CD = DA = 2$, 所以四边

形 $ABCD$ 是菱形. 所以 $CD \parallel AB$. 又 $CD \not\subset$ 平面 SAB , $AB \subset$ 平面 SAB , 所以 $CD \parallel$ 平面 SAB . 又 $CD \subset$ 平面 $CDEF$, 平面 $CDEF \cap$ 平面 $SAB = EF$, 所以 $CD \parallel EF$. 所以 $EF \parallel AB$. 又因为 E 为 SA 的中点, 所以 $EF = \frac{1}{2}AB = 1$. 因为 $\triangle SAD$ 和 $\triangle SBC$ 都是等边三角形, 所以 $DE = CF = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$. 所以四边形 $DEFC$ 的周长为 $CD + DE + EF + FC = 3 + 2\sqrt{3}$. 故选 C.

6. 平行 解析: $\because M, N$ 分别是 BF, BC 的中点, $\therefore MN \parallel CF$. $\because$ 四边形 $CDEF$ 为矩形, $\therefore CF \parallel DE$. $\therefore MN \parallel DE$. 又 $MN \not\subset$ 平面 ADE , $DE \subset$ 平面 ADE , $\therefore MN \parallel$ 平面 ADE .

7. 5 解析: 因为 $AB \parallel$ 平面 α , $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $\alpha = MN$, 所以 $AB \parallel MN$. 又点 M 是 AD 的中点, 所以 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线. 故 $MN = 5$.

8. 证明: 如图, 取 PD 的中点 G , 连接 GA, GN .



$\because G, N$ 分别是 $\triangle PDC$ 的边 PD, PC 的中点,

$\therefore GN \parallel DC, GN = \frac{1}{2}DC$.

$\because M$ 为平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 的中点,

$\therefore AM = \frac{1}{2}DC, AM \parallel DC$.

$\therefore AM \parallel GN, AM = GN$.

$\therefore$ 四边形 $AMNG$ 为平行四边形.

$\therefore MN \parallel AG$.

又 $\because MN \not\subset$ 平面 $PAD, AG \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 PAD .

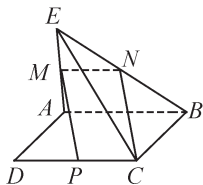
素养提升

1. A 解析: 因为棱 AB 在平面 ABP 内, 所以只要与棱 AB 平行的棱都满足题意, 即棱 A_1B_1, D_1C_1, DC . 故选 A.
2. D 解析: 因为 $BD \parallel$ 平面 $EFGH$, $BD \subset$ 平面 ABD , $BD \subset$ 平面 BCD , 平面 $EFGH \cap$ 平面 $ABD = EH$, 平面 $EFGH \cap$ 平面 $BCD = FG$, 所以 $BD \parallel EH, BD \parallel FG$. 则 $AE : EB = AH : HD$, 且 $BF : FC = DG : GC$. 故选 D.
3. B 解析: 因为 $GH \parallel$ 平面 SCD , $GH \subset$ 平面 SBD , 平面 $SBD \cap$ 平面 $SCD = SD$, 所以 $GH \parallel SD$. 显然

GH 与 SA, SC 均不平行. 故选 B.

4. $\sqrt{2}$ 解析: $\because EF \parallel$ 平面 $AB_1C, EF \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $AB_1C = AC, \therefore EF \parallel AC$. $\because E$ 为 AD 的中点, $\therefore EF = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$.

5. 解: 存在点 M , 如图, 当点 M 是线段 AE 的中点时, $PM \parallel$ 平面 BCE . 证明如下:



取 BE 的中点 N , 连接 CN, MN ,

则 $MN \parallel AB$ 且 $MN = \frac{1}{2}AB$.

又 $PC \parallel AB$ 且 $PC = \frac{1}{2}AB$,

所以 $MN \parallel PC$ 且 $MN = PC$.

所以四边形 $MNCP$ 为平行四边形.

所以 $PM \parallel CN$.

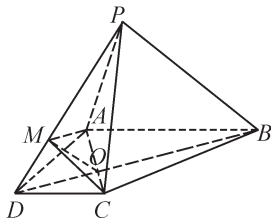
因为 $PM \not\subset$ 平面 $BCE, CN \subset$ 平面 BCE ,

所以 $PM \parallel$ 平面 BCE .

6. (1) 证明: $\because CD \parallel AB, CD \not\subset$ 平面 $PAB, AB \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore CD \parallel$ 平面 PAB .

(2) 解: 如图, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 MO .



$\because PB \parallel$ 平面 MAC , 且 $PB \subset$ 平面 PBD , 平面 $PBD \cap$ 平面 $MAC = MO$,

$\therefore PB \parallel MO$.

$\therefore \frac{PM}{MD} = \frac{OB}{OD}$.

$\because CD \parallel AB$, 易得 $\triangle COD \sim \triangle AOB$,

$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = 2$.

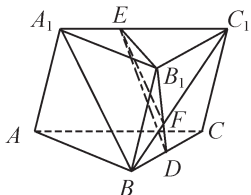
$\therefore \frac{PM}{MD} = 2$.

易错辨析

1. A 解析: 对于①, 虽然直线 l 与平面 α 内的无数条直线平行, 但 l 可能在平面 α 内, 所以 l 不一定平行于 α , 所以①错误; 对于②, 因为直线 a 在平面 α 外, 包括两种情况: $a \parallel \alpha$ 和 a 与 α 相交, 所以 a 和 α 不

一定平行,所以②错误;对于③,因为直线 $a \parallel b, b \subset \alpha$,只能说明 a 和 b 无公共点,但 a 可能在平面 α 内,所以 a 不一定平行于平面 α ,所以③错误;对于④,因为 $a \parallel b, b \subset \alpha$,所以 $a \subset \alpha$ 或 $a \parallel \alpha$. 所以 a 与平面 α 内的无数条直线平行,所以④正确. 综上所述,正确说法的个数为 1.

2. $\frac{1}{2}$ 解析:如图,连接 BC_1 交 B_1D 于点 F ,连接 EF .



因为平面 $A_1BC_1 \cap$ 平面 $B_1DE = EF, A_1B \parallel$ 平面 B_1DE , 所以 $A_1B \parallel EF$. 所以 $\frac{A_1E}{EC_1} = \frac{BF}{FC_1}$. 因为 $BC \parallel B_1C_1$, 所以 $\triangle BDF \sim \triangle C_1B_1F$. 所以 $\frac{BF}{C_1F} = \frac{BD}{C_1B_1}$. 因为 D 是 BC 的中点, 所以 $\frac{BD}{C_1B_1} = \frac{1}{2}$. 所以 $\frac{A_1E}{EC_1} = \frac{1}{2}$.

小测试(二十八) 平面与平面平行

预习自评

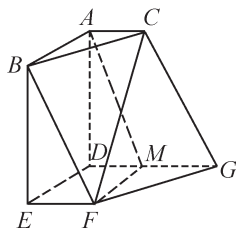
1. (1)✓ (2)× (3)×

2. D 3. B

基础过关

1. C 解析:因为平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 直线 $l \parallel \alpha$, 所以 $l \parallel \beta$ 或 $l \subset \beta$. 故选 C.
2. D 解析:因为 a 是平面 α 外的一条直线, 所以 $a \parallel \alpha$ 或 a 与 α 相交. 当 $a \parallel \alpha$ 时, 平面 β 只有一个; 当 a 与 α 相交时, 平面 β 不存在. 故选 D.
3. A 解析:根据面面平行的性质定理, 可知四条直线两两相互平行. 故选 A.
4. A 解析:在平面 E_1FG_1 与平面 EGH_1 中, 易知 $E_1G_1 \parallel EG, E_1G_1 \not\subset$ 平面 $EGH_1, EG \subset$ 平面 EGH_1 , 所以 $E_1G_1 \parallel$ 平面 EGH_1 . 同理 $FG_1 \parallel$ 平面 EGH_1 . 又 $E_1G_1 \cap FG_1 = G_1$, 所以平面 $E_1FG_1 \parallel$ 平面 EGH_1 . 故选 A.
5. A 解析:如图所示, 取 DG 的中点 M , 连接 AM, FM . 则由已知条件易证得四边形 $DEFM$ 是平行四边形, 所以 $DE \parallel FM$ 且 $DE = FM$. 因为平面 $ABC \parallel$ 平面 $DEFG$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $ADEB = AB$, 平面 $DEFG \cap$ 平面 $ADEB = DE$, 所以 $AB \parallel DE$. 所以 $AB \parallel FM$. 又 $AB = DE$, 所以 $AB = FM$. 所以四

边形 $ABFM$ 是平行四边形. 所以 $BF \parallel AM$. 又 $BF \not\subset$ 平面 $ACGD, AM \subset$ 平面 $ACGD$, 所以 $BF \parallel$ 平面 $ACGD$. 故选 A.



6. 平行 解析: $\because E, F$ 分别是 SB, SC 的中点, $\therefore EF$ 是 $\triangle SBC$ 的中位线. $\therefore EF \parallel BC$. 又 $\because BC \subset$ 平面 $ABC, EF \not\subset$ 平面 $ABC, \therefore EF \parallel$ 平面 ABC . 同理可证 $DE \parallel$ 平面 ABC . $\therefore EF \cap DE = E, \therefore$ 平面 $DEF \parallel$ 平面 ABC .

7. $\frac{4}{25}$ 解析: $\because$ 平面 $\alpha \parallel$ 平面 $ABC, \therefore AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', AC \parallel A'C'$. $\therefore \triangle PAB \sim \triangle PA'B',$ 由等角定理得 $\angle ABC = \angle A'B'C', \angle BCA = \angle B'C'A', \angle CAB = \angle C'A'B', \therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. 又 $\because \triangle PAB \sim \triangle PA'B', PA' : AA' = 2 : 3, \therefore \frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PA} = \frac{2}{5}, \therefore \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

8. 证明: (1) 由题可知 $D_1Q \parallel DB$.

$\because D_1Q \not\subset$ 平面 $C_1DB, DB \subset$ 平面 $C_1DB,$

$\therefore D_1Q \parallel$ 平面 C_1DB .

(2) 由题可知 $D_1P \parallel C_1B$.

$\because D_1P \not\subset$ 平面 $C_1DB, C_1B \subset$ 平面 $C_1DB,$

$\therefore D_1P \parallel$ 平面 C_1DB .

由(1)知, $D_1Q \parallel$ 平面 C_1DB .

又 $D_1Q \cap D_1P = D_1,$

$\therefore$ 平面 $D_1PQ \parallel$ 平面 C_1DB .

素养提升

1. C 解析:根据图 1 和图 2 可知, α 与 β 平行或相交. 故选 C.

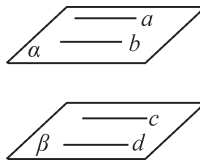


图 1

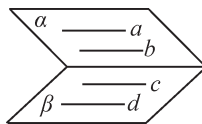
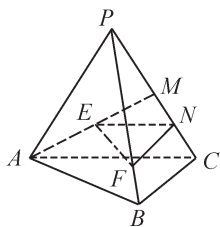


图 2

2. C 解析:平行于同一直线的两直线是平行的, 故①正确; 两条直线同时平行于一平面, 这两条直线可能相交、平行或异面, 故②错误; 两平面同时平行于一直线, 这两个平面可能相交或平行, 故③错误; 平行于同一个平面的两个平面是平行的, 故④正确; 直线 a 和平面 α 同时平行于直线 c , 则 $a \parallel \alpha$ 或

$a \subset \alpha$, 故⑤错误; 直线 a 和平面 α 同时平行于平面 γ , 则 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故⑥错误. 故选 C.

3. A 解析: 如图, 取 MC 的中点 N , 连接 EN, FN , 可知 $EN \parallel AC$. 因为 $EN \not\subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $EN \parallel$ 平面 ABC . 又 $EF \parallel$ 平面 ABC , $EF \cap EN = E$, 所以平面 $ENF \parallel$ 平面 ABC . 又平面 $ENF \cap$ 平面 $PBC = FN$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $PBC = BC$, 所以 $FN \parallel BC$. 又 M 为 PC 的中点, N 为 MC 的中点, 所以 $\frac{BF}{FP} = \frac{CN}{NP} = \frac{1}{3}$.



4. 2 1:2 解析: 设平面 $AB_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = m$. 因为 $EF \parallel$ 平面 AB_1C , $EF \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 平面 $AB_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = m$, 所以 $EF \parallel m$. 因为平面 $A_1B_1C_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, 平面 $AB_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = m$, 平面 $AB_1C \cap$ 平面 $ABCD = AC$, 所以 $m \parallel AC$. 所以 $EF \parallel AC$. 连接 A_1C_1 . 因为 $A_1C_1 \parallel AC$, 所以 $EF \parallel A_1C_1$. 又 E 为 A_1D_1 的中点, 所以 $EF = \frac{1}{2}A_1C_1 = 2$. 当 H 为 DD_1 的中点, 即 $DH : DD_1 = 1 : 2$ 时, 由平面与平面平行的判定定理, 可得平面 $EFH \parallel$ 平面 AB_1C .

5. 证明: $\because E, G$ 分别是 PC, BC 的中点,
 $\therefore EG \parallel PB$.
 又 $\because EG \not\subset$ 平面 $PAB, PB \subset$ 平面 PAB ,
 $\therefore EG \parallel$ 平面 PAB .
 $\because E, F$ 分别是 PC, PD 的中点,
 $\therefore EF \parallel CD$.
 又 $AB \parallel CD$,
 $\therefore EF \parallel AB$.
 又 $\because EF \not\subset$ 平面 $PAB, AB \subset$ 平面 PAB ,
 $\therefore EF \parallel$ 平面 PAB .
 又 $EF \cap EG = E, EF, EG \subset$ 平面 EFG ,
 $\therefore$ 平面 $PAB \parallel$ 平面 EFG .
 6. 证明: 因为 D, E 分别是 PA, PB 的中点,
 所以 $DE \parallel AB$.
 又 $DE \not\subset$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC ,
 所以 $DE \parallel$ 平面 ABC .
 同理可证 $DF \parallel$ 平面 ABC .
 又 $DE \cap DF = D, DE, DF \subset$ 平面 DEF ,
 所以平面 $DEF \parallel$ 平面 ABC .
 又平面 $PCM \cap$ 平面 $DEF = NF$, 平面 $PCM \cap$ 平面

$ABC = CM$,
 所以 $NF \parallel CM$.

易错辨析

C 解析: $\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \text{ 与 } \gamma \text{ 无公共点} \\ \beta \parallel \gamma \Rightarrow \beta \text{ 与 } \gamma \text{ 无公共点} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 无公共点} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$. 故选 C.

小测试(二十九) 直线与直线垂直

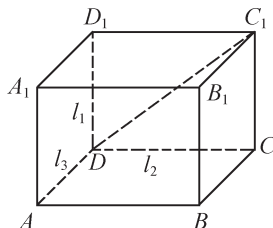
预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$

2. D 3. D

基础过关

1. D 解析: 如图, 构建长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.



记 DD_1 所在直线为 l_1 , DC 所在直线为 l_2 , DA 所在直线为 l_3 , 满足 $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3$.

若 AA_1 所在直线为 l_4 , 满足 $l_3 \perp l_4$, 此时 $l_1 \parallel l_4$;

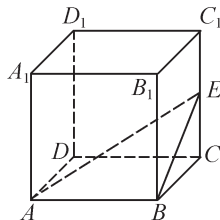
若 C_1D 所在直线为 l_4 , 满足 $l_3 \perp l_4$, 此时 l_1 与 l_4 相交;

若 BA 所在直线为 l_4 , 满足 $l_3 \perp l_4$, 此时 l_1 与 l_4 异面;

若 C_1D_1 所在直线为 l_4 , 满足 $l_3 \perp l_4$, 此时 l_1 与 l_4 相交且垂直. 因此 l_1 与 l_4 的位置关系不能确定. 故选 D.

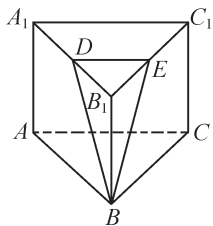
2. C 解析: 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $CD \parallel AB$, 所以异面直线 AE 与 CD 所成的角即为 $\angle EAB$. 设正方体的边长为 $2a$, 则由 E 为棱 CC_1 的中点, 可得 $CE = a$, 所以 $BE = \sqrt{5}a$. 易知 $AB \perp$

BE , 则 $\tan \angle EAB = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{5}a}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

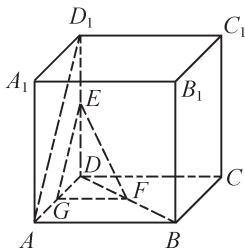


3. C 解析: 如图, 取 B_1C_1 的中点 E , 连接 BE, DE , 则 $DE \parallel A_1C_1$. 因为 $AA_1 \parallel CC_1$, 所以四边形 ACC_1A_1 为平行四边形, 则 $AC \parallel A_1C_1$. 所以 $AC \parallel DE$. 所以 $\angle BDE$ (或其补角) 即为异面直线 BD 与 AC 所成的角. 由已知可得 $BD = DE = BE = \sqrt{2}$, 所以

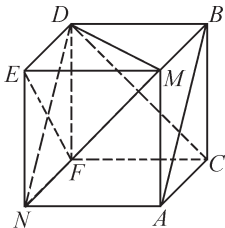
$\angle BDE = 60^\circ$. 所以异面直线 BD 与 AC 所成的角为 60° . 故选 C.



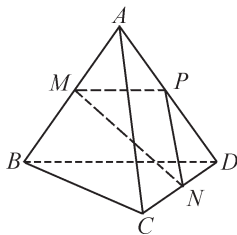
4. C 解析: 如图, 取 AD 的中点 G , 连接 EG, GF , 则 $\angle GEF$ (或其补角) 为异面直线 AD_1 与 EF 所成的角. 设正方体的棱长为 2, 则 $EG = \sqrt{2}, GF = 1, EF = \sqrt{3}$, 所以 $\cos \angle GEF = \frac{GE^2 + EF^2 - GF^2}{2EG \cdot EF} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 C.



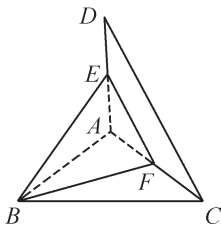
5. C 解析: 画出原正方体, 如图所示, 连接 DN, DM . 由图可知①②错误; $AB \parallel DN, MN = DN = DM$, 所以 $\triangle DMN$ 为等边三角形, 所以 AB 与 MN 所成的角为 60° , 即③正确; 显然 MN 与 EF 异面, 即④正确.



6. 60° 解析: 因为 E, F, G 分别是 AB, BC, AD 的中点, 所以 $EG \parallel BD, EF \parallel AC$, 所以 $\angle GEF$ (或其补角) 为异面直线 AC 与 BD 所成的角. 又 $\angle GEF = 120^\circ$, 所以异面直线 BD 与 AC 所成的角为 60° .
7. 5 解析: 如图, 取 AD 的中点 P , 连接 PM, PN , 则 $PM \parallel BD, PM = \frac{1}{2} BD = 3, PN \parallel AC, PN = \frac{1}{2} AC = 4$, 所以 $\angle MPN$ (或其补角) 即为异面直线 AC 与 BD 所成的角, 所以 $\angle MPN = 90^\circ$. 所以 $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = 5$.



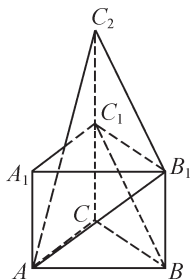
8. 解: 如图, 取 AC 的中点 F , 连接 EF, BF . 在 $\triangle ACD$ 中, E, F 分别是 AD, AC 的中点, $\therefore EF \parallel CD$. $\therefore \angle BEF$ (或其补角) 即为所求的异面直线 BE 与 CD 所成的角.



- 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{2}, AB = AC$, $\therefore AB = AC = 1$.
- 在 $\text{Rt} \triangle EAB$ 中, $AB = 1, AE = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2}$, $\therefore BE = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- 在 $\text{Rt} \triangle AEF$ 中, $AF = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}, AE = \frac{1}{2}$, $\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 在 $\text{Rt} \triangle ABF$ 中, $AB = 1, AF = \frac{1}{2}$, $\therefore BF = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- 在等腰 $\triangle EBF$ 中, $\cos \angle BEF = \frac{\frac{1}{2} EF}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.
- $\therefore$ 异面直线 BE 与 CD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

素养提升

1. A 解析: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $l \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 且 l 与 B_1C_1 不平行, 又 $\because AD \parallel B_1C_1, \therefore l$ 必与直线 AD 不平行.
2. C 解析: 设 $BB_1 = 1$, 如图, 延长 CC_1 至 C_2 使 $C_1C_2 = CC_1 = 1$, 连接 B_1C_2, AC_2 , 则 $B_1C_2 \parallel BC_1$. 所以 $\angle AB_1C_2$ (或其补角) 为 AB_1 与 BC_1 所成的角, 易知 $AB_1 = \sqrt{3}, B_1C_2 = \sqrt{3}, AC_2 = \sqrt{6}$, 所以 $AC_2^2 = AB_1^2 + B_1C_2^2$, 则 $\angle AB_1C_2 = 90^\circ$. 故选 C.

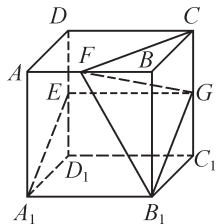


3. C 解析: 设正方体的棱长为 1, $DP = x$, 则 $x \in [0, 1]$, 连接 AD_1 , AP . 由 $AD_1 \parallel BC_1$ 可知, $\angle AD_1P$ (或其补角) 即为异面直线 D_1P 与 BC_1 所成的角. 在 $\triangle AD_1P$ 中, $AD_1 = \sqrt{2}$, $AP = D_1P = \sqrt{1+x^2}$, 故 $\cos \angle AD_1P = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+x^2}}$. 又 $\because x \in [0,$

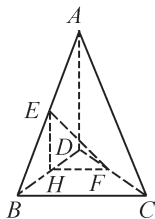
$1]$, $\therefore \cos \angle AD_1P = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+x^2}} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. 又

$\angle AD_1P \in (0, \pi)$, $\therefore \angle AD_1P \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$. 故选 C.

4. 90° 解析: 如图, 连接 CF , EG , GB_1 , FB_1 . 易得 $A_1B_1 \parallel EG$, 所以四边形 A_1B_1GE 为平行四边形. 所以 $A_1E \parallel B_1G$, 则 $\angle FGB_1$ (或其补角) 是异面直线 A_1E 与 GF 所成的角. 易知 $FB_1 = \sqrt{5}$, $GB_1 = \sqrt{2}$, $GF = \sqrt{CG^2 + CF^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, 所以 $FB_1^2 = GF^2 + GB_1^2$. 所以 $\angle FGB_1 = 90^\circ$, 即异面直线 A_1E 与 GF 所成角的大小为 90° .



5. 证明: 取 BD 的中点 H , 连接 EH , FH , 如图所示.



因为 E 是 AB 的中点, $AD = 2$,

所以 $EH \parallel AD$, $EH = 1$.

同理可得 $FH \parallel BC$, $FH = 1$.

所以 $\angle EHF$ (或其补角) 是异面直线 AD 与 BC 所成的角.

因为 $EF = \sqrt{2}$,

所以 $EF^2 = FH^2 + EH^2$.

所以 $\triangle EFH$ 是等腰直角三角形, EF 是斜边.

所以 $\angle EHF = 90^\circ$, 即 AD 与 BC 所成的角是 90° .

故 $AD \perp BC$.

6. (1) 解: 如图, 连接 AC , AB_1 .

由几何体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, 得 $AA_1 \parallel CC_1$.

故四边形 AA_1C_1C 为平行四边形.

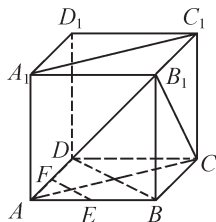
所以 $A_1C_1 \parallel AC$.

所以 $\angle B_1CA$ (或其补角) 为异面直线 A_1C_1 与 B_1C 所成的角.

易知 $AB_1 = CB_1 = AC$,

所以 $\angle B_1CA = 60^\circ$.

故异面直线 A_1C_1 与 B_1C 所成的角为 60° .



(2) 证明: 如图, 连接 BD .

由 (1) 知 $A_1C_1 \parallel AC$,

所以 AC 与 EF 所成的角就是异面直线 A_1C_1 与 EF 所成的角.

因为 E, F 分别为 AB, AD 的中点,

所以 $EF \parallel BD$.

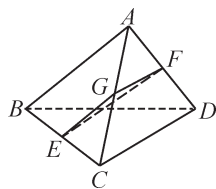
在正方形 $ABCD$ 中, $BD \perp AC$,

所以 $EF \perp AC$.

所以 $A_1C_1 \perp EF$.

易错辨析

15° 或 75° 解析: 如图所示, 取 AC 的中点 G , 连接 EG, FG .



则 $EG \parallel AB$ 且 $EG = \frac{1}{2} AB$, $GF \parallel CD$ 且 $GF =$

$\frac{1}{2} CD$. 又 $AB = CD$, 所以 $EG = FG$. 易知 $\angle GEF$ (或其补角) 为 EF 与 AB 所成的角, $\angle EGF$ (或其补角) 为 AB 与 CD 所成的角. 因为 AB 与 CD 所成的角为 30° , 所以 $\angle EGF = 30^\circ$ 或 150° . 当 $\angle EGF = 30^\circ$ 时, $\angle GEF = 75^\circ$; 当 $\angle EGF = 150^\circ$ 时, $\angle GEF = 15^\circ$. 故 EF 与 AB 所成角的大小为 15° 或 75° .

小测试(三十) 直线与平面垂直

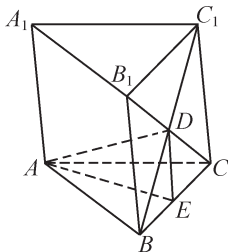
预习自评

1. (1)× (2)✓ (3)✓

2. A 3. C

基础过关

1. B 解析: 因为直线 $B_1B \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 直线 $l \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 直线 l 与直线 B_1B 不重合, 所以 $B_1B \parallel l$. 故选 B.
2. B 解析: 若 $m \perp n, m \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 n 与 β 相交, $n \parallel \beta$ 或 $n \subset \beta$, 故①错误; 若 $m \perp n, m \perp \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $n \parallel \beta$ 或 $n \subset \beta$, 故②错误; 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$, 故③正确; 若 $m \perp \alpha, m \parallel n, \alpha \parallel \beta$, 则 $n \perp \beta$, 故④正确. 故选 B.
3. A 解析: 易知 $\angle ABO$ 是斜线段 AB 与平面 α 所成的角, 且在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $AB=2BO$, $\therefore \cos \angle ABO = \frac{1}{2}$, 即 $\angle ABO=60^\circ$. 故选 A.
4. C 解析: 如图, 取 BC 的中点 E , 连接 DE, AE . 由题知, D 是 BC_1 的中点, 所以 $DE \parallel CC_1$, $DE = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{3}{2}$. 由题知, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $DE \perp$ 平面 ABC . 易知 AE 是斜线 AD 在底面 ABC 上的射影, 所以 $\angle DAE$ 为直线 AD 与底面 ABC 所成的角. 在正三角形 ABC 中, $AE=\sqrt{3}$, 所以直线 AD 与底面 ABC 所成角的正切值为 $\frac{DE}{AE} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.



5. A 解析: 因为 $AD \perp DF, AB \perp BE$, 所以折起后 $AH \perp FH, AH \perp EH$. 又 $FH \cap EH = H, FH, EH \subset$ 平面 EFH , 所以 $AH \perp$ 平面 EFH . 故选 A.
6. 6 解析: 因为 $AF \perp$ 平面 $ABCD, DE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $AF \parallel DE$. 又 $AF=DE$, 所以四边形 $AFED$ 是平行四边形. 所以 $EF=AD=6$.
7. 4 解析: $\because PA \perp$ 平面 $ABCD, BC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BC$. 又 $BC \perp AB, PA \cap AB = A, PA, AB \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp$ 平面 PAB . 又 $PB \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp PB$. 同理可得 $CD \perp PD$. $\therefore \triangle APB, \triangle APD, \triangle PBC, \triangle PDC$ 均为直角三角形. 故图中共有 4 个直角三角形.

8. (1)证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AC \perp BD.$$

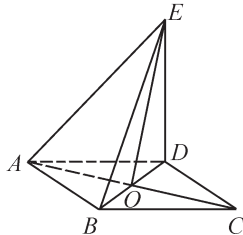
$$\because DE \perp \text{平面 } ABCD, AC \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore AC \perp DE.$$

$$\because BD, DE \subset \text{平面 } BDE, BD \cap DE = D,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面 } BDE.$$

(2)解: 设 $AC \cap BD = O$, 连接 EO , 如图所示.



$$\because AC \perp \text{平面 } BDE,$$

$$\therefore EO \text{ 是直线 } AE \text{ 在平面 } BDE \text{ 上的射影},$$

$$\therefore \angle AEO \text{ 即为 } AE \text{ 与平面 } BDE \text{ 所成的角}.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle EAD \text{ 中}, EA = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 2\sqrt{2},$$

$$AO = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle EOA \text{ 中}, \sin \angle AEO = \frac{AO}{EA} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle AEO = 30^\circ,$$

即 AE 与平面 BDE 所成的角为 30° .

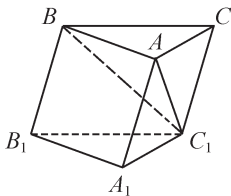
素养提升

1. A 解析: 因为 $AC \perp$ 平面 $\alpha, BD \perp$ 平面 α , 所以 $AC \parallel BD$. 所以 $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$. 因为 $OA=AB$, 所以 $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$. 又因为 $AC=1$, 所以 $BD=2$. 故选 A.
2. A 解析: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $\therefore AD=CD=AB=BC=2$. 则 $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, DO=BO=\sqrt{2}$. 又 $DO \perp AC, DO \perp OB, AC \cap OB=O$, $\therefore DO \perp$ 平面 ABC . 在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中, $BD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$, $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. 则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$. 设点 C 到平面 ABD 的距离为 d , 则 $V_{C-ABD} = V_{D-ABC}$, 即 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot DO$, $\therefore \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times d = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{2}$. 解得 $d = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 即点 C 到平面 ABD 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.

3. B 解析: 由正方体的性质易求得 $\sin \angle C_1OA_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \angle COA_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 因为 $\angle C_1OA_1$ 是锐角,

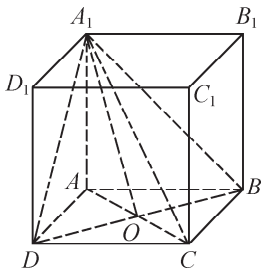
为 60° , 故选 C.

4. A 解析: 如图, 连接 AC_1 . $\because AC \perp AB, AC \perp BC_1$, $\therefore AC \perp$ 平面 ABC_1 . 又 $\because AC \subset$ 平面 ABC , $\therefore$ 平面 $ABC_1 \perp$ 平面 ABC . $\therefore$ 点 C_1 在平面 ABC 上的射影点 H 必在平面 ABC_1 与平面 ABC 的交线 AB 上. 故选 A.



5. C 解析: 由题意及面面垂直的判定定理知, 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , 平面 $PCD \perp$ 平面 PAD , A、B、D 中的结论正确. 故排除 A、B、D, 故选 C.

6. $\sqrt{2}$ 解析: 如图所示, 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 A_1O, A_1C . 由题可知 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AA_1 \perp BD$. 因为底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AC \perp BD$. 又 $AA_1 \cap AC = A$, 所以 $BD \perp$ 平面 A_1AC . 因为 $AO \subset$ 平面 $A_1AC, A_1O \subset$ 平面 A_1AC , 所以 $BD \perp AO, BD \perp A_1O$. 所以 $\angle A_1OA$ 即为二面角 A_1-BD-A 的平面角. 在 $Rt\triangle A_1OA$ 中, 设 $AA_1 = a$, 则 $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 所以二面角 A_1-BD-A 的正切值为 $\frac{AA_1}{AO} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{2}$.



7. 6 解析: $\because CA = CB, O$ 为 AB 的中点, $\therefore CO \perp AB$. 又平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 且交线为 AB , $\therefore CO \perp$ 平面 ABD . $\because OD \subset$ 平面 ABD , $\therefore CO \perp OD$. $\therefore \triangle COD$ 为直角三角形. $\therefore$ 图中的直角三角形有 $\triangle AOC, \triangle COB, \triangle ABC, \triangle AOD, \triangle BOD, \triangle COD$, 共 6 个.

8. (1) 证明: $\because PA \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore PA \perp BC$.

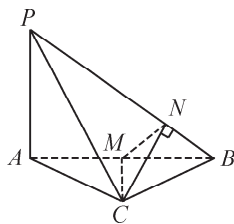
$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore AC \perp BC$.

又 $PA \cap AC = A, PA \subset$ 平面 $PAC, AC \subset$ 平面 PAC , $\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

又 $\because BC \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC .

(2) 解: 如图, 设 M 是 AB 的中点, 过点 C 作 $CN \perp PB$, 交 PB 于点 N , 连接 CM, MN .



在 $\triangle ABC$ 中, $\because AC = BC$,

$\therefore CM \perp AB$.

$\because PA \perp$ 平面 $ABC, PA \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC .

又平面 $PAB \cap$ 平面 $ABC = AB, CM \perp AB, CM \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore CM \perp$ 平面 PAB .

$\therefore CM \perp PB$.

又 $\because PB \perp CN, CM \cap CN = C, CM, CN \subset$ 平面 CMN ,

$\therefore PB \perp$ 平面 CMN .

$\therefore PB \perp MN$.

$\therefore \angle MNC$ 是二面角 $A-PB-C$ 的平面角.

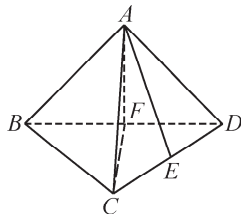
设 $AC = BC = PA = 1$, 易知 $\angle CMN = 90^\circ$.

则在 $Rt\triangle CMN$ 中, $CM = \frac{\sqrt{2}}{2}, CN = \frac{\sqrt{6}}{3}, MN = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

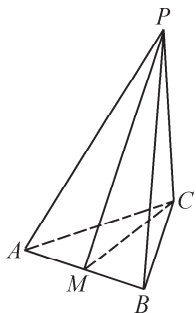
$\therefore \tan \angle MNC = \frac{CM}{MN} = \sqrt{3}$.

素养提升

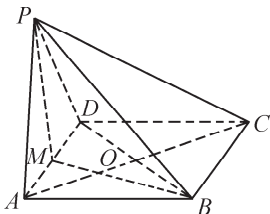
1. A 解析: 如图, 设 $AB = BC = CD = AD = a$, 取 BD 的中点 F , 连接 AF, CF . 由题意可得 $AF = CF = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \angle AFC = 90^\circ$. 在 $Rt\triangle AFC$ 中, 易知 $AC = a$. $\therefore \triangle ACD$ 为正三角形. 又 $\because E$ 是 CD 的中点, $\therefore AE \perp CD. \therefore \angle AED = 90^\circ$. 故选 A.



2. B 解析: 如图, 连接 CM , 则由题意知 $PC \perp$ 平面 ABC , 所以 $PC \perp CM$. 所以 $PM = \sqrt{PC^2 + CM^2}$. 要求 PM 的最小值, 只需求出 CM 的最小值即可. 在 $\triangle ABC$ 中, 当 $CM \perp AB$ 时, CM 有最小值, 此时 $CM = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, 所以 PM 的最小值为 $2\sqrt{7}$. 故选 B.



3. ABC 解析: 对于 A 选项, 如图, 取 AD 的中点 M, 连接 PM, BM, 连接 AC, BD 交于点 O. $\because$ 侧面 PAD 为正三角形, $\therefore PM \perp AD$. 又底面 ABCD 是菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. $\therefore BM \perp AD$. 又 $PM \cap BM = M$, $PM, BM \subset$ 平面 PMB, $\therefore AD \perp$ 平面 PMB, 故 A 正确; 对于 B 选项, $\because AD \perp$ 平面 PMB, $\therefore AD \perp PB$, 即异面直线 AD 与 PB 所成的角为 90° , 故 B 正确; 对于 C 选项, $\because$ 平面 PBC $\cap$ 平面 ABCD = BC, $BC \parallel AD$, $\therefore BC \perp$ 平面 PBM. $\because PB, BM \subset$ 平面 PBM, $\therefore BC \perp PB$, $BC \perp BM$. $\therefore \angle PBM$ 是二面角 P-BC-A 的平面角. 设 $AB=1$, 则 $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $PM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle PMB$ 中, $\tan \angle PBM = \frac{PM}{BM} = 1$, 即 $\angle PBM = 45^\circ$, 故二面角 P-BC-A 的大小为 45° , 故 C 正确; 对于 D 选项, $\because BD$ 与 PA 不垂直, $\therefore BD$ 与平面 PAC 不垂直, 故 D 错误. 故选 ABC.



4. 4 解析: $\because \alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = A'B', AA' \subset \alpha, AA' \perp A'B', \therefore AA' \perp \beta$. 又 $BB' \perp A'B', AA' = 3, BB' = 4, A'B' = 2$, $\therefore V = \frac{1}{3} S_{\triangle A'BB'} \cdot AA' = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times A'B' \times BB') \times AA' = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 3 = 4$.
5. (1) 证明: $\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore$ 平面 $A_1B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $A_1B_1C_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B_1$. $\because CA = C_1A_1, CB = C_1B_1, CA = CB$, 且点 M 是 A_1B_1 的中点, $\therefore C_1M \perp$ 平面 ABB_1A_1 . 又 $\because BN \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore C_1M \perp BN$.

(2) 解: 由题易知 $V_{B_1-BCN} = V_{C-BNB_1}$,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BNB_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

易知点 C 到平面 BNB_1 的距离为 $C_1M = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\therefore V_{B_1-BCN} = V_{C-BNB_1} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}.$$

6. 解: (1) $\because AB \perp AD, CD \parallel AB$,

$$\therefore CD \perp AD.$$

$$\because PA \perp \text{平面 } ABCD, CD \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore PA \perp CD.$$

$$\text{又 } PA \cap AD = A,$$

$$\therefore CD \perp \text{平面 } PAD.$$

$$\text{又 } PD \subset \text{平面 } PAD,$$

$$\therefore CD \perp PD.$$

$$\therefore \angle PDA \text{ 是二面角 } P-CD-B \text{ 的平面角.}$$

$$\because \text{直线 } PB \text{ 与 } CD \text{ 所成的角为 } 45^\circ, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle PBA = 45^\circ, \text{ 易得 } PA = AB.$$

$$\text{又 } AB = AD,$$

$$\therefore PA = AD.$$

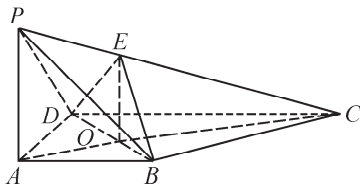
$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle PAD \text{ 中, } \angle PDA = 45^\circ,$$

$$\text{即二面角 } P-CD-B \text{ 的大小为 } 45^\circ.$$

(2) 当点 E 在线段 PC 上, 且满足 $PE : EC = 1 : 2$

时, 平面 $EBD \perp$ 平面 $ABCD$. 理由如下:

如图, 连接 AC 交 BD 于点 O, 连接 EO.



易知 $\triangle AOB \sim \triangle COD$,

$$\text{又 } CD = 2AB,$$

$$\therefore CO = 2AO.$$

$$\therefore PE : EC = AO : CO = 1 : 2.$$

$$\therefore PA \parallel EO.$$

$$\text{又 } PA \perp \text{平面 } ABCD.$$

$$\therefore EO \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$\text{又 } EO \subset \text{平面 } EBD,$$

$$\therefore \text{平面 } EBD \perp \text{平面 } ABCD.$$

易错辨析

1. A 解析: 对于 A, 根据线面垂直的定义可得, 若平面 α 内的一条直线 a 垂直于平面 β 内的任意一条直线, 则 $a \perp \beta$, 进而得 $\alpha \perp \beta$, A 正确; 对于 B, 若直线 a 与平面 β 内的一条直线平行, a 可能在平面 β 内, B 错误; 对于 C, 若直线 a 与平面 β 内的两条直线都垂

直,这两条直线不一定相交, α 与 β 不一定垂直,C错误;对于D,若平面 α 内的两条直线都平行于平面 β ,则 α 与 β 不一定平行,D错误.

2. 60° 或 120° 解析:因为 $PE \perp \alpha$, $PF \perp \beta$,所以 P, E, F 三点确定的平面垂直于 α 和 β .过点 E 作 l 的垂线,垂足为 O ,连接 OF ,易知 $l \perp OF$ 且 P, E, O, F 四点共面,则 $\angle FOE$ 为二面角的平面角.当点 P 的位置如图1所示时, $\angle FOE + \angle EPF = 180^\circ$,所以二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角的大小为 120° .

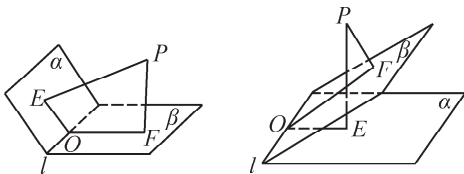


图 1

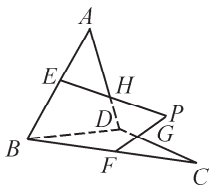
图 2

当点 P 的位置如图2所示时, $\angle FOE = \angle EPF$,所以二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角的大小为 60° .

滚动卷(二) 小测试(十五)至(三十一)

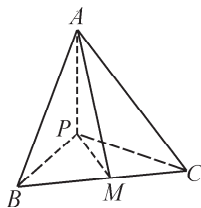
综合拔高

1. B 解析:A选项,若 $l \parallel \alpha, m \parallel l$,则 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$,所以A不正确;B选项,若 $l \perp \alpha, l \perp \beta$,则 $\alpha \perp \beta$,所以B正确;C选项,若 $l \parallel \alpha, m \subset \alpha$,则 l 与 m 平行或异面,所以C不正确;D选项,若 $\alpha \perp \beta, m \parallel \alpha$,则 m 与 β 的位置关系不确定,所以D不正确.故选B.
2. B 解析:如图,连接 EH, FG, BD ,并延长 EH, FG 交于点 P . $\because EH, FG$ 所在直线相交于点 $P, \therefore P \in EH$,且 $P \in FG$. $\because EH \subset$ 平面 $ABD, FG \subset$ 平面 $BCD, \therefore P \in$ 平面 ABD ,且 $P \in$ 平面 BCD .又平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD, \therefore P \in BD$.故选B.



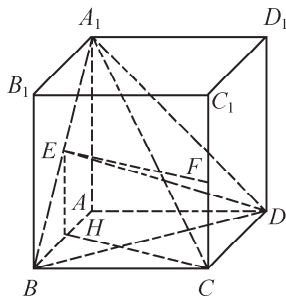
3. D 解析:由条件易得 $MQ \parallel BD, ME \parallel BC, QE \parallel CD, NP \parallel BD$,所以 $MQ \parallel NP$.对于A,由 $MQ \parallel NP$,得 M, N, P, Q 四点共面,故A正确;对于B,根据空间等角定理,得 $\angle QME = \angle CBD$,故B正确;对于C,由空间等角定理,得 $\angle QME = \angle CBD, \angle MEQ = \angle BCD$,所以 $\triangle BCD \sim \triangle MEQ$,故C正确;对于D,没有充分理由推证四边形 $MNPQ$ 为矩形,故D不正确.
4. D 解析:如图,连接 PM ,因为 PA, PB, PC 两两互相垂直,所以 $\angle AMP$ 是直线 AM 与平面 PBC 所成的角.当 PM 最短,即 $PM \perp BC$ 时,直线 AM 与平

面 PBC 所成角的正切值最大,此时 $\frac{AP}{PM} = \sqrt{5}$,
 $PM = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



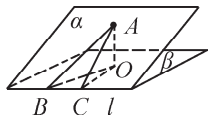
在 $Rt\triangle PBC$ 中, $PB \cdot PC = BC \cdot PM$,则 $4PC = \sqrt{4^2 + PC^2} \times \frac{4\sqrt{5}}{5}$,解得 $PC = 2$.将三棱锥 $P-ABC$ 扩充为长方体,则长方体的体对角线长为 $\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$.故三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $R = 3$,三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$.故选D.

5. ABD 解析:对于A,连接 BD ,如图,易知 $A_1D = BD = A_1B = \sqrt{2}$, $\therefore \triangle A_1DB$ 为等边三角形,又 E 为 BA_1 的中点, $\therefore DE \perp A_1B$,故A正确;对于B,取 AB 的中点 H ,连接 EH, CH ,如图.可知 $EH \parallel FC$,且 $EH = FC$, $\therefore$ 四边形 $EHCF$ 是平行四边形, $\therefore EF \parallel HC$,又 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD, HC \subset$ 平面 $ABCD, \therefore EF \parallel$ 平面 $ABCD$,故B正确;对于C,由B知, $EF \parallel HC$, $\therefore EF$ 与平面 ABB_1A_1 所成角的正切值等于 HC 与平面 ABB_1A_1 所成角的正切值.又 $CB \perp$ 平面 $ABB_1A_1, \therefore \angle CHB$ 为所求的线面角, $\therefore \tan \angle CHB = \frac{BC}{BH} = \frac{2}{1} = 2$,故C错误;对于D,设点 B 到平面 A_1CD 的距离为 h ,利用等体积法知 $V_{\text{三棱锥}A_1-BCD} = V_{\text{三棱锥}B-A_1CD}$,即 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times h$,解得 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$,故D正确.故选ABD.



6. $\sqrt{5} : 2$ 解析:由题意,得两个矩形的对角线长分别为 $5, 2\sqrt{5}$,所以 $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{25+4}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$.所以 $\cos \alpha : \cos \beta = \sqrt{5} : 2$.

7. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 解析:如图,作 $AO \perp \beta$ 于点 O , $AC \perp l$ 于点 C , 连接 OB, OC , 则 $OC \perp l$. 设 AB 与 β 所成的角为 θ , 则 $\angle ABO = \theta$. 由图得 $\sin \theta = \frac{AO}{AB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AO}{AC} = \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



8. 40 解析:由题意,得当 $OM \perp PC$ 时, OM 最小. 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 5\sqrt{2}$, 则 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$. 则 $OC = 5$. 在 $\text{Rt} \triangle OMC$ 中, $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. 设点 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 h , 则 h 也为 $\text{Rt} \triangle OMC$ 的边 OC 上的高. $S_{\triangle OMC} = \frac{1}{2} \times OM \times MC = \frac{1}{2} \times OC \times h$, 即 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times h$, 解得 $h = \frac{12}{5}$. 又 $S_{\text{正方形}ABCD} = (5\sqrt{2})^2 = 50$, $\therefore V_{M-ABCD} = \frac{1}{3} \times 50 \times \frac{12}{5} = 40$.

9. 解:(1)依题意,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 1$,

截去的三棱锥体积为 $V_{A_1-ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$,

所以剩余部分的体积 $V = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - V_{A_1-ABD} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

(2)因为 $B_1C_1 \parallel BC$, 所以 $\angle A_1CB$ (或其补角) 为异面直线 A_1C 与 B_1C_1 所成角.

在 $\text{Rt} \triangle A_1CB$ 中, $\angle A_1BC = 90^\circ$, $A_1C = \sqrt{3}$, $BC = 1$, 则 $\cos \angle A_1CB = \frac{BC}{A_1C} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以异面直线 A_1C 与 B_1C_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. (1) 解:由题易得 $V_{C_1-MNP} = V_{M-C_1NP} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$.

记点 C_1 到平面 MNP 的距离为 d , 在 $\triangle MNP$ 中, $MN = NP = MP = \sqrt{2}$, $\therefore \triangle MNP$ 为正三角形.

$$\therefore S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore d = \frac{3V_{C_1-MNP}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 证明: $\because AA_1 \parallel CC_1$,

$\therefore AA_1$ 与 CC_1 确定平面 AA_1C_1C .

$\because M, E \in$ 平面 AA_1C_1C , 且 $M, E \in$ 平面 MNP ,

$\therefore$ 平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $MNP = ME$.

$\because AC_1 \cap$ 平面 $MNP = F$,

$\therefore F \in$ 平面 MNP , $F \in$ 平面 AA_1C_1C .

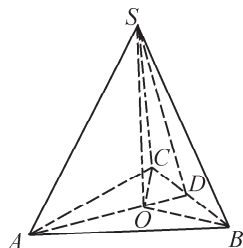
$\therefore$ 点 F 在直线 ME 上.

则 M, E, F 三点共线.

素养提升

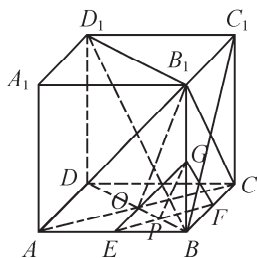
1. D 解析: $\because$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC , $AC \perp PC$, $AC \subset$ 平面 PAC , 且平面 $PAC \cap$ 平面 $PBC = PC$, $\therefore AC \perp$ 平面 PBC . 又 $BC \subset$ 平面 PBC , $\therefore AC \perp BC$. $\therefore \angle ACB = 90^\circ$. $\therefore$ 动点 C 运动形成的图形是以 AB 为直径的圆, 但要去掉 A 和 B 两点. 故选 D.

2. C 解析: 如图所示, 过点 S 作 $SO \perp$ 底面 ABC , 点 O 为垂足, 连接 OA, OB, OC , 则 $OA = OB = OC$. 则点 O 为等边三角形 ABC 的中心. 延长 AO 交 BC 于点 D , 连接 SD . 则 $AD \perp BC$, $BC \perp SD$. $\therefore \angle ODS$ 为侧面 SBC 与底面 ABC 所成二面角的平面角. $\because$ 正三棱锥 $S-ABC$ 的所有棱长均为 2, $\therefore SD = \sqrt{3}$, $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 在 $\text{Rt} \triangle SOD$ 中, $\cos \angle ODS = \frac{OD}{SD} = \frac{1}{3}$. 故选 C.



3. D 解析: 如图, 设 BD 交 AC 于点 O , EF 交 BD 于点 P , 连接 OB_1, PG . 因为 $BG = \frac{1}{2}BB_1$, $BP = \frac{1}{2}BO$, 所以 $PG \parallel OB_1$. 因为 $OB_1 \not\subset$ 平面 EFG , $PG \subset$ 平面 EFG , 所以 $OB_1 \parallel$ 平面 EFG . 又 $OB_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 . 故 A 正确. 连接 BD_1, BC_1 . 因为 $AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 , 所以 $AC \perp BD_1$. 又 $EF \parallel AC$, 所以 $EF \perp BD_1$. 因为 $D_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $D_1C_1 \perp B_1C$. 又 $B_1C \perp BC_1$, $D_1C_1 \cap BC_1 = C_1$, 所以 $B_1C \perp$ 平面 D_1C_1B . 所以 $B_1C \perp BD_1$. 又 $B_1C \parallel GF$, 所以 $GF \perp BD_1$. 因为 $GF \cap EF = F$, 所以 $BD_1 \perp$ 平面 EFG . 又 $BD_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , 故 B 正确. 因为 $EG \parallel AB_1$, $FG \parallel B_1C$, $EG, FG \subset$ 平面 EFG , $AB_1, B_1C \not\subset$ 平面 EFG , 所以 $AB_1 \parallel$ 平面 EFG , $B_1C \parallel$ 平面 EFG . 又因为 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C , $B_1C \subset$ 平面 AB_1C , $AB_1 \cap B_1C = B_1$, 所以平面 $AB_1C \parallel$ 平面

EFG,故C正确. 因为 $EF \parallel AC$, $\triangle AB_1C$ 为等边三角形,故直线 AB_1 与 AC 所成角为 60° ,即直线 AB_1 与 EF 所成角为 60° ,故D错误. 故选D.



4. a 或 $2a$ 解析: 由已知得 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等腰直角三角形, $A_1B_1 = B_1C_1$. $\because D$ 是 A_1C_1 的中点, $\therefore B_1D \perp A_1C_1$. $\because$ 平面 $A_1B_1C_1 \perp$ 平面 A_1ACC_1 , 平面 $A_1B_1C_1 \cap$ 平面 $A_1ACC_1 = A_1C_1$, $\therefore B_1D \perp$ 平面 A_1ACC_1 . 又 $CF \subset$ 平面 A_1ACC_1 , $\therefore B_1D \perp CF$. 若 $CF \perp$ 平面 B_1DF , 则 $CF \perp DF$. 设 $AF = x (0 < x < 3a)$, 则 $CF^2 = x^2 + 4a^2$, $DF^2 = a^2 + (3a - x)^2$, $CD^2 = a^2 + 9a^2 = 10a^2$. $\therefore 10a^2 = x^2 + 4a^2 + a^2 + (3a - x)^2$, 解得 $x = a$ 或 $x = 2a$.

5. (1) 证明: 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BD$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形,

所以 $AC \perp BD$.

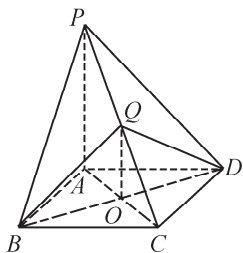
又因为 $PA \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC .

因为 $BD \subset$ 平面 BDQ ,

所以平面 $BDQ \perp$ 平面 PAC .

- (2) 解: 如图, 连接 OQ , 则 OQ 是平面 BDQ 与平面 PAC 的交线.



因为 $PA \parallel$ 平面 BDQ ,

所以 $PA \parallel OQ$.

所以 $OQ \perp$ 平面 $ABCD$.

又 O 是 AC 的中点,

所以 $OQ = \frac{1}{2} PA = 1$.

因为 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$,

$V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = \frac{4}{3}$,

$V_{Q-BCD} = \frac{1}{3} \cdot OQ \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \times 1 \times$

$$\left(2 \times 2 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3}.$$

所以 $V_{P-BDQ} = V_{P-ABCD} - V_{P-ABD} - V_{Q-BCD} = \frac{8}{3} -$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

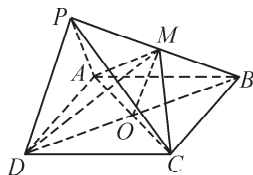
6. (1) 证明: 如图, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 OM .

因为 O, M 分别为 BD, PB 的中点,

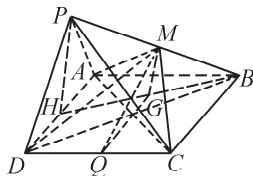
所以 $OM \parallel PD$.

因为 $OM \subset$ 平面 MAC , $PD \not\subset$ 平面 MAC ,

所以 $PD \parallel$ 平面 MAC .



- (2) 解: 取 AD 的中点 H , 连接 PH, HB , 取 HB 的中点 G , 连接 MG , 如图所示.



可得 $MG \parallel PH$.

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PH \perp AD$,

所以 $PH \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $MG \perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $CD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $MG \perp CD$.

过点 G 作 $GQ \perp CD$ 交 CD 于点 Q , 连接 MQ , 如图所示.

所以 $CD \perp$ 平面 MGQ .

所以 $CD \perp MQ$.

所以 $\angle MQG$ 就是二面角 $M-CD-A$ 的平面角.

由题可得 $MG = \frac{1}{2} PH = \frac{1}{2}$,

$$GQ = \frac{DH + BC}{2} = \frac{3}{2}.$$

在直角 $\triangle MQG$ 中, 可得 $\tan \angle MQG = \frac{MG}{GQ} = \frac{1}{3}$.

即二面角 $M-CD-A$ 的正切值为 $\frac{1}{3}$.

小测试(三十二) 简单随机抽样

预习自评

1. (1) $\checkmark$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$ (4) $\times$

2. BC 3. D

基础过关

1. ABD 解析: 由简单随机抽样的特点知, ABD 正确.

2. B 解析:观察选项 A 中的编号,有不在 00~49 内的编号,故排除选项 A;选项 C,D 中都有重复的编号,故排除选项 C 和 D. 故选 B.

3. C 解析:A、B 两个选项中总体容量较大,不宜采用抽签法,D 选项中甲、乙两厂生产的产品具有差异性,不能放在一起抽签. 故选 C.

4. D 解析:样本平均数为总体平均数的估计值,故选 D.

5. B 解析:第二次抽取时,余下的每个个体被抽到的可能性为 $\frac{9}{n-1}$,所以 $\frac{9}{n-1} = \frac{1}{3}$,解得 $n=28$. 所以在整个抽样过程中,每个个体被抽到的可能性为 $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$. 故选 B.

6. $\{1,3\}, \{1,8\}, \{3,8\}$ 解析:从总体中任取两个个体即可组成样本,则所有可能的样本为 $\{1,3\}, \{1,8\}, \{3,8\}$.

7. 10 200 解析:依题意,样本中已安装宽带的用户比例为 $\frac{60+42}{200} = \frac{51}{100}$,故估计该小区居民安装宽带的有 $20\,000 \times \frac{51}{100} = 10\,200$ (户).

8. 解:由题易得这 20 名男生的体重之和为 1 357 kg. 所以这 20 名男生的平均体重为 $1\,357 \div 20 = 67.85$ (kg).

因为这 20 名男生中体重在 60~75 kg(包括 60,75)之间的人数为 12,

故这 20 名男生体重在 60~75 kg 之间的人数所占的比例为 $\frac{12}{20} = 0.6$.

根据样本平均数估计总体平均数,该校高一男生的平均体重约为 67.85 kg,体重在 60~75 kg(包括 60,75)之间的人数所占比例约为 0.6.

素养提升

1. C 解析:根据随机数表法的要求,每个编号的数字位数应相同,才能实现简单随机抽样的等可能性. 故选 C.

2. D 解析:抽签法为简单随机抽样,每个个体在每次抽取中都有相同的可能性被抽到,所以高一(5)班在每次抽取中被抽到的可能性都是 $\frac{1}{10}$. 故选 D.

3. ACD 解析:A 选项明显正确. 计算样本中 5 名男生成绩的平均数 $\bar{x}_{\text{男}} = \frac{1}{5} \times (86 + 94 + 88 + 92 + 90) = 90$; 5 名女生成绩的平均数 $\bar{x}_{\text{女}} = \frac{1}{5} \times (88 + 93 + 93 + 88 + 93) = 91$. 可见样本中 5 名男生成绩的平均数小于 5 名女生成绩的平均数,据此估计该班级总体情况. 故 C 正确;可以计算 10 个样本的平

均数,据此估计总体的平均数,故 D 正确. 故选 ACD.

4. 3 600 解析:由题意可知,平均每条鲢鱼的质量为 $\frac{20 \times 1.6 + 10 \times 2.2 + 10 \times 1.8}{20 + 10 + 10} = 1.8$ (kg). 因为成活

的鲢鱼的总数约为 $2\,500 \times 80\% = 2\,000$ (条),所以鱼塘中鲢鱼的总质量约是 $2\,000 \times 1.8 = 3\,600$ (kg).

5. 解:(1)总体中个体数较大,用随机数法.

第一步,给电子元件编号为 1,2,3, ..., 99,100, ..., 600;

第二步,用随机数工具产生 1~600 范围内的整数随机数,把产生的随机数作为抽中的编号,使与编号对应的电子元件进入样本;

第三步,依次操作,如果生成的随机数有重复,则剔除并重新产生随机数,直到样本量达到 6;

第四步,以上这 6 个号码对应的电子元件就是要抽取的对象.

(2)总体中个体数较小,用抽签法.

第一步,将 30 个篮球,编号为 1,2, ..., 30;

第二步,将以上 30 个编号分别写在外观、质地等无差别的小纸条上,揉成小球状,制成号签;

第三步,把号签放入一个不透明的盒子中,充分搅拌;

第四步,从盒子中不放回地逐个抽取 3 个号签,并记录上面的号码;

第五步,找出和所得号码对应的篮球.

6. 解:(1) $\frac{1}{200} \times (1 \times 15 + 2 \times 60 + 3 \times 65 + 4 \times 35 + 5 \times 20 + 6 \times 5) = 3$ (个),

故当日这 200 户家庭平均每户丢弃塑料袋的个数为 3.

(2) $3 \times 365 \times 100 = 109\,500$ (万个),

故估计该市所有家庭每年丢弃塑料袋 109 500 万个.

易错辨析

C 解析:在简单随机抽样中,每一个个体被抽到的可能性都相等,与第几次抽样无关,故 A、B、D 中说法不正确,C 中说法正确.

小测试(三十三) 分层随机抽样

预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)✗

2. C

基础过关

1. C 解析:对于 A 选项,视调查目的和限制条件确定抽样方法,并非任何情况下分层随机抽样都比简单随机抽样能获得更有代表性的样本,故 A 选项不

正确;对于 B 选项,“分层”即按一个或多个与调查目的有关的变量把总体划分成若干个子总体,而不应该任选一种分层方式,故 B 选项不正确;对于 D 选项,分层抽样一般是按比例分配各层应抽取的样本量,这样个体多的层,入样也多,个体少的层,入样就少,并不需要使各层入样的个体数量基本相同,故 D 选项不正确;对于 C 选项,所有层都按同一抽样比可以使每层样本量与层的大小成比例,这样的样本量分配方式为比例分配,比例分配可以保证等可能抽样,故选 C.

2. C 解析:我们常用的抽样方法有简单随机抽样、分层随机抽样,而事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男、女生视力情况差异不大,故为了解该地区中小学生的视力情况,应按学段分层随机抽样,这种方法具有代表性,比较合理.

3. A 解析:设应从丁种型号的产品中抽取 x 件,由分层随机抽样的基本性质可得 $\frac{x}{400} = \frac{60}{100+200+300+400}$,解得 $x=24$,故选 A.

4. A 解析:设从高二、高三年级抽取的人数分别为 m, n ,依题意,有 $\frac{28}{560} = \frac{m}{540} = \frac{n}{520}$,解得 $m=27, n=26$,故选 A.

5. B 解析: $\because$ 甲社区有驾驶员 96 人,在甲社区中抽取驾驶员的人数为 12, $\therefore$ 每个个体被抽到的概率为 $\frac{12}{96} = \frac{1}{8}$. $\because$ 样本量为 $12+21+25+43=101$, $\therefore$ 这四个社区驾驶员的总人数 N 为 $\frac{101}{\frac{1}{8}}=808$,故选 B.

6. 55 解析:设高一、高二年级分别抽取 x 人, y 人,根据高一、高二、高三年级的学生人数之比可得 $x = \frac{15}{3} \times 4 = 20, y = \frac{15}{3} \times 4 = 20$. 所以抽取的样本量为 $20+20+15=55$.

7. 5 600 解析:设甲、乙、丙 3 条生产线各生产了 $T_{\text{甲}}, T_{\text{乙}}, T_{\text{丙}}$ 件产品,则 $a:b:c = T_{\text{甲}}:T_{\text{乙}}:T_{\text{丙}}$,即 $\frac{a}{T_{\text{甲}}} = \frac{b}{T_{\text{乙}}} = \frac{c}{T_{\text{丙}}}$. 因为 $2b = a + c$,所以 $\begin{cases} T_{\text{甲}} + T_{\text{丙}} = 2T_{\text{乙}}, \\ T_{\text{甲}} + T_{\text{乙}} + T_{\text{丙}} = 16\,800. \end{cases}$ 所以 $T_{\text{乙}} = \frac{16\,800}{3} = 5\,600$.

8. 解:由题知甲机床生产的零件的平均尺寸为 $\bar{x}_{\text{甲}} = 10, \omega_{\text{甲}} = \frac{40}{100}$.
乙机床生产的零件的平均尺寸为 $\bar{x}_{\text{乙}} = 12, \omega_{\text{乙}} = \frac{60}{100}$.

所以抽取的甲、乙两台机床生产的共 100 件产品的平均尺寸为 $\bar{x} = \frac{40}{100} \times 10 + \frac{60}{100} \times 12 = 11.2$.

素养提升

1. BC 解析: $n = 16 \div \frac{2k}{2k+5k+3k} = 80$,故 A 错误, B 正确. 样本中 B 型号产品有 $80 \times \frac{5k}{2k+5k+3k} = 40$ (件),故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

2. C 解析:因为该地区有大型商场 x 个,中型商场 y 个,小型商场 z 个,且 $x:y:z=2:4:9$,所以用分层随机抽样进行调查,应抽取中型商场的个数为 $45 \times \frac{4}{2+4+9} = 12$,故选 C.

3. C 解析:估计该小区业主对户型结构满意度的平均分为 $\frac{20}{20+30} \times 8 + \frac{30}{20+30} \times 9 = 8.6$,故选 C.

4. 760 解析:设该校高三年级女生人数为 x . 因为抽样比为 $\frac{200}{1\,600} = \frac{1}{8}$,所以女生入样 $\frac{1}{8}x$,男生入样 $\frac{1}{8} \times (1\,600 - x)$. 又因为入样女生比男生少 10 人,所以 $\frac{1}{8}(1\,600 - x) - \frac{1}{8}x = 10$,解得 $x = 760$.

5. 解:(1)由题意知 $\frac{x}{1\,000} = 0.13$,
解得 $x = 130$.

因为第一车间的工人有 $170+180=350$ (名),
第二车间的工人有 $120+130=250$ (名),
所以第三车间的工人有 $1\,000 - 350 - 250 = 400$ (名).

所以 $y = 400 \times \frac{2}{5} = 160$,

$z = 400 \times \frac{3}{5} = 240$.

(2)设在第三车间抽取 m 名男工人,
易得共有男工人 $180+130+240=550$ (名),

则 $\frac{m}{240} = \frac{55}{550}$,解得 $m = 24$,

所以应在第三车间抽取 24 名男工人.

6. 解:(1)因为身体状况会因年龄而有差异,所以要抽取 40 人调查身体状况,应采用按年龄分层随机抽样的方法.

从老年人中抽取 $40 \times \frac{200}{2\,000} = 4$ (人),

从中年人中抽取 $40 \times \frac{600}{2\,000} = 12$ (人),

从青年人中抽取 $40 \times \frac{1\,200}{2\,000} = 24$ (人).

(2)要开一个 25 人的座谈会来讨论单位发展与薪资调整方面的规划,应采用按部门分层随机抽样的

方法.

从管理部抽取 $25 \times \frac{160}{2\,000} = 2$ (人),

从技术开发部抽取 $25 \times \frac{320}{2\,000} = 4$ (人),

从营销部抽取 $25 \times \frac{480}{2\,000} = 6$ (人),

从生产部抽取 $25 \times \frac{1\,040}{2\,000} = 13$ (人).

(3)要抽取 20 人调查对某运动会举办情况的了解,应采用按年龄分层随机抽样的方法.

从老年人中抽取 $20 \times \frac{200}{2\,000} = 2$ (人),

从中年人中抽取 $20 \times \frac{600}{2\,000} = 6$ (人),

从青年人中抽取 $20 \times \frac{1\,200}{2\,000} = 12$ (人).

易错辨析

C 解析:直接采用分层随机抽样,老年人、中年人和青年人中应抽取的人数分别为 $\frac{36}{28+54+81} \times 28 \approx 6$, $\frac{36}{28+54+81} \times 54 \approx 12$, $\frac{36}{28+54+81} \times 81 \approx 18$. 故选 C.

小测试(三十四) 获取数据的途径

预习自评

1. (1)× (2)× (3)✓

2. D

基础过关

1. D 解析:某种特效中成药的配方的数据一般通过试验获取.

2. C 解析:A 不能用普查的方式调查,因为这种实验具有破坏性;B 用普查的方式无法完成;C 可以用普查的方式进行调查;D 中实验具有破坏性,且需要耗费大量的时间,在实际生产中无法应用.

3. D 解析:①不符合,因为问题有引导受调查者答题的倾向. ②不符合,因为“孩子”一词意义含混. ③不符合,因为“聪明”一词意义含混,故只有④符合. 故选 D.

4. ACD 解析:A 选项,该问题用普查的方法很难实现,适合用抽样调查的方法获取数据;B 选项,体检,必须了解每个职工的身体状况,不适合用抽样调查的方法获取数据;C 选项,3 万考生的答题情况用普查的方法获取数据不合适,适合用抽样调查的方法获取数据;D 选项,该问题只能用抽样调查的方法获取数据.

5. C 解析:A, B, D 都是通过查询获取的数据, C 是通过调查获取的数据.

6. 普查 解析:要获得系统、全面、准确的信息,在对总体没有破坏的前提下,普查无疑是一个非常好的方式. 要全面、准确地调查人口的状况,应当用普查的方式进行调查.

7. (1)抽样 (2)6 辆车的行驶速度 每一辆车的行驶速度

8. 解:调查的方式应具有代表性,选择方案③,比较合理.

方案①不具有代表性,一般而言体校学生的身高偏高;

方案②不具有目的性,是外省市 200 名男生身高的统计资料;

方案③考虑全面,具有代表性.

素养提升

1. C 解析:该地的气象记录和本次降雨量数据都是通过观察获取数据的.

2. D 解析:A 选项中某地七月份的日平均最高气温值不能代表该地全年的日平均最高气温;B 选项中在农村调查得到的平均寿命不能代表市民的平均寿命;C 选项中试验水稻田的产量与水稻的实际产量相差可能较大;只有 D 选项中样本具有代表性.

3. AC 解析:A, C 两项所需数据都没有现存数据可供查询,需要通过试验的方法来获取样本观测数据. B 项数据宜通过调查获取, D 项数据宜通过观察或查询获取. 故选 AC.

4. ②③④ 解析:若调查的目的必须通过普查才能实现,一般用普查;若调查存在一定的破坏性则用抽样调查. 关键还是看实际需要. 驾校训练的司机直接影响驾驶安全,必须普查;炮弹的杀伤力调查具有破坏性只能采用抽样调查;饮料质量的调查也具有破坏性,应该采用抽样调查;央视春晚节目的满意度调查比较复杂,普查成本高,也没必要,适宜用抽样调查;航天设备不能有一点疏忽,每一个零件的质量都需要检查,应采用普查.

5. 解:不一定是报纸弄错了.

因为他观察的时间太短,人数太少,不能代表总的销售情况,更不能说明报纸上数据的真假.

6. 解:设计调查问卷如下:

	满意	一般	不满意
您对我校食堂饭菜质量是否满意?			
您对我校食堂饭菜价格是否满意?			
您对我校食堂服务质量是否满意?			

易错辨析

不合理 **解析**:很多视力残疾的人不具有上网条件,因此所获取的数据不具有代表性.

小测试(三十五) 总体取值规律的估计与总体百分位数的估计

预习自评

1. (1)× (2)✓ (3)✓ (4)✓ (5)×

2. C

基础过关

1. C **解析**:对于 A 选项,频率分布表使样本数据被妥善整理,从而以更简洁的数据形态呈现,无法通过频率分布表看出数据相对于平均数的波动情况;对于 B 选项,频数是指落在各个小组内的数据的个数;对于 C 选项,每小组的频数与样本容量之比等于这个小组的频率, C 正确;对于 D 选项,组数一般由样本数据的极差除以组距得到.

2. D **解析**:列出频率分布表如下:

分组	频数	频率
$[5.5, 7.5)$	2	0.1
$[7.5, 9.5)$	6	0.3
$[9.5, 11.5)$	8	0.4
$[11.5, 13.5]$	4	0.2
合计	20	1.0

从表中可以看出频率为 0.2 的是 $[11.5, 13.5]$. 故选 D.

3. B **解析**: $\because$ 一个频率分布表(样本量为 30)不小心被损坏了一部分,只记得样本中数据在 $[20, 60]$ 上的频率为 0.8, $\therefore$ 样本中数据在 $[20, 60]$ 上的频数为 $30 \times 0.8 = 24$, $\therefore$ 估计样本在 $[40, 60]$ 内的数据个数为 $24 - 4 - 5 = 15$. 故选 B.

4. C **解析**: $8 \times 80\% = 6.4$, 大于 6.4 的比邻整数为 7, 把 5, 7, 9, 6, 10, 4, 7, 6 从小到大排列为 4, 5, 6, 6, 7, 7, 9, 10, 第 7 个数为 9. 故选 C.

5. ABD **解析**:对于 A, 样本数据分布在 $[6, 10)$ 内的频率为 $0.08 \times 4 = 0.32$, 故 A 正确;对于 B, 样本数据分布在 $[10, 14)$ 内的频数为 $0.10 \times 4 \times 100 = 40$, 故 B 正确;对于 C, 估计总体数据大约有 $0.1 \times 4 \times 100\% = 40\%$ 分布在 $[10, 14)$ 内, 故 C 错误;对于 D, 样本数据分布在 $[2, 10)$ 内的频数为 $(0.02 + 0.08) \times 4 \times 100 = 40$, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. 8.6 **解析**:由题意, $30 \times 60\% = 18$, 为整数, 所以第

60 百分位数是把数据按从小到大排序后, 第 18 和第 19 个数据的平均数. 设第 19 个数据为 x , 则 $\frac{7.8+x}{2} = 8.2$, 解得 $x = 8.6$.

7. 0.3 85 **解析**:由题意可知 $0.05 + 0.35 + a + 0.2 + 0.1 = 1$, 解得 $a = 0.3$. $\because 0.05 + 0.35 + 0.3 = 0.7$, $0.05 + 0.35 + 0.3 + 0.2 = 0.9$, $\therefore$ 估计该校学生每天课外阅读时间的 80% 分位数为 85.

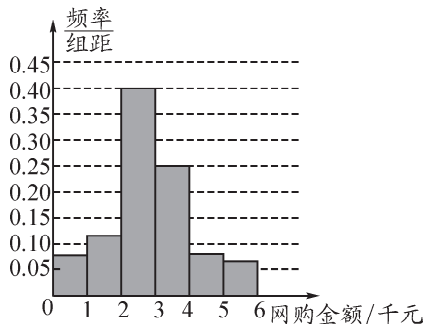
8. **解**:根据题意, 得 $\begin{cases} 16 + 24 + x + y + 16 + 14 = 200, \\ \frac{16 + 24 + x}{y + 16 + 14} = \frac{3}{2}. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 80, \\ y = 50. \end{cases}$

所以 $p = \frac{80}{200} = 0.4$,

$q = \frac{50}{200} = 0.25$.

补全频率分布直方图如图所示.



(2) 由(1)可知, 网购金额不高于 2 千元的频率为 $0.08 + 0.12 = 0.2$,

网购金额不高于 3 千元的频率为 $0.2 + 0.4 = 0.6$, 所以网购金额的 40% 分位数在 $(2, 3]$ 内.

故网购金额的 40% 分位数为 2.5.

素养提升

1. D **解析**:由题意, 得众数为 50, 平均数为 $\frac{1}{8} \times (20 + 30 + 40 + 50 + 50 + 60 + 70 + 80) = 50$. $\because 8 \times 60\% = 4.8$, 所以第 5 个数 50 即为第 60 百分位数. 故它们的大小关系是 $x = y = z$. 故选 D.

2. C **解析**:设中间一个小长方形的面积为 a , 则 $a + \frac{5}{2}a = 1$, 解得 $a = \frac{2}{7}$. 故中间一组的频数为 $210 \times \frac{2}{7} = 60$. 故选 C.

3. D **解析**:由题意可得 $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100)$, $[100, 110)$, $[110, 120]$ 各分数段的频率之比为 $2:3:5:6:3:1$, 所以该班学生数学成绩在 $[80, 90)$ 与 $[90, 100)$ 的频率分别为 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{10}$. 所以该

班学生数学成绩在 $[80, 100)$ 的学生人数是 $60 \times$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10}\right) = 33. \text{ 故选 D.}$$

4. 60 解析: 设第 1 组至第 6 组数据的频率分别为 $2x, 3x, 4x, 6x, 4x, x$, 则 $2x + 3x + 4x + 6x + 4x + x = 1$, 解得 $x = \frac{1}{20}$, 所以前 3 组数据的频率分别为 $\frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}$. 故前 3 组数据的频数之和为 $\left(\frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{4}{20}\right)n = 27$, 解得 $n = 60$.

5. 解: 在频率分布直方图中频数之比等于频率之比且样本的所有频率之和等于 1.

(1) $\because$ 小矩形的高之比为频率之比,

$\therefore$ 从左到右各小组的频率之比为 $2:3:6:4:1$.

$\therefore$ 最左边的一组所占的频率为 $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

$\therefore$ 样本容量 $= \frac{\text{频数}}{\text{频率}} = \frac{6}{\frac{1}{8}} = 48$.

(2) $[105.5, 120.5)$ 这一组的频率为 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,

频数为 $48 \times \frac{3}{8} = 18$.

(3) $\because$ 成绩大于 120 分的频率为 $\frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$,

$\therefore$ 估计这次数学期末考试成绩的优秀率为 $\frac{5}{16} \times 100\% = 31.25\%$.

6. 解: (1) 第四小组的频率为 $1 - (0.1 + 0.3 + 0.4) = 0.2$.

(2) 设参加两分钟跳绳测试的学生有 x 人,

则 $0.1x = 5$.

解得 $x = 50$.

$\therefore$ 参加两分钟跳绳测试的学生人数为 50.

(3) 由题意及频率分布直方图知, 参加两分钟跳绳次数不低于 100 的学生所占频率为 $0.4 + 0.2 = 0.6$,

$\therefore$ 估计该校二年级学生体能的达标率为 60%.

易错辨析

4. 7 解: 由题意, 将这组数据按从小到大的顺序排列, 可得 4, 3, 4, 7, 5, 0, 5, 3, 5, 5, 6, 4, 共 6 个数. 因为 $6 \times 25\% = 1.5$, 所以第 25 百分位数为 4. 7.

小测试(三十六) 总体集中趋势的估计

预习自评

1. (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\checkmark$ (4) $\checkmark$

2. B

基础过关

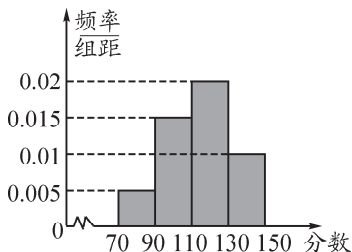
1. A 解析: 在这 11 个数据中, 数据 3 出现了 6 次, 频率最高, 故众数是 3, ①正确; 将这 11 个数据按从小到大排列得 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 10, 最中间的数据是 3, 故中位数是 3, ②错误; 这组数据的平均数 $\bar{x} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 6 + 6 \times 2 + 10}{11} = 4$, 故 ③ ④ 错误. 故选 A.

2. D 解析: 将这组数据按从小到大的顺序排列 93, 93, 94, 94, 95, 95, 96, 97, 97, 97. 所以这组数据的平均数 $a = \frac{1}{10} \times (93 \times 2 + 94 \times 2 + 95 \times 2 + 96 + 97 \times 3) = \frac{951}{10} = 95.1$, 中位数 $b = \frac{95 + 95}{2} = 95$. 观察得众数 $c = 97$. 所以 $c > a > b$. 故选 D.

3. A 解析: 因为一组数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数是 2, 所以另一组数据 $2x_1 - 3, 2x_2 - 3, 2x_3 - 3, 2x_4 - 3, 2x_5 - 3$ 的平均数为 $2 \times 2 - 3 = 1$. 故选 A.

4. C 解析: 该班级这次数学测试平均分的估计值 $\bar{x} = 65 \times 0.1 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.4 + 95 \times 0.2 = 82$. 故选 C.

5. B 解析: 由题意画出频率分布直方图如图, 频率分布直方图中四个小矩形的面积从左向右依次为 0.1, 0.3, 0.4, 0.2, 故中位数位于第 3 个小矩形中, 而前两个小矩形面积之和为 0.4. 设中位数为 a , 则 $(a - 110) \times 0.02 = 0.1$, 解得 $a = 115$, 故中位数为 115.



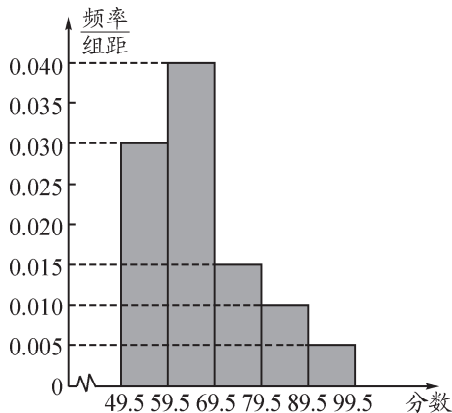
6. 85 解析: 由题意, 得该校数学建模兴趣班的平均成绩是 $\frac{40 \times 90 + 50 \times 81}{90} = 85$ (分).

7. 65 62.5 解析: $\because$ 最高的矩形为第三个矩形, $\therefore$ 时速的众数的估计值为 $\frac{60 + 70}{2} = 65$. $\because$ 前两个矩形的面积为 $(0.01 + 0.03) \times 10 = 0.4 < 0.5$, 前三个矩形的面积为 $(0.01 + 0.03 + 0.04) \times 10 = 0.8 > 0.5$, $\therefore$ 中位数在区间 $[60, 70)$ 中. 设中位数为 x , 由题得 $0.4 + (x - 60) \times 0.04 = 0.5$, 解得 $x = 62.5$. $\therefore$ 中位数的估计值为 62.5.

8. 解: (1) 第二小组的频率为 $1 - 0.30 - 0.15 - 0.10 -$

$0.05=0.40$,

所以补全频率分布直方图如图所示.



这两个班参赛学生的总人数为 $\frac{40}{0.40}=100$.

(2) 本次参赛学生成绩的平均数为 $54.5 \times 0.30 + 64.5 \times 0.40 + 74.5 \times 0.15 + 84.5 \times 0.10 + 94.5 \times 0.05 = 66.5$ (分).

中位数出现在第二组中, 设中位数为 x ,

则 $(x-59.5) \times 0.04 + 0.30 = 0.50$.

解得 $x=64.5$.

所以估计本次参赛学生成绩的平均数为 66.5 分, 中位数为 64.5 分.

素养提升

1. C 解析: 依题意, 将该小组的数学成绩从小到大排列为 75, 80, 85, 85, 85, 85, 90, 90, 95, 100, 观察知众数和位数均为 85, 计算得平均数为 87.

2. B 解析: 设 20 个数分别为 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$, 且 $x_{20}=68$. 求出的平均数 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{19} + 86}{20}$, 实际平均数 $\bar{x}' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{19} + 68}{20}$, $\therefore$ 求出的平均数与实际平均数的差 $\bar{x} - \bar{x}' = \frac{86-68}{20} = 0.9$. 故选 B.

3. ABD 解析: 甲打靶的环数的平均数为 $\frac{1}{6} \times (8+6+8+6+9+8) = \frac{45}{6}$, 乙打靶的环数的平均数为 $\frac{1}{6} \times (4+6+8+7+10+10) = \frac{45}{6}$, 两人打靶环数的平均数相等, A 正确;
甲的环数的中位数是 8, 乙的环数的中位数是 7.5, $8 > 7.5$, B 正确;
甲的环数的众数是 8, 乙的环数的众数是 10, $8 < 10$, C 错误;
甲的数据与乙相比更集中些, 更稳定, D 正确. 故选 ABD.

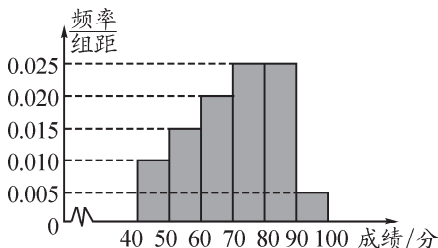
4. $\frac{21}{2}$ 解析: $\because x$ 是 1, 2, x , 4, 5 这五个数据的中位数, $\therefore x \in [2, 4]$. $\because -1, 5, -\frac{1}{x}, y$ 这四个数据的平均数为 3, $\therefore -1 + 5 - \frac{1}{x} + y = 12$. $\therefore y = \frac{1}{x} + 8$. $\because$ 根据对勾函数的单调性可得 $x + y = x + \frac{1}{x} + 8$ 在 $x \in [2, 4]$ 上单调递增, $\therefore x + y$ 的最小值为 $2 + \frac{1}{2} + 8 = \frac{21}{2}$.

5. 解: (1) $\because (2a + 3a + 7a + 6a + 2a) \times 10 = 1$, $\therefore a = 0.005$.

(2) 20 名学生数学考试成绩的平均数为 $(55 \times 2a + 65 \times 3a + 75 \times 7a + 85 \times 6a + 95 \times 2a) \times 10 = 15\,300a = 15\,300 \times 0.005 = 76.5$ (分).

(3) 由频率分布直方图知, 成绩落在 $[80, 100)$ 的频率为 $6a + 2a = 8a = 8 \times 0.005 = 0.04$, $\therefore$ 该校高一年级学生成绩落在 $[80, 100)$ 中的学生人数为 $1\,600 \times 0.04 = 64$ (人).

6. 解: (1) 分数在 $[70, 80)$ 内的频率为 $1 - 10 \times (0.010 + 0.015 + 0.020 + 0.025 + 0.005) = 0.25$, 补全频率分布直方图如图所示.



(2) 根据频率分布直方图, 可估计本次考试成绩的众数为 $\frac{70+80}{2} = 75$ (分) 或 $\frac{80+90}{2} = 85$ (分),

平均数为 $45 \times 0.01 \times 10 + 55 \times 0.015 \times 10 + 65 \times 0.020 \times 10 + 75 \times 0.025 \times 10 + 85 \times 0.025 \times 10 + 95 \times 0.005 \times 10 = 70.5$ (分).

(3) 根据评奖规则, 排名靠前的 10% 的同学可以获奖, 成绩在 $[90, 100]$ 的频率为 $0.005 \times 10 = 0.05$, 成绩在 $[80, 90)$ 的频率为 $0.025 \times 10 = 0.25$, $\therefore$ 估计获奖的同学需要的分数至少为 $90 - \frac{0.1-0.05}{0.025} = 88$ (分).

易错辨析

D 解析: 由已知, 得 $a = \frac{1}{10} \times (15 + 17 + 14 + 10 + 15 + 17 + 17 + 16 + 14 + 12) = 14.7$, $b = \frac{1}{2} \times (15 + 15) = 15$, $c = 17$, 则 $c > b > a$. 故选 D.

小测试(三十七) 总体离散程度的估计

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓ (4)✓

2. B 3. D

基础过关

1. D 解析:由题意,得 $\bar{x}_1 = \frac{1}{5} \times (7+7+8+8+10) = 8$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{5} \times (8+9+9+9+10) = 9$. $s_1^2 = \frac{1}{5} \times [(7-8)^2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2] = 1.2$, $s_2^2 = \frac{1}{5} \times [(8-9)^2 + (9-9)^2 + (9-9)^2 + (9-9)^2 + (10-9)^2] = 0.4$. $\therefore \bar{x}_1 < \bar{x}_2$, $s_1^2 > s_2^2$.

2. A 解析:由于去掉1个最高分与1个最低分后,评委所评的9个分数从小到大排序后,中间数字不会改变,故中位数不变.由于最高分和最低分是极端分数,因此会影响平均数、方差和极差.

3. B 解析:由题意,得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (4 \times 2021 + 2021) = 2021$, $s^2 = \frac{1}{5} \times [4 \times 1 + (2021 - 2021)^2] = \frac{4}{5} < 1$. 故选 B.

4. C 解析:若 $1+x_1, 1+x_2, 1+x_3, \dots, 1+x_n$ 的平均数是10,则 $2+x_1, 2+x_2, 2+x_3, \dots, 2+x_n$ 的平均数为 $10+1=11$,且 $1+x_1, 1+x_2, 1+x_3, \dots, 1+x_n$ 与 $2+x_1, 2+x_2, 2+x_3, \dots, 2+x_n$ 的方差相等,均为2.

5. B 解析:由题图可知样本A的数据均不大于10,样本B的数据均不小于10, $\therefore \bar{x}_A < \bar{x}_B$. 由题图可知样本A中的数据波动程度较大,样本B中的数据更稳定, $\therefore s_A > s_B$. 故选 B.

6. 8 解析:设从5个班中抽取的人数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . 由题意,得 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$, $\frac{1}{5} [(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 5)^2 + (x_4 - 5)^2 + (x_5 - 5)^2] = 4$, 两式整理,得 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 145$. 设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, 可推导出 x_5 的最大值为8. $\therefore$ 样本数据中的最大值是8.

7. 9.5 28.5 解析: $\bar{x} = \frac{1}{20} \times (2.5 \times 4 + 7.5 \times 8 + 12.5 \times 5 + 17.5 \times 2 + 22.5 \times 1) = 9.5$, $s^2 = \frac{1}{20} \times [(2.5-9.5)^2 \times 4 + (7.5-9.5)^2 \times 8 + (12.5-9.5)^2 \times 5 + (17.5-9.5)^2 \times 2 + (22.5-9.5)^2 \times 1] = 28.5$.

8. 解:根据题意,得该班平均成绩为 $\bar{x} = 90 \times \frac{20}{40} + 80 \times \frac{20}{40} = 85$.

$\therefore$ 第一组的平均数为 $\bar{x}_1 = 90$,

方差为 $s_1^2 = 16$,

第二组的平均数为 $\bar{x}_2 = 80$,

方差为 $s_2^2 = 36$,

则该班学生这次考试成绩的方差为

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{20}{40} \times [s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2] + \frac{20}{40} \times [s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2] \\ &= \frac{1}{2} \times [16 + (90 - 85)^2] + \frac{1}{2} \times [36 + (80 - 85)^2] \\ &= 51. \end{aligned}$$

$\therefore s = \sqrt{51}$.

综上可得,该班学生这次考试成绩的平均数和标准差分别为85和 $\sqrt{51}$.

素养提升

1. B 解析:由题意,得 $a+3+4+5+6=5b$, $a+b=6$, 解得 $a=2$, $b=4$. 所以方差 $s^2 = \frac{1}{5} \times [(2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2] = 2$. 所以标准差为 $\sqrt{2}$.

2. C 解析:设这个班有 n 个同学,分数分别是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 假设第 i 个同学的成绩没录入,则第一次计算时,总分是 $(n-1)\bar{x}$, 方差为 $s^2 = \frac{1}{n-1} [(a_1 - \bar{x})^2 + (a_2 - \bar{x})^2 + \dots + (a_{i-1} - \bar{x})^2 + (a_{i+1} - \bar{x})^2 + \dots + (a_n - \bar{x})^2]$; 第二次计算时, $\bar{x}_1 = \frac{(n-1)\bar{x} + a_i}{n}$, 方差为 $s_1^2 = \frac{1}{n} [(a_1 - \bar{x}_1)^2 + (a_2 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (a_{i-1} - \bar{x}_1)^2 + (a_i - \bar{x}_1)^2 + (a_{i+1} - \bar{x}_1)^2 + \dots + (a_n - \bar{x}_1)^2] = \frac{n-1}{n} s^2$, 所以 $\bar{x} = \bar{x}_1$, $s^2 > s_1^2$. 故选 C.

3. A 解析:依题意知 $\bar{x}_{\text{初}} = a$, $s_{\text{初}}^2 = 2$, $\bar{x}_{\text{高}} = b$, $s_{\text{高}}^2 = \frac{12}{5}$. $\therefore a=b$, $\therefore \bar{x}=a$, 即全体参赛党员竞赛成绩的平均分为 a . $\therefore$ 全体参赛党员竞赛成绩的方差为 $s^2 = \frac{n_{\text{初}}}{n} [s_{\text{初}}^2 + (\bar{x}_{\text{初}} - \bar{x})^2] + \frac{n_{\text{高}}}{n} [s_{\text{高}}^2 + (\bar{x}_{\text{高}} - \bar{x})^2] = \frac{20}{70} \times [2 + (a-a)^2] + \frac{50}{70} \times [\frac{12}{5} + (a-a)^2] = \frac{4}{7} + \frac{12}{7} = \frac{16}{7}$. 故选 A.

4. 4 解析:由题意,得

$$\begin{cases} x+y+10+11+9=50, \\ (x-10)^2 + (y-10)^2 + 1+1=2 \times 5. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208. \end{cases} \therefore 2xy=192. \therefore (x-y)^2 = 208-192=16. \therefore |x-y|=4.$$

5. 解: $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{74+85+86+90+93}{5} = 85.6.$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{76+83+85+87+97}{5} = 85.6,$$

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5} \times [(74-85.6)^2 + (85-85.6)^2 + (86-85.6)^2 + (90-85.6)^2 + (93-85.6)^2] = \frac{1}{5} \times 209.2 = 41.84,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5} \times [(76-85.6)^2 + (83-85.6)^2 + (85-85.6)^2 + (87-85.6)^2 + (97-85.6)^2] = \frac{1}{5} \times 231.2 = 46.24.$$

$$\text{因为 } \bar{x}_{\text{甲}} = \bar{x}_{\text{乙}}, s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

所以甲的成绩更稳定.

所以派甲参赛更合适.

6. 解: (1) 由题图可得, 甲、乙两人五次测试的成绩分别为

甲: 10, 13, 12, 14, 16;

乙: 13, 14, 12, 12, 14.

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{10+13+12+14+16}{5} = 13,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{13+14+12+12+14}{5} = 13,$$

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5} \times [(10-13)^2 + (13-13)^2 + (12-13)^2 + (14-13)^2 + (16-13)^2] = 4,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5} \times [(13-13)^2 + (14-13)^2 + (12-13)^2 + (12-13)^2 + (14-13)^2] = 0.8.$$

(2) 由 $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ 可知, 乙的训练成绩更稳定.

从折线图看, 甲的训练成绩基本呈上升状态, 而乙的训练成绩上下波动, 可知甲的成绩在不断提高, 而乙的成绩则无明显提高.

易错辨析

A 解析: 因为 B 样本数据恰好是 A 样本中每个数据都减去 10 后所得的数据, 所以 A, B 两样本的方差是相同的. 故选 A.

小测试(三十八) 有限样本空间与随机事件

预习自评

1. (1)× (2)× (3)✓ (4)✓

2. B 3. ABC

基础过关

1. D 解析: A, B 中的事件是随机事件, C 中的事件是不可能事件, D 中的事件是必然事件. 故选 D.

2. B 解析: 依次投掷两枚骰子, 所得点数之和记为 X, 那么 $X=4$ 表示的随机试验的样本点是第一枚是 3 点, 第二枚是 1 点或第一枚是 1 点, 第二枚是 3 点或两枚都是 2 点. 故选 B.

3. D 解析: 因为是先后抛掷, 所以结果是有顺序之分的, 因此(反面, 正面)和(正面, 反面)是不同的结果. 故选 D.

4. C 解析: 点落在 x 轴正半轴上所包含的样本点的基本特征是 $(x, 0) (x > 0)$. 因为集合 A 中有 4 个正数, 故包含 4 个样本点.

5. ACD 解析: 根据 $A \subseteq B$ 的 Venn 图可知, 对于 A, 集合 A 中的所有元素都在 B 中, 故 A 正确; 对于 B, 当集合 B 的范围比 A 大时, 不在 A 中的元素, 有可能在 B 中, 故 B 错误, 应为“若任取 $x \notin A$, 则 $x \in B$ 是随机事件”; 对于 C, 理由同 B 项, 易知 C 正确; 对于 D, 由于 B 包含 A, 故若所取元素不在 B 中, 则必不在 A 中, 故 D 正确. 故选 ACD.

6. 4 解析: 长度为 2, 4, 5, 7, 9 的五条线段中任取三条, 则取出的三条线段可以构成一个三角形的基本事件有: (2, 4, 5), (4, 5, 7), (4, 7, 9), (5, 7, 9), 所以事件 A 包含的样本点的个数为 4.

7. {0, 1, 2, 3, 4} 解析: 由分析可知取出的 4 件产品中的次品个数可能为 0, 1, 2, 3, 4, 所以其样本空间为 {0, 1, 2, 3, 4}.

8. 解: (1) 样本空间为 $\{(-2, -4), (-2, 5), (-2, 6), (3, -4), (3, 5), (3, 6), (-4, -2), (5, -2), (6, -2), (-4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$.

(2) 由(1)知这个试验样本点的总数为 12.

(3) “得到的点是第一象限内的点”这一事件所包含的样本点有 (3, 5), (3, 6), (5, 3), (6, 3).

(4) 事件 $A = \{(-2, -4), (-4, -2)\}$ 表示得到的点是第三象限内的点.

素养提升

1. C 解析: 连续射击一个目标 10 次, 可能全部脱靶, 最好的情况是全部命中, 故有 11 个样本点, A 错误; 事件 $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, 事件 A 中有 5 个样本点, 且样本点中没有 11, 故 B, D 错. 故选 C.

2. A 解析: “至少一枚硬币正面向上”包括“一角硬币正面向上, 五角硬币正面向上”“一角硬币正面向上, 五角硬币正面向下”“一角硬币正面向下, 五角硬币正面向上”3 个样本点.

3. C 解析: 由题意知, 10 名学生中, 男生人数少于 5

名,但不少于3名,所以 $x=3$ 或 $x=4$.故选C.

4. $\{(2,8),(3,12),(8,2),(12,3)\}$ 解析:由题意,样本空间为 $\{(2,3),(2,8),(2,12),(3,8),(3,12),(8,12),(3,2),(8,2),(12,2),(8,3),(12,3),(12,8)\}$.根据有理数的定义, ab 的算术平方根为整数,所以事件“ $\sqrt{ab}$ 为有理数”可表示为 $\{(2,8),(3,12),(8,2),(12,3)\}$.

5. 解:(1)由转盘①中的任意1个数字,可与转盘②中的任意1个数字进行组合,可知共16种情况,样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

(2)列出符合事件A,B的样本点如下:

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}.$$

$$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

6. 解:(1) $\Omega=\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7,S_8,S_9,S_{10}\}$.

$$(2)A=\{S_4,S_5,S_6,S_7,S_8,S_9,S_{10}\},$$

$$B=\{S_7,S_8,S_9,S_{10}\}.$$

(3)铁路局需要准备从 S_1 站发车的车票9种,

从 S_2 站发车的车票8种,

...

从 S_9 站发车的车票1种,

合计 $9+8+\cdots+2+1=45$ (种).

易错辨析

D 解析:3次摸取球的所有样本点为(黑,黑,黑),(黑,黑,白),(黑,白,黑),(白,黑,黑),(黑,白,白),(白,黑,白),(白,白,黑),(白,白,白),共8个.

小测试(三十九) 事件的关系和运算

预习自评

1. (1)✓ (2)× (3)✓ (4)×

2. C

基础过关

1. C 解析:由题意可知 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$,则 $A \cap B=\{2\}$, $A \cup B=\{1,2,3\}$,所以 $A \cup B$ 表示向上的点数是1或2或3.故选C.
2. C 解析:A,B,D中事件可以同时发生,不互斥;对于C,“甲站排头”与“乙站排头”只能发生一个,不可能同时发生,故C中事件互斥.故选C.
3. AB 解析:对于A选项,事件 $A \cup B$ 指至少有一件次品,即事件C,故A正确;对于B选项,事件 $B \cup D$ 指至少有两件次品或至多有一件次品,次品件数包

含0到5,即代表了所有情况,故B正确;对于C选项,事件A和B不可能同时发生,即事件 $A \cap B=\emptyset$,故C错误;对于D选项,事件 $A \cap D$ 指恰有一件次品,即事件A,而事件A和C不同,故D错误.故选AB.

4. D 解析:E包括两枚骰子都出现偶数点,其和是偶数,两枚骰子都出现奇数点,其和是偶数;F包括一枚骰子出现偶数点,另一枚骰子出现奇数点,其差是奇数.又在该随机试验中,事件E和事件F必有一个发生,所以事件E,F对立.故选D.

5. BD 解析:一次任意取出2个小球,所有可能的结果为红红,绿绿,蓝蓝,1红1蓝,1红1绿,1蓝1绿,则与事件“2个小球都为红球”互斥而不对立的事件有B选项中的“2个小球恰有1个红球”,D选项中的“2个小球都为绿球”,A选项中,“2个小球不全为红球”与“2个小球都为红球”是对立事件;C选项中,“2个小球至少有1个红球”包括“2个小球都为红球”.故选BD.

6. $C=A \cup B$ 解析:“点数为偶数”包括“点数为2”“点数为4”“点数为6”,因此 $C=A \cup B$.

7. 2次都中靶 解析:事件“至少有1次不中靶”包含“1次中靶1次不中靶”和“2次都不中靶”,其对立事件是“2次都中靶”.

8. 解:(1)不是互斥事件,也不是对立事件.

理由:事件A“命中的环数大于7环”包含事件B“命中的环数为10环”,当一次射击命中10环时,二者能够同时发生.

(2)是互斥事件,但不是对立事件.

理由:事件A“命中的环数大于7环”与事件C“命中的环数小于6环”不可能同时发生,但 $A \cup C=\{1,2,3,4,5,8,9,10\} \neq I$ (I为全集).

(3)既是互斥事件,也是对立事件.

理由:事件C“命中的环数小于6环”与事件D“命中的环数为6,7,8,9,10环”不可能同时发生,且 $C \cup D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}=I$ (I为全集).

素养提升

1. A 解析:“M,N至少有一个不发生”即“M不发生或N不发生”,故表示为 $\overline{M} \cup \overline{N}$ (也可表示为 $\overline{M+N}$).题中所求为“M不发生或N不发生”与“P发生”的交事件,即 $(\overline{M} \cup \overline{N}) \cap P$,也可表示为 $(\overline{M+N}) \cap P$.故选A.

2. A 解析:由题意知,事件A包含的样本点为向上的点数为1,2,3,事件B包含的样本点为向上的点数为4,5,6,事件C包含的样本点为向上的点数为1,3,5.则A与B是对立事件.故选A.

3. BCD 解析:事件 A 为“三件产品全不是次品”,指的是三件产品都是合格品;事件 B 为“三件产品全是次品”;事件 C 为“三件产品不全是次品”,它包括 0 件次品(全是合格品),一件次品,两件次品三个事件.事件 A 包含于 C ,故 A 错误; B 与 C 是互斥事件,而且是对立事件,故 B 正确; A 与 B 是互斥事件,故 C 正确;由 B 与 C 是对立事件可知, $B \cup C$ 即为必然事件,故 D 正确.故选 BCD.

4. ②③ 解析:① C 事件中包含只订一种报纸且为甲种的样本点,故 A 与 C 不是互斥事件;② B 与 E 没有重合的样本点,故互斥,且 B 与 E 的和包含了所有事件,故为对立事件;③ B 与 C 都包含订一种报纸的样本点,故不是互斥事件;④ C 与 E 都包含不订报纸的样本点,故不是互斥事件.故正确命题的序号为②③.

5. 解:(1)根据题意,事件 A 和事件 B 不可能同时发生,所以 $A \cap B$ 是不可能事件,即 $A \cap B = \emptyset$;
 $A \cup B = \{\text{甲分得 1 号卡片,乙分得 1 号卡片}\}.$

(2)由(1)可知事件 A 和事件 B 不可能同时发生,所以事件 A 和事件 B 是互斥事件.

又因为事件 A 和事件 B 可以都不发生,如甲分得 2 号卡片,同时乙分得 3 号卡片,

所以事件 A 和事件 B 不是对立事件.

事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 为“甲未分得 1 号卡片”,

事件 B 的对立事件 $\bar{B}$ 为“乙未分得 1 号卡片”.

6. 解:(1)由图可知,区域 1 表示该生数学、语文、英语三种学习资料都订阅;

区域 4 表示该生只订阅数学、语文两种学习资料;

区域 5 表示该生只订阅了语文学习资料;

区域 8 表示该生数学、语文、英语三种学习资料都未订阅.

(2)①“恰好订阅一种学习资料”包括:

只订阅数学为: $A\bar{B}\bar{C}$;

只订阅语文: $\bar{A}B\bar{C}$;

只订阅英语: $\bar{A}\bar{B}C$. 并且这三种相互互斥,

所以恰好订阅一种学习资料用 A, B, C 表示为:
 $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$.

②“没有订阅任何学习资料”用 A, B, C 表示为:
 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

易错辨析

B 解析:按照互斥事件的定义,两个事件不可能同时发生,所以命中环数大于 8 与命中环数小于 4 是互斥事件;命中环数大于 8 与命中环数小于 6 是互斥事件;命中环数大于 5 与命中环数小于 4 是互斥事件;命中环数大于 5 与命中环数小于 6 是互斥事

件. 故选 B.

小测试(四十) 古典概型

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)✓

2. C

基础过关

1. D 解析:用概率度量随机事件发生可能性的大小,这里“中奖率 10%”即指中奖的可能性为 10%.

2. C 解析:古典概型有两大特征,即(1)有限性,试验中所有可能出现的样本点为有限个;(2)等可能性,每个样本点出现的可能性相等.上述选项中,只有 C 具有上述特征.

3. B 解析:甲、乙、丙三人排成一排包含的所有等可能发生的情况有甲乙丙,甲丙乙,乙甲丙,乙丙甲,丙乙甲,丙甲乙,共 6 种,乙在中间的情况有甲乙丙,丙乙甲,共 2 种,所以乙在中间的概率为 $\frac{1}{3}$. 故选 B.

4. C 解析:由题意可知随机选到每个节日的可能性都相等,这是一个古典概型,样本空间 $\Omega = \{(\text{春节, 元宵节}), (\text{春节, 清明节}), (\text{春节, 端午节}), (\text{春节, 中秋节}), (\text{元宵节, 清明节}), (\text{元宵节, 端午节}), (\text{元宵节, 中秋节}), (\text{清明节, 端午节}), (\text{清明节, 中秋节}), (\text{端午节, 中秋节})\}$, $n(\Omega) = 10$, 事件“春节和端午节恰有一个被选中” $= \{(\text{春节, 元宵节}), (\text{春节, 清明节}), (\text{春节, 中秋节}), (\text{元宵节, 端午节}), (\text{清明节, 端午节}), (\text{端午节, 中秋节})\}$, $n = 6$, 所以概率

$$P = \frac{n}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

5. C 解析:为了方便列举,将颜色为红、黄、蓝、绿、紫的 5 支彩色笔分别标记为 1, 2, 3, 4, 5. 从 5 支不同彩色笔中任取 2 支彩色笔的方法有 10 种,其中含有红色彩色笔(即含有数字 1)的取法有 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), 共 4 种. 由古典概型的概率公式,可得满足题意的概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 故选 C.

6. $\frac{5}{36}$ 解析:连续抛掷 2 枚骰子,样本点总数 $n = 6 \times 6 = 36$. 出现朝上的点数之和等于 8 的样本点有 (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4), 共 5 个. 因此出现朝上的点数之和等于 8 的概率 $P = \frac{5}{36}$.

7. 7 解析:根据古典概型的概率计算公式可得 $\frac{n}{2+5+n} = \frac{1}{2}$, 解得 $n = 7$. 经检验, $n = 7$ 是原方程的解.

8. 解: 先后抛掷两枚质地均匀的骰子, 设 (x, y) 表示两枚骰子的点数, 每枚骰子的点数有 6 种, 则样本点总数 $n = 6 \times 6 = 36$.

(1) 记“点数之和为 7”为事件 A,

则事件 A 包含的样本点为 $(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)$, 共 6 种.

$$\text{故 } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(2) 记“掷出两个 4 点”为事件 B,

则事件 B 包含的样本点只有 1 个, 即 $(4, 4)$.

$$\text{故 } P(B) = \frac{1}{36}.$$

(3) 记“点数之和能被 3 整除”为事件 C,

则事件 C 包含的样本点为 $(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)$, 共 12 种.

$$\text{故 } P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

素养提升

1. C 解析: 从五个小球中任取两个, 样本点有: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$, 共 10 个, 其中 $(1, 2), (1, 5), (2, 4)$, 共 3 个样本点表示数字之和为 3 或 6. 利用古典概型的概率公式, 可得取出的小球标注的数字之和为 3 或 6 的概率是 $\frac{3}{10}$. 故选 C.

2. D 解析: 从集合 $A = \{-2, 1, 2\}$ 中随机取一个数 a , 从集合 $B = \{-1, 1, 3\}$ 中随机取一个数 b , 得到 (a, b) 的所有可能结果有 $(-2, -1), (-2, 1), (-2, 3), (1, -1), (1, 1), (1, 3), (2, -1), (2, 1), (2, 3)$, 共 9 种结果. 当 $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$ 时, 直线 $y = ax + b$ 不过第四象限, 共有 $(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$ 4 种情况, 所以当直线 $y = ax + b$ 一定经过第四象限时, 共有 5 种情况, 所以概率 $P = \frac{5}{9}$. 故选 D.

3. D 解析: 根据题意, 样本点分别是 1, 3, 4, 5, 8 路公共汽车首先到站, 显然共有 5 个, 而这位乘客可以乘的公共汽车有 4 路和 8 路两路, 故所求概率 $P = \frac{2}{5}$.

4. $\frac{1}{5}$ 解析: 设 3 双鞋子的每只分别为 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, 则取出 2 只鞋子的样本空间为 $\{(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, C_1), (A_1, C_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, C_1), (A_2, C_2), (B_1, B_2), (B_1, C_1), (B_1, C_2), (B_2, C_1), (B_2, C_2), (C_1, C_2)\}$, 共 15

个样本点, 其中成对的情况有 $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2)$, 共 3 种, 所以所求的概率 $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

5. 解: 设“中三等奖”为事件 A, “中奖”为事件 B,

从四个小球中有放回地取两个, 有 $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$, 共 16 种不同的结果.

(1) 取出的两个小球的编号相加之和等于 4 或 3 的取法有: $(1, 3), (2, 2), (3, 1), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$, 共 7 种结果,

$$\text{则中“三等奖”的概率 } P(A) = \frac{7}{16}.$$

(2) 由(1)知两个小球编号相加之和等于 3 或 4 的取法有 7 种;

两个小球编号相加之和等于 5 的取法有 2 种: $(2, 3), (3, 2)$.

两个小球编号相加之和等于 6 的取法有 1 种: $(3, 3)$.

$$\text{则“中奖”的概率 } P(B) = \frac{7+2+1}{16} = \frac{5}{8}.$$

6. 解: 甲、乙、丙、丁 4 名学生参加学校社团文学社和街舞社的情况如下表:

	文学社	街舞社
1	甲、乙、丙、丁	
2	甲、乙、丙	丁
3	甲、乙、丁	丙
4	甲、丙、丁	乙
5	乙、丙、丁	甲
6	甲、乙	丙、丁
7	甲、丙	乙、丁
8	甲、丁	乙、丙
9	乙、丙	甲、丁
10	乙、丁	甲、丙
11	丙、丁	甲、乙
12	甲	乙、丙、丁
13	乙	甲、丙、丁
14	丙	甲、乙、丁
15	丁	甲、乙、丙
16		甲、乙、丙、丁

共有 16 种情况, 即有 16 个样本点.

(1) 文学社和街舞社都至少有 1 人参加的样本点有 14 个,

$$\text{概率 } P_1 = \frac{14}{16} = \frac{7}{8},$$

即文学社和街舞社都至少有 1 人参加的概率为 $\frac{7}{8}$.

(2) 甲、乙同在一个社团, 且丙、丁不同在一个社团的样本点有 4 个, 概率 $P_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

易错辨析

B 解析: 试验发生包含的样本点是两数之和, 共有如表所示的 36 种情况.

5	5	6	7	8	9	10
4	4	5	6	7	8	9
3	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5
	0	1	2	3	4	5

其中所取卡片上的两数之和等于 5 的有 6 种情况, 因此所求事件的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. 故选 B.

小测试(四十一) 概率的基本性质

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)✓

2. D 3. A

基础过关

1. A 解析: $\because$ 甲不输包含甲、乙两人下成和棋与甲获胜, 且甲、乙两人下成和棋与甲获胜是互斥事件, $\therefore$ 甲、乙下成和棋的概率 $P = 0.7 - 0.2 = 0.5$. 故选 A.

2. B 解析: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示的是 A_1, A_2, A_3 这三个事件中至少有一个发生, 即可能击中 1 发, 2 发或 3 发. 故选 B.

3. D 解析: 记 3 个红球分别为 a_1, a_2, a_3 , 2 个白球分别为 b_1, b_2 , 从 3 个红球、2 个白球中任取 3 个, 则样本空间 $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, b_1), (a_1, a_2, b_2), (a_1, a_3, b_1), (a_1, a_3, b_2), (a_2, a_3, b_1), (a_2, a_3, b_2), (a_1, b_1, b_2), (a_2, b_1, b_2), (a_3, b_1, b_2)\}$, 共含 10 个样本点, 样本点出现的机会均等, 因此这些样本点的出现是等可能的. 用事件 A 表示“所取的 3 个球中至少有 1 个白球”, 则其对立事件 $\bar{A}$ 表示“所取的 3 个球中没有白球”, 则事件 $\bar{A}$ 包含的样本点有 1 个, 即 (a_1, a_2, a_3) , 所以 $P(\bar{A}) = \frac{1}{10}$. 故 $P(A) = 1 -$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

4. C 解析: 设“从中取出 2 粒都是黑子”为事件 A , “从中取出 2 粒都是白子”为事件 B , “任意取出 2 粒恰好是同一色”为事件 C , 则 $C = A \cup B$, 且事件 A 与 B 互斥. 所以 $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{7} + \frac{12}{35} = \frac{17}{35}$.

即任意取出 2 粒恰好是同一色的概率为 $\frac{17}{35}$.

5. B 解析: $1 - 0.38 - 0.34 = 0.28$. 故选 B.

6. $\frac{1}{6}$ 解析: $\because n(\Omega) = 24, n(A) = 12, n(B) = 8,$
 $n(A \cup B) = 16, \therefore P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3},$
 $P(A \cup B) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}. \therefore P(A \cap B) = P(A) +$
 $P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$

7. 120 解析: 设参加联欢会的教师共有 n 人, 因为从这些教师中选 1 人, “选中男教师”和“选中女教师”两个事件是对立事件, 所以选中女教师的概率为 $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$. 所以 $\frac{11}{20}n - \frac{9}{20}n = 12$, 解得 $n = 120$.

8. 解: 记“这个射手在一次射击中命中 9 环或 10 环”为事件 A , 命中 10 环、9 环、8 环、不够 8 环分别为事件 A_1, A_2, A_3, A_4 .

由题意知, A_2, A_3, A_4 彼此互斥,

$$\therefore P(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0.28 + 0.19 + 0.29 = 0.76.$$

又 $\because A_1$ 与 $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ 互为对立事件,

$$\therefore P(A_1) = 1 - P(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - 0.76 = 0.24.$$

$\because A_1$ 与 A_2 互斥, 且 $A = A_1 \cup A_2$,

$$\therefore P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.24 + 0.28 = 0.52.$$

素养提升

1. C 解析: 因为事件 A 与 B 是互斥事件, 所以 $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.8$. 又因为 $P(A) = 3P(B)$, 所以 $P(A) = 0.6$. 故选 C.

2. B 解析: 记“质量小于 4.8 g”为事件 A , “质量大于 4.85 g”为事件 B , “质量在 $[4.8, 4.85]$ (单位: g) 范围内”为事件 C , 所以 $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0.3 - 0.32 = 0.38$.

3. C 解析: 由题意知此乘客乘 3 路车和乘 6 路车是互斥事件, 故 5 min 内能乘到所需要的车的概率是 $0.20 + 0.60 = 0.80$.

4. $\left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right]$ 解析: 由题意可知

$$\begin{cases} 0 < P(A) < 1, \\ 0 < P(B) < 1, \\ P(A) + P(B) \leq 1, \end{cases} \quad \text{所以} \quad \begin{cases} 0 < 2-a < 1, \\ 0 < 4a-5 < 1, \\ 3a-3 \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} 1 < a < 2, \\ \frac{5}{4} < a < \frac{3}{2}, \\ a \leq \frac{4}{3}. \end{cases} \quad \text{所以} \quad \frac{5}{4} < a \leq \frac{4}{3}, \text{即} \quad a \in \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3} \right].$$

5. 解: (1) 由题意, (a, b, c) 所有可能的结果为 $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3)$, 共 27 种.

设“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$ ”为事件 A , 则事件 A 包括 $(1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 3)$, 共 3 种, 所以 $P(A) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

因此, “抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$ ”的概率为 $\frac{1}{9}$.

(2) 设“抽取的卡片上的数字 a, b, c 不完全相同”为事件 B , 则事件 $\bar{B}$ 包括 $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$, 共 3 种,

$$\text{所以} P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{27} = \frac{8}{9}.$$

因此, “抽取的卡片上的数字 a, b, c 不完全相同”的概率为 $\frac{8}{9}$.

6. 解: 记事件“在竞赛中, 有 k 人获奖”为 $A_k (k \in \mathbf{N}, k \leq 5)$, 则事件 A_k 彼此互斥.

(1) 因为获奖人数不超过 2 人的概率为 0.56, 所以 $P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = 0.1 + 0.16 + x = 0.56$.

解得 $x = 0.3$.

(2) 由获奖人数最多 4 人的概率为 0.96, 得 $P(A_5) = 1 - 0.96 = 0.04$, 即 $z = 0.04$.

由获奖人数最少 3 人的概率为 0.44, 得

$$P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 0.44,$$

$$\text{即 } y + 0.2 + 0.04 = 0.44,$$

解得 $y = 0.2$.

易错辨析

D 解析: 因为不知道事件 A, B 的关系, 所以无法判断, 故选 D.

小测试(四十二) 事件的相互独立性

预习自评

1. (1)✓ (2)✓ (3)✓ (4)✓

2. A 3. C

基础过关

1. C 解析: 因为 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 又

$$P(B) = \frac{1}{3}, \text{所以 } P(A)P(B) = \frac{1}{9}. \text{ 又因为 } P(AB) =$$

$$\frac{1}{9}, \text{所以 } P(AB) = P(A)P(B). \text{ 所以事件 } A \text{ 与 } B \text{ 相}$$

互独立. 又因为 $P(A)P(B) = \frac{1}{9} \neq 0$, 所以事件 A 和 B 不是互斥或对立事件. 故选 C.

2. B 解析: 甲、乙两人考试相互独立, 则甲未通过而乙通过的概率 $P = (1 - 0.7) \times 0.4 = 0.12$. 故选 B.

3. C 解析: 由题意知, 这道数学题被解出的概率 $P = \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{25}$. 故选 C.

4. A 解析: 根据题意, 系统 A 和系统 B 相互独立, 且两个系统在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{5}$ 和 p , 若在任意时刻恰有一个系统发生故障的概率为 $\frac{3}{10}$,

$$\text{则有 } \frac{1}{5}(1-p) + \left(1 - \frac{1}{5}\right)p = \frac{3}{10}, \text{解得 } p = \frac{1}{6}. \text{ 故}$$

选 A.

5. A 解析: 设事件 A 表示“甲、乙两人不在同一站点下车”, 因为每个人在站点 $A_i (i=1, 2, 3)$ 下车是等可能的, 所以概率均为 $\frac{1}{3}$. 所以甲、乙两人同在 A_1

$$\text{站下车的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}; \text{ 甲、乙两人同在 } A_2$$

$$\text{站下车的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}; \text{ 甲、乙两人同在 } A_3$$

$$\text{站下车的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \text{ 所以甲、乙两人在同}$$

$$\text{一站点下车的概率 } P(\bar{A}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}. \text{ 所以}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \text{ 故选 A.}$$

6. $\frac{4}{27}$ 解析: 因为第 3 次首次检测到次品, 所以第 1 次和第 2 次检测到的都是正品, 第 3 次检测到的是次品, 所以第 3 次首次检测到次品的概率为 $\frac{2}{3} \times$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

7. $\frac{8}{27}$ 解析:比赛采用“三局两胜”制,前两局打平且甲获胜的情况有两种:
 (1)“第1局甲胜、第2局乙胜、第3局甲胜”;
 (2)“第1局乙胜、第2局甲胜、第3局甲胜”.
 这两种情况是互斥的.“第1局甲胜、第2局乙胜、第3局甲胜”的概率 $P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$,“第1局乙胜、第2局甲胜、第3局甲胜”的概率 $P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$, $\therefore$ 前两局打平且甲获胜的概率 $P = P_1 + P_2 = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$.

8. 解:记事件 A 为“进入商场的一位顾客购买甲种商品”;记事件 B 为“进入商场的一位顾客购买乙种商品”;记事件 C 为“进入商场的一位顾客购买甲、乙两种商品中的一种”;记事件 D 为“进入商场的一位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种”.

$$(1) \because C = A \cap \bar{B} + \bar{A} \cap B,$$

$$\therefore P(C) = P(A \cap \bar{B} + \bar{A} \cap B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 = 0.5.$$

$$(2) \because \bar{D} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\therefore P(\bar{D}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2.$$

$$\therefore P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 0.8.$$

素养提升

1. B 解析:因为司机老王在第一、二个交通岗未遇到红灯,在第三个交通岗遇到红灯之间是相互独立的,且遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$,所以未遇到红灯的概率都是 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 所以遇到红灯前已经通过了两个交通岗的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$. 故选 B.
2. D 解析:设甲、乙两人获得一等奖的概率分别是 $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$, 则甲、乙两人不能获得一等奖的概率分别是 $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. 所以这两人中恰有一人获得一等奖的概率为 $P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. 故选 D.
3. BD 解析:由题意知, A, B, C, D, E 在通电时保险丝被熔断的概率分别为 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3},$

$P(C) = \frac{1}{4}, P(D) = \frac{1}{5}, P(E) = \frac{1}{6}$, 所以 A, B 所在线路畅通的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 故 A 错误; D, E 所在线路畅通的概率为 $1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$, 故 C 错误; 因为 A, B 所在线路畅通的概率为 $\frac{1}{3}$, 所以 A, B 所在线路不畅通的概率为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, 所以 A, B, C 所在线路畅通的概率为 $1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, 故 B 正确; 根据上述分析可知, 当开关合上时, 整个电路畅通的概率为 $\frac{29}{30} \times \frac{5}{6} = \frac{29}{36}$, 故 D 正确. 故选 BD.

4. $\frac{2}{3}$ 解析:设此射手每次射击命中的概率为 p , 分析可得, 射击 4 次至少命中一次的对立事件为射击 4 次全都没有命中, 所以此射手对同一目标独立地射击 4 次全都没有命中的概率为 $1 - \frac{80}{81} = \frac{1}{81}$, 则 $(1-p)^4 = \frac{1}{81}$, 解得 $p = \frac{2}{3}$.

5. 解:设考生填空题得 20 分、15 分、10 分分别为事件 A, B, C .

$$(1) \text{ 考生填空题得 20 分的概率 } P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$(2) P(B) = p \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + p \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + (1-p) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}p + \frac{1}{8},$$

$$P(C) = p \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + (1-p) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + (1-p) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}p.$$

$$\text{由 } P(B) = P(C), \text{ 得 } p = \frac{3}{4}.$$

6. 解:(1)由题意可得

$$\begin{cases} (1-p)(1-q) = \frac{1}{6}, \\ p(1-q) + (1-p)q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{解得 } pq = \frac{1}{3}, p+q = \frac{7}{6}.$$

所以 p, q 是方程 $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$ 的两个实根.

又 $p > q$, 所以 $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{2}$.

(2) 设 A_1, A_2 分别表示甲两轮猜对 1 个, 2 个谜语的事件, B_1, B_2 分别表示乙两轮猜对 1 个, 2 个谜语的事件,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(A_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

设 M 表示“星队”在前两轮活动中猜对 3 个谜语的事件,

$$\text{由题意知 } P(M) = P(A_1 B_2 \cup A_2 B_1)$$

$$= P(A_1 B_2) + P(A_2 B_1)$$

$$= P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1)$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

易错辨析

$\frac{49}{512}$ **解析:** 由题意可知每次打开家门的概率为 $\frac{1}{8}$,

则该人第三次打开家门的概率为 $(1 - \frac{1}{8}) \times$

$$(1 - \frac{1}{8}) \times \frac{1}{8} = \frac{49}{512}.$$

小测试(四十三) 频率与概率

预习自评

1. (1)× (2)× (3)× (4)× (5)✓

2. D 3. B

基础过关

1. D **解析:** 出现正面朝上的频率是 $45 \div 100 = 0.45$, 出现正面朝上的概率是 0.5. 故选 D.

2. C **解析:** 由题表可以看出, 在区间 $[17, 29)$ 内的数据个数为 $1+1+3+3+18+16=42$, $\therefore$ 样本量为 100, $\therefore$ 在区间 $[17, 29)$ 内的数据的频率为 $\frac{42}{100}$, 即小于 29 的数据大约占总体的 42%. 故选 C.

3. B **解析:** 抛掷两枚质地均匀的正方体骰子, 它们的点数分别为 x, y , 则 $x+y=10$. 产生的整数随机数中, 每组中数字的个数为 2, 满足题意的数组为 (4, 6), (5, 5), (6, 4). 故选 B.

4. A **解析:** 样本点的总数为 20, 其中三天中至少有两天下雨的样本点有 162, 151, 271, 932, 408, 471, 333, 730, 163, 039, 共 10 个, 所以三天中至少有两天下雨的概率为 $P = \frac{10}{20} = 0.5$. 故选 A.

5. D **解析:** 由题图知, 试验中该结果出现的频率稳定

在 0.25 左右.

A. 掷一枚正六面体的骰子, 出现 5 点的概率为 $\frac{1}{6}$, 故 A 选项不符合题意;

B. 掷一枚硬币, 出现正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$, 故 B 选项不符合题意;

C. 任意写出一个整数, 能被 2 整除的概率是 $\frac{1}{2}$, 故 C 选项不符合题意;

D. 从一副去掉大、小王的扑克牌中任意摸一张牌, 摸到红桃的概率为 $\frac{13}{52} = 0.25$, 故 D 选项正确. 故选 D.

6. 4 0.7 **解析:** 样本中数据总个数为 20, $\therefore x = 20 - (2+3+5+4+2) = 4$. $\therefore$ 在 $[10, 50)$ 内的数据有 14 个, $\therefore$ 数据落在 $[10, 50)$ 内的概率约为 $\frac{14}{20} = 0.7$.

7. 选出的 4 人中, 只有 1 个男生 **解析:** 因为用 1~4 代表男生, 用 5~9 代表女生, 所以“4678”表示选出的 4 人中, 只有 1 个男生.

8. 解: (1) 补充表格如下:

摸球次数	10	50	80	100	150	200	250	300
出现红球的频数	2	15	20	27	36	50	65	72
出现红球的频率	20%	30%	25%	27%	24%	25%	26%	24%

(2) 可能不一样, 因为频率会随每次试验的变化而变化.

(3) 由 (1) 可知频率集中在 25% 附近, 所以可估计红球出现的概率为 0.25.

素养提升

1. C **解析:** 由题意, 得 $n = 4\,500 - 200 - 2\,100 - 1\,000 = 1\,200$, 因为随机调查的消费者中对网上购物“比较满意”或“满意”的人数为 $1\,200 + 2\,100 = 3\,300$, 所以随机调查的消费者中对网上购物“比较满意”或“满意”的频率为 $\frac{3\,300}{4\,500} = \frac{11}{15}$. 由此估计在网上购物的消费者小马对网上购物“比较满意”或“满意”的概率为 $\frac{11}{15}$. 故选 C.

2. D **解析:** 这对夫妇的两个小孩的性别可能是 (男, 男), (男, 女), (女, 男), (女, 女), 所以 A 不正确; 中

奖的概率为 0.2 是说中奖的可能性为 0.2, 当摸 5 张票时, 可能 5 张都中奖, 也可能中奖 1 张、2 张、3 张、4 张, 或者都不中奖, 所以 B 不正确; 10 张票中有 1 张奖票, 10 人去摸, 每人摸到的可能性是相同的, 即无论谁先摸, 摸到奖票的概率都是 0.1, 所以 C 不正确, D 正确.

3. B 解析: 20 组随机数中, 第一次不是 4 且第二次是 4 的数共有 5 组, 故估计“取球直到第二次停止”的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. 故选 B.

4. 60 解析: 因为第 1, 2, 4 组的频数分别为 6, 7, 9, 所以第 1, 2, 4 组的频率分别为 $\frac{6}{40} = 0.15$, $\frac{7}{40} = 0.175$, $\frac{9}{40} = 0.225$. 又因为第 3 组的频率为 0.25, 所以第 5 组的频率为 $1 - 0.25 - 0.15 - 0.175 - 0.225 = 0.2$. 所以售出的这 300 双皮鞋中尺码为 $[40, 42]$ 的皮鞋约为 $300 \times 0.2 = 60$ (双).

5. 解: (1) 由已知共调查了 100 人, 其中 40 min 内不能赶到火车站的有 $12 + 12 + 16 + 4 = 44$ (人), 所以用频率估计相应的概率为 0.44.

(2) 选择 L_1 的有 60 人, 选择 L_2 的有 40 人, 故由调查结果得频率如下表:

所用时间/min	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60
选择 L_1 所用时间的频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
选择 L_2 所用时间的频率	0	0.1	0.4	0.4	0.1

6. 解: (1) 由前三年六月份各天的最高气温数据, 得到最高气温位于区间 $[20, 25)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 和低于 20°C 的天数之和为 $2 + 16 + 36 = 54$,

$\therefore$ 估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率为 $\frac{54}{90} = \frac{3}{5}$.

(2) 当最高气温不低于 25°C 时, 需求量为 500 瓶, 则 $Y = 450 \times 2 = 900$ (元),
当最高气温在 $[20, 25)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 时, 需求量为 300 瓶,
则 $Y = 300 \times 2 - (450 - 300) \times 2 = 300$ (元),
当最高气温低于 20°C 时, 需求量为 200 瓶,
 $Y = 200 \times 2 - (450 - 200) \times 2 = -100$ (元),
故当最高气温不低于 20°C 时, $Y > 0$,
由前三年六月份各天的最高气温数据得, 最高气温

不低于 20°C 的天数为 $90 - (2 + 16) = 72$,

$\therefore$ 估计 Y 大于零的概率为 $\frac{72}{90} = 0.8$.

易错辨析

0.5 解析: 掷一次硬币正面朝上的概率是 0.5.

滚动卷(三) 小测试(三十二)至(四十三)

综合拔高

1. B 解析: 正面朝上的频率是 $\frac{7}{10} = 0.7$, 正面朝上的概率是 0.5. 故选 B.

2. A 解析: 从 1, 2, 3, $\dots$, 10 这 10 个数中, 任取 3 个数, 这 3 个数之和不大于 8 包含的样本点为 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$. 故选 A.

3. B 解析: $A = \{\text{出现的点数不大于 } 3\} = \{\text{出现的点数为 } 1, 2, 3\}$, $B = \{\text{出现的点数为偶数}\} = \{\text{出现的点数为 } 2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B = \{\text{出现的点数为 } 2\}$, 故 B 正确; A 错误; 因为事件 A 与事件 B 可以同时发生, 故事件 A 与事件 B 不是互斥事件, 也不是对立事件, 故 C, D 错误. 故选 B.

4. C 解析: 记 1 个白球为 A, 3 个黑球为 b, c, d, 依题意, 从袋中不放回地依次随机摸出 2 个球的概率问题, 相当于随机摸出 2 个球的概率问题, 从袋中随机摸出 2 个球的试验的不同结果是: Ab, Ac, Ad, bc, bd, cd, 共有 6 个, 2 个球都是黑球的事件含有的结果为: bc, bd, cd, 共有 3 个, 所以两个球都是黑球的概率是 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 C.

5. ABD 解析: 对于 A, 如果 $B \subseteq A$, 则 $P(AB) = P(B) = 0.3$, 故 A 正确; 对于 B, 如果 $B \subseteq A$, 则 $P(A \cup B) = P(A) = 0.4$, 故 B 正确; 对于 C, 如果 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.3 - P(AB) = 0.7 - P(A)P(B) = 0.7 - 0.4 \times 0.3 = 0.58$, 故 C 不正确; 对于 D, 如果 A 与 B 相互独立, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = (1 - 0.4) \times (1 - 0.3) = 0.42$, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. 0.03 解析: 在一年内挡风玻璃破碎的频率为 $\frac{600}{20\,000} = \frac{3}{100} = 0.03$, 用频率来估计挡风玻璃破碎的概率.

7. $\frac{2}{3}$ 解析: 从甲、乙、丙、丁四人中随机选取两人, 有 $\{\text{甲, 乙}\}$, $\{\text{甲, 丙}\}$, $\{\text{甲, 丁}\}$, $\{\text{乙, 丙}\}$, $\{\text{乙, 丁}\}$, $\{\text{丙, 丁}\}$ 共 6 种结果, 其中甲、乙两人中有且只有一

人被选取,有{甲,丙},{甲,丁},{乙,丙},{乙,丁},共4种结果.故甲、乙两人中有且只有一人被选取的概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

8. $\frac{2}{3}$ 解析:由题意可知抛掷一枚骰子,基本事件个数共有6个,则“不大于4的偶数点出现”的概率 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,“小于5的点数出现”的概率 $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,则 $P(\bar{B})=\frac{1}{3}$.因为A与 $\bar{B}$ 互斥,所以 $P(A+\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

9. 解:(1)由调查数据可知,既未参加书法社团又未参加演讲社团的有30人,故至少参加上述一个社团的共有 $45-30=15$ (人).所以从该班随机选1名同学,该同学至少参加上述一个社团的概率为

$$P=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

(2)从这5名男同学和3名女同学中各随机选1人,其所有可能的结果组成的样本空间 $\Omega=\{A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_3, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, A_5B_1, A_5B_2, A_5B_3\}$,共含15个样本点.

根据题意这些样本点出现的可能性相等.

事件“ A_1 被选中且 B_1 未被选中”所包含的样本点有 A_1B_2, A_1B_3 ,共2个.

所以其概率为 $P=\frac{2}{15}$.

10. 解:设“该选手回答正确第*i*轮问题”为事件 A_i ($i=1,2,3$),

$$\text{则 } P(A_1)=\frac{4}{5},$$

$$P(A_2)=\frac{3}{5},$$

$$P(A_3)=\frac{2}{5}.$$

(1)该选手进入第三轮才被淘汰的概率为

$$P(A_1A_2\bar{A}_3)=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125}.$$

(2)该选手至多进入第二轮考核的概率为 $P(\bar{A}_1+A_1\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)+P(A_1)P(\bar{A}_2)=\left(1-\frac{4}{5}\right)+$

$$\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{13}{25}.$$

素养提升

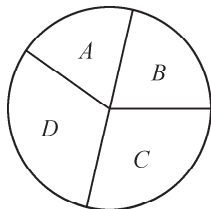
1. C 解析:由题意,得

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

共有36个样本点,且每个样本点是等可能发生的.由题意知 x, y 应满足 $y=2x$,所以满足题意的样本点有(1,2),(2,4),(3,6),共3个样本点.

$\therefore \log_{2x}y=1$ 的概率为 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.故选C.

2. D 解析:因为 $P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$,所以事件 $A+B+C+D$ 是一个必然事件.又事件 A, B, C, D 彼此互斥,所以四个事件的关系如图所示.由图可知,任何一个事件与其余三个事件的和事件必然是对立事件,任何两个事件的和事件与其余两个事件的和事件也是对立事件.故选D.



3. ABD 解析:因为袋子中有5个除颜色外完全相同的小球,其中2个红球、3个黄球,所以第一次摸到红球的概率为 $\frac{2}{5}$,故A选项正确;若第一次摸到红球,则第二次也摸到红球的概率为 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$,若第一次摸到黄球,则第二次摸到红球的概率为 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$,所以第二次摸到红球的概率为 $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$,故B选项正确;由对B选项的分析可知,两次都摸到红球的概率为 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$,故D选项正确.故选ABD.

4. $\frac{7}{48}$ 解析:两人经过1 min相遇的点是题图中的点E或点F.在点E相遇时:甲向西走,乙向北走,概

率为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; 在点 F 相遇时: 甲向南走, 乙向东走, 概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. 故两人经过 1 min 相遇的概率为 $\frac{1}{16} + \frac{1}{12} = \frac{7}{48}$.

5. 解: 记甲、乙、丙三台机器在某一小时内需要维修分别为事件 A, B, C , 则 A, B, C 两两相互独立.

(1) 由题意, 得

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.05,$$

$$P(AC) = P(A)P(C) = 0.1,$$

$$P(BC) = P(B)P(C) = 0.125.$$

$$\therefore P(A) = 0.2, P(B) = 0.25, P(C) = 0.5.$$

$\therefore$ 甲、乙、丙每台机器在这一小时内需要维修的概率分别为 0.2, 0.25, 0.5.

(2) $\because A, B, C$ 两两相互独立,

$\therefore \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 两两相互独立.

$\therefore$ 甲、乙、丙每台机器在这一个小时内都不需要维修的概率为 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.8 \times 0.75 \times 0.5 = 0.3$,

$\therefore$ 这一小时内至少有一台机器需要维修的概率为

$$P = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

6. 解: (1) 甲连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$.

(2) 根据赛制, 至少需要进行四场比赛, 至多需要进行五场比赛.

比赛四场结束, 共有三种情况:

甲连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$,

乙连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$;

丙上场后连胜三场的概率为 $\frac{1}{8}$.

所以需要进行第五场比赛的概率为 $1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} -$

$$\frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

(3) 丙最终获胜, 有两种情况:

比赛四场结束且丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8}$;

比赛五场结束且丙最终获胜, 则从第二场开始的四场比赛按照丙的胜、负、轮空结果有三种情况: 胜胜

负胜, 胜负空胜, 负空胜胜, 概率分别为 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$.

因此丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$.